الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

كلية العلوم الإقتصادية،التجارية و علوم التسيير- جامعة تلمسان

جامعة ابو بكر بلقايد
كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير
تلمسان

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى ل.م.د بعنوان:

الإحصاء 2- دروس و أعمال موجهة

وفق المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي و البحث العلمي

من إعداد

د.بن عزة هناء

السنة الجامعية:

2023/2022

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE ABOU-BEKR BELKAÎD
TLEMCEN
Faculte des Sciences
Economiques,Commerciales
et Sciences de Gestion
le Président du Conseil Scientifique

جامعة أبو بكر بلقايد
تلمسان
كلية العلوم الاقتصادية، التجارية
وعلوم التسيير
رئيس المجلس العلمي للكلية

مستخرج محضر المجلس العلمي

في اجتماعه المنعقد بتاريخ **2023-05-14** و طبقا لنتائج الخبرة الايجابية المقدمة من طرف الخبيرين، وافق المجلس العلمي لكلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير بجامعة أبي بكر بلقايد تلمسان بالإجماع على قبول **المطبوعة** الموسومة بعنوان:

" الاحصاء 2- دروس و أعمال موجهة " ، موجهة لطلبة السنة الأولى **ل.م.د**، والتي تم اعدادها من قبل الدكتورة:" **بن عزة هناء**"

على أن يتم ايداعها في مكتبة العلوم الاقتصادية قصد السماح للطلبة بالاطلاع على محتواها و الاستفادة منها.

رئيس المجلس العلمي

عميد الكلية

أ.د.بن لدغم نجي
عميد الكلية

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

كلية العلوم الإقتصادية،التجارية و علوم التسيير- جامعة تلمسان

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الأولى ل.م.د بعنوان:

الإحصاء 2- دروس و أعمال موجهة

من إعداد

د.بن عزة هناء

السنة الجامعية:

2023/2022

وفق المقرر الرسمي لوزارة التعليم العالي و البحث العلمي

قائمة المحتويات

– مقدمة

الفصل الأول: نظرية المجموعات

- تمهيد

I. تعريف المجموعة
II. أنواع المجموعات
III. العمليات على المجموعات
IV. قوانين في نظرية المجموعات

الفصل الثاني: التحليل التوافقي أو العاملي

- تمهيد

I. التوفيقات (Combinaison)
II. الترتيبات(Arangement)
III. التبديلة(Permutation)

الفصل الثالث :نظرية الإحتمالات

تمهيد

I. مفهوم الإحتمال
II. مبادئ الإحتمالات
II. 1.2 التجربة العشوائية
II. 2.2 فضاء العينة.
II. 3.2 الحدث و أنواعه.
III. حساب الإحتمالات.
IV. الإحتمالات الشرطية.

V. نظرية الإحتمالات الكلية و نظرية بايز(Bayes).

V. 1. نظرية الإحتمالات الكلية

V. 2. نظرية بايز (Bayes)

الفصل الرابع :التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

I. مفهوم المتغير العشوائي المتقطع.

II. التوزيع الإحتماليللمتغير العشوائي المتقطع.

III. دالة التوزيع المتجمع (F_X)، و تمثيلها لاالبياني

IV. التوقع الرياضي و التباين و خصائصهما.

V. التوزيعات الإحتمالية المتقطعة الشهيرة.

IV. 1.التوزيع الثنائي(ذي الحدين).

IV. 2.التوزيع البواسوني.

IV. التوزيع الفوق هندسي(الهندسي الزائدي).

V. التقريبات

V. 1.تقريب التوزيع ذي الحدين بالتوزيع البواسوني.

V. 2.تقريب التوزيع ذي الحدين بالتوزيع الفوق هندسي.

الفصل الخامس:التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المستمرة (المتصلة)

I. مفهوم المتغير العشوائي المستمر.

II. دالة التوزيع المتجمع(F_X) و دالة كثافة الإحتمال(f_x).

III. التوقع الرياضي و التباين و خصائصهما.

IV. قاعدة لايبينيز(Regle de Leibniz)

V. التوزيعات الإحتمالية المستمرة الشهيرة.

V. 1.التوزيع الطبيعي العادي(أو الكيفي).

V. 2.التوزيع الطبيعي المعياري.

VI. التقريبات

VI. 1.تقريب التوزيع ذي الحدين بالتوزيع الطبيعي.

VI. 2.تقريب التوزيع البواسوني بالتوزيع الطبيعي

الفصل السادس: العزوم و الدالة المتجددة للعزوم

I. العزوم

II. الدالة المتجددة للعزوم

الفصل السابع: نظرية شيبيشيف و نظرية الأعداد الكبيرة

I. متراجحة تشيبيشيف

II. نظرية الأعداد الكبيرة

مقدمة :

إزداد في الفترة الأخيرة ،التركيز على الإحصاء بشكل عام، و على النظرية الإحصائية وتوزيعاتها على وجه الخصوص، مما أدى إلى ظهور الأهمية الكبيرة لموضوع الإحصاء الرياضي، إذ أصبح له تطبيقات كثيرة ومتعددة في مختلف مجالات الحياة، وأصبح يدرس في مختلف دور العلم من مؤسسات تربوية وجامعات، وبسبب أهميته والحاجة الماسة إليه من قبل طلبتنا في الجامعة عامة ، و طلبة السنة أولى، جذع مشترك، تخصص علوم إقتصادية ،تجارية و علوم التسيير خاصة ، تم وضع هذه المطبوعة ، و التي إحتوت على برنامج المقياس وفقا لما جاء به المقرر المعدل لوزارة التعليم العالي و البحث العلمي.

تضمنت المطبوعة جزئين، تضمنت في جزءها الأول على الجانب النظري على شكل محاضرات و دروس في مقياس الإحصاء 2 ، و الذي قسم إلى سبعة فصول، تضمن الفصل الأول منها على شرح ل "نظرية المجموعات" ، ثم الفصل الثاني الذي تناول "التحليل العاملي أو التوافقي" ، و كل هذا تمهيدا للفصل الثالث و الذي تناول "نظرية الإحتمالات".ثم بعد ذلك تم التطرقي إلى "التوزيعات الإحتمالية المتقطعة" و " التوزيعات الإحتمالية المستمرة" في الفصلين الرابع و الخامس على الترتيب.ثم بعد ذلك تم التطرق إلى "العزوم و الدالة المتجددة للعزوم" و " نظرية شيبيشيف و نظرية الأعداد الكبيرة" في الفصلين الأخيرين على الترتيب.

أما فيما يخص الجزء الثاني منها ،فقد خصص للأعمال الموج هة على شكل مجموعة من التمارين لكل فصل من الفصول المتطرق إليها في الجزء الأول من المطبوعة، مع الحل المفصل لهذه التمارين.

دروس في الإحصاء 2

تمهيد

إن نظرية المجموعات تعد من الفروع الأساسية لعلم الرياضيات، و عادة ما يستخدم علماء الرياضيات الحروف لتمييز المجموعات وعناصرها.

تعد نظرية المجموعات المدخل الأول أو المبدأ الأساسي في نظرية الاحتمال (سيتم تناول هذه الأخيرة بالتفصيل في الفصل الثاني)

I. تعريف نظرية المجموعات:

نظرية المجموعات (Set Theory) هو فرع من علم المنطق الرياضي. تهتم تلك النظرية بدراسة المجموعات والتي هي تجميع لكائنات رياضية مجردة والعمليات المطبقة عليها، وتشكل إحدى أهم ركائز الرياضيات الحديثة.

تعرف المجموعة على أنها تجمع بين الأشياء التي تشترك في صفة معينة وقد تكون هذه الأشياء كميات أو أعداد أو أي شيء آخر معرفا تعريفا واضحا وعادة ما يرمز للمجموعات بأحرف إنكليزية كبيرة بينما نرمز للعناصر التي توجد ضمن تلك المجموعات بأحرف إنكليزية صغيرة.

و قد عرفها العالم الرياضي جورج كانتور(J.Cantor)* على أنها" هي إجتماع من كل لعدد من الأشياء التي نحسبها بحواسنا أو نتصورها بأذهاننا، و هي كائنات معينة تمام التعيين و مختلف بعضها عن بعض"

كانت بداية الإهتمام بهذا العلم والعمل على دراسته بالقرن التاسع عشر عندما بد أهـ جورج كانتور وريتشارد ديدكايند. وعلى اثر اكتشاف تناقضات عديدة في نظرية المجموعات الأساسية، اقتُرحت العديد من الانظمة البديهية لتجاوز هذه التناقضات ، ومن هذه كان نظام زيرملو–فرانكلن مع بديهية الإختيار افضلها على الإطلاق.

II. أنواع المجموعات: نميز ما بين

II. 1.المجموعة الشاملة أو الكاملة universal set:

في أي مجالٍ من المجالات ، فإن جميع العناصر التي يختص ذلك المجال بالتعامل معها تنتمي إلى مجموعةٍ كبرى تدعى بالمجموعة الشاملة . أي بعبارة أخرى ، هي تشمل كل عناصر الموضوع أو الظاهرة محل الدراسة.

*: عاالم رياضي ألماني، و هو من الأوائل الذي أشار إلى هذا المفهوم ، و يعتبر مؤسس نظرية المجموعات.

مثال: مجموعة الطلبة هي مجموعةٌ شاملة تضم جميع طلبة العالم و مجموعة الأعداد هي مجموعةٌ شاملة تضم جميع الأعداد.

عادة ما يرمز لهذه المجموعة ب بالحرف U أو Ω.

II. 2.المجموعة الخالية – المجموعة المنعدمة العناصر Empty set – null set:

يقصد بالمجموعة الخالية ، مجموعة منعدمة العناصر أي التي لا تحوي أي عنصر و يرمز لهذه المجموعة بالرمز ∅ .و توجد مجموعة خالية وحيدة فهي كلها عبارة عن مجموعات خالية من العناصر و بالتالي فهي مجموعات متساوية.

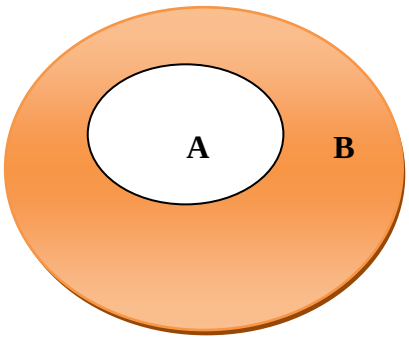
II. 3.المجموعة الجزئية subset :

يقصد بالمجموعة الجزئية ، مجموعة تشكل جزءاً من مجموعة أخرى أكبر منها .أي جزء من الكل

وفقا لنظرية المجموعات، فإنه إذا كان لدينا المجموعتين A و B و كانت عناصر المجموعة Aموجودة كذلك ضمن المجموعة B فإننا ندعوا المجموعة A بأنها مجموعةً جزئية من المجموعة B أو أن A محتواة في B.

نستخدم الرمز ⊆ للدلالة على ذلك، و نكتب: $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall X: x \in A \Rightarrow x \in B$$



II. 4.المجموعات المتساوية :

نقول عن مجموعتين(A) و (لB) أنهما متساوييتين إذا كا (A) و (B) يحتويان على نفس العناصر.

ملاحظة: في الوقت ذاته فإنه يمكن القول كذلك بأن كلاً من هاتين المجموعتين هي مجموعةٌ جزئيةً من المجموعة الثانية لأن عناصر كلاً منهما موجودةً في المجموعة الأخرى.

نستخدم الرمز $\supseteq$ لدلالة على أن إحدى هاتين المجموعتين هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة الثانية و أنها تساويها في الوقت ذاته ، و نكتب:

$$A\supseteq B\Leftrightarrow \forall\ X:\ x\in A\Leftrightarrow x\in B$$

مثال: $A=\{2,4,6,8\}$، و $B=\{4,6,8,2\}$

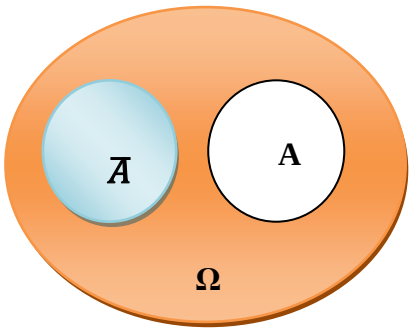
في هذه الحالة نقول $A=B$، لأن لهما نفس العناصر و العدد.

II. 5. المجموعة المتممة أو المكملة:

إذا كانت المجموعتين (A) و ($\bar{A}$) مجموعتان جزئيتان من المجموعة الكلية Ω

نقول عن ($\bar{A}$) أنها مجموعة متممة للمجموعة (A) ،إذا كانت العناصر التي تنتمي إلى ($\bar{A}$) لا تنتمي إلى (A)، أي لا يوجد أي عنصر مشترك بين المجموعتين.

إذا كان $x\in A$ فإن $x\notin \bar{A}$ ، والعكس صحيح.



مثال:

لتكن $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ، إذا كانت A و $\bar{A}$ مجموعتان جزئيتان من Ω.

بحيث A :مجموعة الأعداد الزوجية.

أوجد $\bar{A}$؟

$A\Rightarrow A=\{2,4,6,8,10\}$:مجموعة الأعداد الزوجية.

$\bar{A}\Rightarrow\bar{A}=\{1,3,5,7,9\}$:مجموعة الأعداد الفردية.

II. 6.المجموعات المنتهية:

يقصد بالمجموعة المنتهية ، كل مجموعة تحتوي على عدد منتهي من العناصر ، أي بعبارة أخرى عدد عناصرها يمكن تحديده.

مثال: لتكن (A) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تزيد عن 5 وتقل عن 15، إذن :

$$A=\{6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$

III. 6 المجموعات الغير المنتهية:

هي عكس المجموعة السابقة، فهي كل مجموعة تحتوي على عدد غير منتهي من العناصر ، أي بعبارة أخرى عدد عناصرها لا يمكن

مثال : لتكن (A) مجموعة مضاعفات العدد 5

في هذه الحالة، (A) هي مجموعات غير منتهية وذلك لأن عناصرها غير محددة

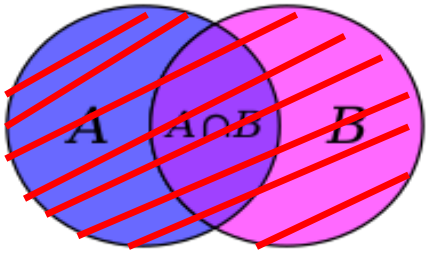
ملاحظة: : كل مجموعة يمكن أن تكون ضمن واحدة أو أكثر من هذه التسميات

III. العمليات على المجموعات:

III. 1.الإتحاد:

عملية اتحاد مجموعتين A وB يرمز لها بـ $\{A \cup B\}$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي لمجموعة واحدة من المجموعتين A أو B. أي أن عنصر x ينتمي إلى $\{A \cup B\}$ إذا وفقط إذا x ينتمي إلى A أو x ينتمي إلى B

$$\{x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B\}$$



$A \cup B$

و من خلال تعريف الإتحاد بين المجموعات ، ينتج:

- $A \cup A = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

مثال: لتكن $A=\{3,7,4\}$، $B=\{2,5,1\}$

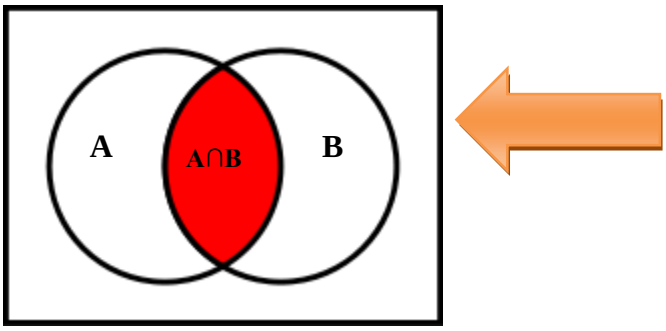
$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,7\}$$

III. 2.التقاطع:

عملية تقاطع مجموعتين A وB يرمز لها بـ $A \cap B$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر المشتركة بين A وB.

أي أن عنصر x ينتمي إلى $A \cap B$ إذا وفقط إذا x ينتمي إلى A وأيضاً x ينتمي إلى B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$



و من خلال تعريف التقاطع بين المجموعات ، ينتج:

- $A \cap A = A$
- $A \cap \Omega = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

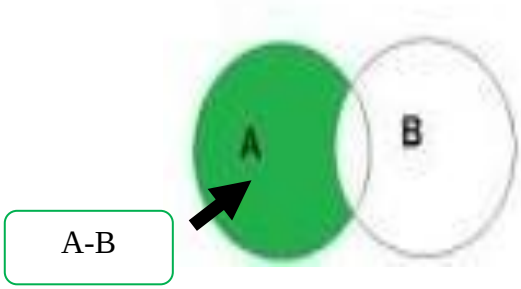
مثال: لتكن A={5,6,7,11,12,18}، B={3,5,10,13,18}

$$A \cap B=\{5,18\}$$

III. 3.الفرق:

عملية الفرق بين مجموعتين A وB يرمز لها بـ $(A-B)$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B. أي أن عنصر x ينتمي إلى $(A-B)$ إذا وفقط إذا x ينتمي إلى A وأيضاً x لا ينتمي إلى B

$$x \in (A-B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$



و من خلا ل تعريف الفرق بين المجموعات، ينتج:

$$A-B \neq B-A$$

$$A-\emptyset=A$$

$$A-A=\emptyset$$

$$A-B=A-(A \cap B)$$

$$B-A=B-(A \cap B)$$

® ملاحظة: إذا كانت (B) محتواة في (A) ، فإن (A-B) هو متتم ل (B)، و نكتب:

إذا كانت $B \subseteq A$ فإن $A-B = \bar{B}$

مثال: لتكن A={4,7,9,11}، B={5,2,9,10,11}

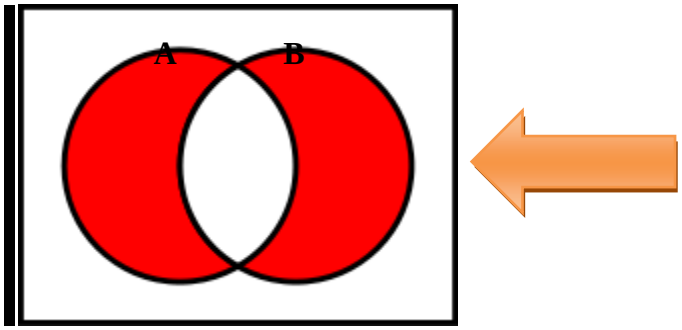
$$A-B=A-(A \cap B)= \{4,7,9,11\}-\{9,11\}=\{4,7\}$$

$$B-A=B-(A \cap B)= \{5,2,9,10,11\}-\{9,11\}=\{5,2,10\}$$

III. 4.الفرق التناظري أو المتماثل:

الفرق التماثلي ($A\Delta B$) ، هو المجموعة المجموعة التي تحتوي كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A و لا تنتمي إلى المجموعة B، زائد كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة B و لا تنتمي إلى المجموعة A.

$$x\in A\Delta B \Leftrightarrow x\in A \text{ أو } x\in B$$



و من خلال تعريف الفرق التناظري، ينتج:

- $A\Delta\varnothing=\varnothing$
- $A\Delta A=\varnothing$
- $A\Delta B=B\Delta A$
- $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$
- $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
- $A\Delta B=(A\cap \bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$
- $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

مثال: لتكن:

A: مجموعة مضاعفات العدد 2 الأصغر من 10

B: مجموعة مضاعفات العدد 4 الأصغر من 16

أوجد $A\Delta B$؟

$A=\{0,2,4,6,8\}$

$B=\{0,4,8,12\}$

$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=\{0,2,4,6,8,12\}-\{0,4,8\}=\{2,6,12\}$$

III. 5.الجداء الديكارتي :

إذا كانت لدينا مجموعتين(A) و (لB)، فإن الجداء الديكارتي بين المجموعتين هو مجموعة الثنائيات التي ينتمي مسقطها الأول إلى (A) و ينتمي مسقطها الثاني إلى (B) ، و يرمز له ب $A \otimes B$.

$$A\otimes B=\{Z=(x,y)/x\in A \text{ و } y\in B\}$$

®**ملاحظة:** إذا كانت $A=B$ فإن $B\otimes A=A\otimes B$

و من خلال تعريف الجداء الديكارتي، ينتج:

- $A\otimes B\neq B\otimes A$
- $A\otimes\varnothing=\varnothing$
- $B\otimes\varnothing=\varnothing$
- $A\otimes(B\cup C)=(A\otimes B)\cup(A\otimes C)$
- $A\otimes(B\cap C)=(A\otimes B)\cap(A\otimes C)$

III. قوانين في نظرية المجموعات:

1. $A\subset B \;et\; B\subset C \Rightarrow A\subset C$
2. $A\cup B=B\cup A$
3. $A\cap B=B\cap A$
4. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$
5. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$
6. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
7. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
8. $A-B=A\cap\bar{B}$
9. $si\;(A\subset B)\;alors\;(\bar{B}\subset\bar{A})$
10. $A\cup\varnothing=A\;,\;A\cap\varnothing=\varnothing$
11. $\overline{(A\cup B)}=(\bar{A}\cap\bar{B})$
12. $\overline{A\cap B}=(\bar{A}\cup\bar{B})$
13. $A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$

تمهيد:

قبل التطرق إلى الإحتمالات و أهم مبادئها ، و طرق حسابها،لا بد من أن نعرج أولا على ما يعرف بالتحليل التوافقي(Analyse Combinatoire)أو التحليل العاملي (Analyse Factoriale)،و هو المبدأ الأساسي للعد(النظرية الرياضية للعد)،إذ نحتاج هذا النوع من التحليل في حساب عدد الحالات الممكنة لأي تجربة عشوائية،و نميز في إطار ذلك ما بين التوفيقات،الترتيبات و التبديلات.

I. التحليل التوافقي أو العاملي:

I. 1.التوفيقة(Combinaison):

توفيقة (K) عنصر من بين(n) عنصر هي كل مجموعة جزئية ذات (k)عنصر من بين (n)عنصر.و يتم حساب عدد التوفيقات من خلال العلاقة:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

بحيث أن : n:العدد الكلي .

k:عدد العناصر المسحوبة من بين ()عنصر.

! :عاملي

✍ **ملاحظة:** $n! = \boldsymbol{n.(n-1).(n-2)\ldots\ldots\ldots 1}$

فمثلا: $5! = \mathbf{5.4.3.2.1 = 120}$

$$\mathbf{0! = 1}$$

في التوفيقة ،الترتيب غير مهم بين العناصر المسحوبة، و السحب يكون دفعة واحدة.

مثال:

يتكون فوج من 5 رجال و 8 نساء،نختار عشوائيا 6 أشخاص.

١. كم لجنة مكونة من رجلين ينتميان إلى الفوج يمكن تكوينها؟

٢. كم لجنة مكونة من 5نساء في الفوج يمكن تكوينها؟

٣. كم لجنة مشكلة من 5 رجال و 1نساء في الفوج يمكن تكوينها؟

الحل:

1.عدد الجان الممكن تكوينها من 2 رجل في الفوج:

$$C_5^2 \cdot C_8^4 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{8!}{4!(8-4)!}$$

2.عدد الجان الممكن تكوينها من 5 نساء في الفوج:

$$C_8^5 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!}$$

3.عدد الجان الممكن تكوينها من 5 رجال و 1 نساء في الفوج:

$$C_5^5 \cdot C_8^1 = \frac{5!}{5!(5-5)!} \cdot \frac{8!}{1!(8-1)!}$$

I. 2.الترتيبة(Arrangement): و نميز ما بين:

I. 1.2ترتيبة بدون تكرار: و هو كل ترتيب ل(k)عنصر مختارة من بين (n) عنصر الواحدة تلوى الأخرى **بدون إرجاع** ،أي لا يمكن لكل عنصر أن يتكرر أكثر من مرة واحدة.وتحسب عدد الترتيبات في هذه الحالة من خلال العلاقة:

$$A_n^k = \frac{n!}{!(n-k)!}$$

مثال:

بكم كيفية يمكن سحب ورقتين الواحدة تلوى الأخرى بدون إرجاع في لعبة تتضمن 52 ورقة؟

الحل:هنا الترتيب مهم،وسيتم سحب k=2،من بين n=52،و السحب الواحدة تلوى الاخرى و بدون إرجاع،إذن:

هي **ترتيبة بدون تكرار**:

$$A_{52}^2 = \frac{52!}{(52-2)!}$$

I. **2.2 ترتيبة بتكرار**: و هو كل ترتيب ل(k)عنصر مختارة من بين (n) عنصر الواحدة تلوى الأخرى **مع إرجاع** ،أي يمكن لكل عنصر أن يتكرر أكثر من مرة واحدة.وتحسب عدد الترتيبات في هذه الحالة من خلال العلاقة:

$$\tilde{A} = n.n.n. \ldots. n = n^k$$

✍ **ملاحظة**:

في الترتيبة(سواء كانت بتكرار أو بدون تكرار):

- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ السحب يكون الواحدة تلوى الأخرى(بإرجاع أو بدون إرجاع).

I. **3.التبديلة(Permutation)**: و نميز هنا ما بين:

I. **1.3 تبديلة بدون تكرار(بدون إرجاع)**: و هي حالة خاصة من الترتيبات بدون تكرار بحيث أن **n=k**،و تحسب عدد التبديلات من خلال العلاقة:

$P_n = n!$

I. **2.3 تبديلة بتكرار(بإرجاع)**: و هي ترتيبة (n)عنصراً، مقسمة إلى k فئة، ، عدد عناصرها على الترتيب: $n_1, n_2, \dots, n_k$، و تحسب عدد التبديلات في هذه الحالة من خلال العلاقة:

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!.\, n_2! \dots n_k!}$$

مثال:

1- كم من كلمة يمكن تكوينها إنطلاقاً من أحرف كلمة **Gestion؟**

٢ كم من كلمة يمكن تكوينها إنطلاقاً من أحرف كلمة **STATISTIQUE**؟

الحل:

1.عدد الكلمات الممكن تشكيلها إنطلاقا من كلمة **Gestion** هي:

$P_7 = A_7^7 = 7! = 5040$

2.عدد الكلمات الممكن تشكيلها إنطلاقا من كلمة **STATISTIQUE** هي:

$$P_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3!2!2!} = 1663200$$

T تتكرر 3 مرات، **S** تتكرر 2 مرة،**I** تتكرر 2 مرة.

✍**ملاحظة**: في التبديلة(سواء كانت بتكرار أو بدون تكرار):

- ✓ الترتيب مهم.
- ✓ السحب يكون الواحدة تلوى الأخرى(بإرجاع أو بدون إرجاع).
- ✓ **n=k**(ترتيب كل العناصر)

و يمكن تلخيص التحليل التوافقي في الجدول الموالي:

الجدول(2-1):التحليل التوافقي أو العاملي)

السحب بإرجاع أو بدون إرجاع	دفعة واحدة	الواحدة تلوى الأخرى
بالإرجاع	/	ترتيبة بتكرار:k<n تبديلة K=n $\tilde{A} = n.n.n. .... n = n^k$ بتكرار $P_n^{n1,n2,...,nk} = \frac{n!}{n_1!.n_2!...n_k}$
بدون إرجاع	توفيقة $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	ترتيبة بدون تكرار:k<n $A_n^k = \frac{n!}{!(n-k)!}$ تبديلة بدون تكرار n=K $P_n = n!$

المصدر: من إعداد الأستاذة بناءا على ما سبق.

ملاحظة: k: عدد العناصر المختارة، n: عدد العناصر الكلية.

I. مفهوم الإحتمال:

تهتم نظرية الإحتمالات بما يسمى بالتجارب العشوائية، و هي التجارب التي يمكن حصر نتائجها مسبقا و لكن لا يمكن الجزم ماذا ستكون النتيجة.فمثلا إذا ألقينا قطعة زهرة النرد،فإننا نعلم مسبقا أن النتائج الممكنة لهذه التجربة قد تكون: 1أو2أو 3أو4أو5أو6، و لكن لا يمكن الجزم على أي رقم سيكون هو المحصل عليه.و إذا ألقيا قعة نقود،فإنه نعلم مسبقا أننا سنتحصل إما على وجه الصورة أو وجه الكتابة ، و لكن لا نستطيع الجزم مسبقا على أنها صورة أو كتابة.

II. مبادئ الإحتمالات:

من أهم مبادئ الإحتمالات:

II. 1.2 **التجربة العشوائية**:و هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتيجتها مسبقا قبل إجرائها.

II. 2.2**فضاء العينة**(Ω):و هو مجموعة من النقاط التي تمثل جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية،بحيث كل نتيجة تمثل بنقطة في فضاء العينة.

مثال:- رمي قطعة نقود مرة واحدة ،إذن: $\Omega=\{F ،P\}$ بحيث أن : FACE: F ،PILE :P

- رمي قطعتي نقود في آن واحد، إذن: $\Omega=\{PP، FF، FP،PF\}$

II. 3.2 **الحدث**(**A**): و هو نقطة أو عدة نقاط من فضاء العينة(نتيجة ممكن الحصول عليها)،و نميز ما بين عدة أنواع من الحوادث:

أ. **الحدث الأكيد**:يقع دائما عند القيام بالتجربة(أكيد حدوثه). **فمثلا**: سحب كريات حمراء من صندوق يحتوي على كريات حمراء فقط،يعتبر حدثا أكيدا.

ب. **الحدث المستحيل**:و هو عكس الحدث الأكيد أي لا يمكن حدوثه أبداعند القيام بالتجربة. **فمثلا:** سحب كريات سوداء من صندوق يحتوي على كريات بيضاء فقط ،يعتبر حدثا مستحيلا.

ت. **الحدث العشوائي**:و هو الحدث الممكن وقوعه عند القيام بالتجربة.**فمثلا**:سحب كريات حمراء من صندوق يحتوي على كريات حمراء و بيضاء ،فممكن الحصول على كريات حمراء و ممكن لا.

ث. **الحوادث المتنافية**: نقول عن حدثان(A) و (B) أنهما متنافيان إذا استحال وقوعهما معا في آن واحد أي : $A\cap B=\phi$ و العكس صحيح في حالة الحوادث الغير متنافية.

فمثلا: في امتحان ،تم طرح مجموعة من الأسئلة على الطلبة ،ليكن الحدث (A):الجواب الصحيح، و الحدث(B) :الجواب الخطأ.فلا يمكن أن يقع الحدثان معا في هذه الحالة في آن واحد،فإما أن يكون الجواب صحيحا أم خاطئا.

ج. **الحوادث المستقلة**:نقول عن حدثان (A) و (B) ،هما مستقلان،إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الثاني، و العكس صحيح بالنسبة للحوادث الغير مستقلة.

II. 3.حساب الإحتمالات:

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}}$$

✍**ملاحظة**: يتم حساب عدد الحالات الملائمة و الكلية من خلال استعمال التحليلي التوافقي.

➢ **خواص**:

- ✓ $\forall A\in\Omega \quad n\le N$ ،$0\le P(A)\le 1$
- ✓ $PP(A)=1$،$(n=N$: الحدث الأكيد$)$
- ✓ $(A)=0$،$(n=0$: الحدث المستحيل
- ✓ $P(A)+P(\overline{A})=1$، بحيث أن$(\overline{A})$: الحدث العكسي.
- ✓ $P(\phi)=0$
- ✓ $\sum p(A)=1$

✓ $P(\Omega)=1$

➢ **قوانين الإحتمالات:**

أ. **الجمع(الإتحاد$\cup$)**:ليكن (A) و (B) حدثان، فإن:

✓ **إذا كان (A) و (B) متنافيان:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

✓ **إذا كان (A) و (B) غير متنافيان:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ب. **الضرب(التقاطع$\cap$):** ليكن (A) و (B) حدثان، فإن:

✓ **إذا كان (A) و (B) مستقلان:**

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

✓ **إذا كان (A) و (B) غير مستقلان:**

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \setminus A)$$

$$P(A \cap B) = P(B).P(A \setminus B)$$

II. 4.الإحتمالات الشرطية(Les Pprobabilités Conditionelles):

إذا كان الحدثان (A) و (B) غير مستقلان،أي وقوع احدهما يؤثر فقي وقوع الثاني ،فإن إحتمال وقوع الحدث(A) علما أن الحدث (B)وقع يسمى احتمال شرطي: $\boldsymbol{P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$ بحيث أن: $P(B)>0$

مثال:

يمثل الجدول المقابل التوزيع الإحتمالي لتجربة رمي زهرة النرد:

A	0	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(A)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

و ليكن الحدث (B):الحصول على عدد زوجي

فما هو احتمال وقوع الحدث(A) علما أن (B)وقع؟؟

الحل $$\boldsymbol{P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

حساب(P(B): الحدث(B) هو الحصول على عدد زوجي أي القيم الملائمة هي 2أو4أو6،و بالتالي :

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

حساب$P(A\cap B)$:

- ✓ A: الحصول على 1 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\cap B) = P(\phi) = 0}$
- ✓ A: الحصول على 2 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\cap B) = 1/6}$
- ✓ A: الحصول على 3و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\cap B) = P(\phi) = 0}$
- ✓ A: الحصول على 4 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\cap B) = 1/6}$
- ✓ A: الحصول على 5 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\cap B) = P(\phi) = 0}$
- ✓ A: الحصول على 6 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\cap B) = 1/6}$

حساب$P(A\backslash B)$:

- ✓ A: الحصول على 1 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{1/2} = 0}$
- ✓ A: الحصول على 2 و B:الحصول على عدد زوجي $P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$
- ✓ A: الحصول على 3 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{1/2} = 0}$

✓ A: الحصول على 4 و B:الحصول على عدد زوجي $P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$

✓ A: الحصول على 5 و B:الحصول على عدد زوجي $\boldsymbol{P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{1/2} = 0}$

✓ A: الحصول على 4 و B:الحصول على عدد زوجي $P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3$

II. 5.نظرية الإحتمالات الكلية و نظرية بايز(Bayes):

II. 1.5. نظرية الإحتمالات الكلية:

$$\forall A_1, A_2, \dots\dots\dots A_n \in \Omega$$

فإن إحتمال أي حدث(B) من (Ω) هو :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \setminus A_i) \cdot P(A_i)$$
$$= P(B \mid A_1) \cdot P(A_1) + P(B \mid A_2) \cdot P(A_2) + \dots\dots\dots P(B \mid A_n) \cdot P(A_n)$$

II. 2.5 نظرية بايز(Bayes):

$$\forall A_k \in \Omega\,, (k = 1,2, \dots . n\,)$$

$$P(B) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(B\backslash A_k).P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(B\backslash A_i).P(A_i)}$$

مثال:

يذهب موظف إلى عمله مستخدما إحدى الوسائل التالية :الحافلة،السيارة،القطار بنسب مئوية :60%،30%،10% من الأيام على الترتيب.فإذا كان إحتمال أن يتأخر عن عمله إذا إستخدم الحافلة هو 15% من الأيام، و إذا إستخدم السيارة 8% ، و إذا إستخدم القطار 20% من الأيام.

فإذا إخترنا أحد هذه الأيام التي يذهب فيها الموظف إلى عمله عشوائيا:

1. أحسب إحتمال أن يتأخر عن عمله في ذلك اليوم؟

2.إذا كان متأخرا عن عمله في ذلك اليوم، فما إحتمال أن يكون قد إستخدم القطار؟

الحل:

$A \Rightarrow P(A)=0.6$: يستخدم الموظف الحافلة للذهاب إلى عمله

$B \Rightarrow P(A)=0.3$: يستخدم الموظف السيارة للذهاب إلى عمله

$C \Rightarrow P(C)=0.1$: يستخدم الموظف القطار للذهاب إلى عمله

D: أن يتأخر الموظف عن عمله :

$$P(D\backslash A)=0.15,\ P(D\backslash B)=0.08,\ P(D\backslash C)=0.20$$

1. حساب إحتمال أن يتأخر عن عمله في ذلك اليوم:

$$P(D)= P(D\backslash A).P(A)+ P(D\backslash B).P(B)+ P(D\backslash C).P(C)$$

$$=(0.15.0.6)+0.08.0.3)+(0.20.0.1)=0.134(\mathbf{13.4\%})$$

2.إذا كان متأخرا عن عمله في ذلك اليوم، فما إحتمال أن يكون قد إستخدم القطار :

$$P(C\backslash D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(D\backslash C).P(C)}{\boldsymbol{P(D)}}=\frac{(0.2).(0.1)}{0.134}=0.149\ (\mathbf{14.9\%})$$

I. مفهوم المتغير العشوائي المتقطع:

و هو المتغير الذي تختلف قيمته الواحدة تلوى الأخرى بكميات محددة منفصلة (أنظر تعريف المتغير المتقطع في الفصل الأول).

II. التوزيع الاحتمالي المتقطع:

هو عبارة عن جدول يعطي جميع قيم المتغير المتقطع مع جميع الإحتمالات المرفقة له.

III. دالة التوزيع المتجمع(F_x):

دالة التوزيع المتجع هي الدالة التي تلخص أو تجمع التوزيع الإحتمالي ،فهي تعطي إحتمالات ($p(X\leq x_i)$، بحيث أن (x_i) تمثل أي قيمة من قيم المتغير العشوائي (X) في فضاء العينة (Ω).

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)$$

$$x_i \leq x$$

مثال: إذا كانت التجربة العشوائية عبارة عن رمي زهرة النرد فإن:

$$\Omega = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

ليكن (X) متغير عشوائي يمثل القيم الموجودة على أوجه النرد.و توزيعه الإحتمالي معطى فقي الجدول الموالي:

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

المطلوب:أكتب دالة التوزيع المتجمع ؟

الحل:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad Si \quad x_i<1 \\ 1/6 \quad si \quad 1 \le x_i < 2 \\ 2/6 \quad si \quad 2 \le x_i<3 \\ 3/6 \quad si \quad 3 \le x_i<4 \\ 4/6 \quad si \quad 4 \le x_i<5 \\ 5/6 \quad si \quad 5 \le x_i <6 \\ 1 \quad si \quad x_i \ge 6 \end{cases}$$

فمثلا: $P(X\le 2)=P(x=1)+P(x=2)=1/6+1/6=2/6$

- **خصائص دالة التوزيع المتجمع:**

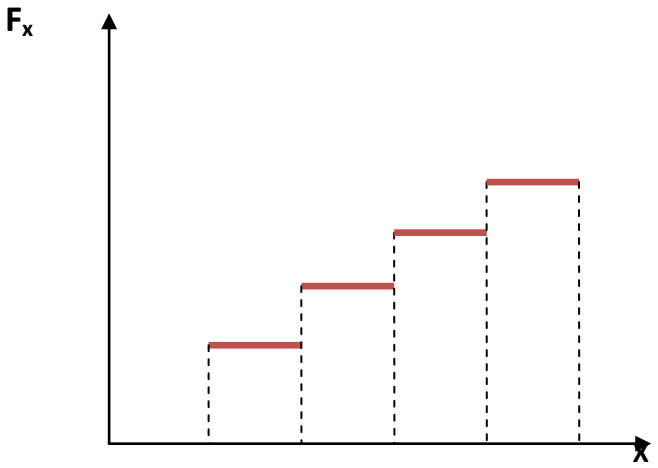
١. $0\le F_x \le 1$

٢. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

٣. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$

٤. دالة التوزيع المتجمع دالة موجبة غير تنازلية.

- **التمثيل البياني لدالة التوزيع المتجمع:**



✍ **ملاحظة**:دالة التوزيع المتجمع في حالة المتغير المتقطع تكون على شكل درج.

IV. التوقع الرياضي و التباين:

IV. 1.التوقع الرياضي E(X):

هو الوسط أو المتوسط الحسابي لكل القيم $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$

الممكنة ل (X) مرجحة بإحتمالاتها،و يحسب من خلال العلاقة :

➢ **خصائصه:**

١. ليكن(a) و (b) ثوابث،و (X) متغير عشوائي:

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

٢. ليكن (X) و (Y) متغيران عشوائيان:

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

IV. 2. التباين(V(X)):

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

بحيث أن:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 P(X = x_i)$$

➢ **خصائصه:**

١. $$V(aX) = a^2 V(X)$$

٢. $$V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$$

V. التوزيعات الإحتمالية المتقطعة الشهيرة:

V. 1.التوزيع ذي الحدين(التثائي): X ⟿ B(n ,p)

❖ يستعمل في حالة:

✓ الأحداث المستقلة.

✓ تؤول كل محاولة إلى نتيجة واحدة من بين نتيجتين متنافيتين.

✓ تعاد التجربة (n)مرة.

❖ توزيعه الإحتمالي:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

بحيث أن: p: إحتمال حدوث (X).

q:إحتمال عدم حدوث (X).

✍ ملاحظة: $p+q=1$

❖ توقعه و تباينه:

$$E(X)=n.p$$

$$V(X)=n.p.q$$

مثال :

إحتمال إصابة شخص بالزكام هو 0.6،لنعرف المتغير العشوائي(X) الذي يمثل عدد المصابين بالزكام من بين 50 شخص.

١. ما هو التوزيع الإحتمالي ل (X)؟

٢. ما هي القيمة المتوسطة لعدد المصابين بالزكام؟

الحل:

(X):عدد المصابين بالزكام ،خاضع للتوزيع ذي الحدين أو الثنائي : $X \curvearrowright B(50, 0.6)$

لأن: نتيجة واحدة من بين اثنين ،فإما يكون الشخص مصابا أو غير مصاب.

١. **توزيعه الإحتمالي:**

$$X\epsilon \left\{0,1,2,3,.....,50\right\}$$

$$P(X=k)=C_{50}^{k}0.6^{k}0.4^{50-k}$$

٢. **القيمة المتوسطة لعدد المصابين** $E(X) = 50.0.6 = 30$

بالزكام:

V. 2.التوزيع البواسوني: $X \curvearrowright P(\lambda)$

❖ يستعمل في حالة:

✓ إيجاد الإحتمال في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة(مرتبط بالزمن:ساعة أو ثانيةن أو دقيقة،.....)أي منسوب لوحدة زمنية.

✓ هو توزيع الحوادث النادرة

✓ إحتمال تحقيق الحدث صغير جدا($P(A) \leq 0.1$).

✓ تعاد التجربة عدد كبير من المرات.

❖ توزيعه الإحتمالي:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

بحيث أن: λ:متوسط التوزيع.($\lambda \geq 0$)

e =2.7182

❖ توقعه و تباينه:

$$\begin{cases} E(X) = \lambda \\ V(X) = \lambda \end{cases}$$

مثال:

تدخل سيارات بمعدل 4 سيارات كل ساعة.ليكن (X) المتغير العشوائي الذي يمثل عدد السيارات التي دخلت المرآب كل ساعة.

١. أوجد التوزيع الإحتمالي ل (X)؟

٢. أحسب التباين؟

الحل:

IV. X:عدد السيارات التي دخلت المرآب كل ساعة،خاضع للتوزيع البواسوني : X P(λ=4)

لأنه : منسوب لوحدة زمنية:الساعة.

λ: متوسط التوزيع (المعدل) و تساوي 4 (حسب المعطيات)

١. التوزيع الإحتمالي:

$$X\epsilon \ \{\ 0,1,2,3,\ldots\ldots,n\}$$

$$\boldsymbol{P(X=k)=e^{-4}\frac{4^k}{k!}=(2.71)^{-4}\frac{4^k}{k!}}$$

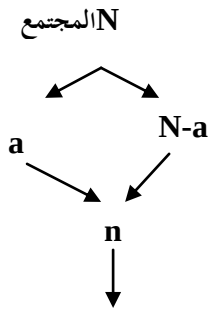
٢. تبانه:

$$V(X)=\lambda=4$$

V. 3. التوزيع الفوق هندسي(الهندسي الزائدي):

X ⬏ H(N,n,a,N-a)

❖ يستعمل في حالة:



ليكن(X) متغير عشوائي يمثل() في العينة

- ✓ التجارب أو الأحداث الغير مستقلة.
- ✓ السحب بدون إرجاع.

❖ توزيعه الإحتمالي:

$$P(X=k)=\frac{C_a^k C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n}$$

❖ توقعه و تباينه:

$$E(X)=n.\frac{a}{N}$$

$$V(X)=n.\frac{a}{N}\cdot\frac{N-a}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}$$

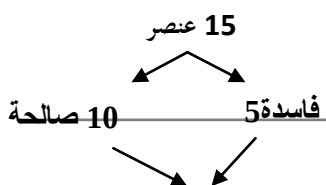
ملاحظة :

$\frac{N-n}{N-1}$: يسمى معامل الشمولية(Coefficient d'Exhaustivité)، و عندما تكون (n) صغيرة جدا مقارنة مع (N)،فإنه يؤول إلى الواحد(1).

مثال:يحتوي صندوق على 10عناصر صالحة و 5 فاسدة،نسحب منهم بالصدفة 7 عناصر .لنعرف المتغير العشوائي (X)الذي يمثل عدد العناصر الصالحة المحصل عليها.

١. أوجد التوزيع الإحتمال ل (X)؟

٢. أحسب القيمة المتوسطة لعدد العناصر الصالحة المحصل عليها؟



الحل:

(X) خاضع للتوزيع الفوق هندسي: $H(15,7,10,5)$ X

1. **التوزيع الإحتمالي:**

ليكن (X)الذي يمثل عدد العناصر الصالحة المحصل عليها. المحصل عليها

$$X \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$P(X=k)=\frac{C_{10}^{k}C_{5}^{7-k}}{C_{15}^{7}}$$

٣. **القيمة المتوسطة:**

$$E(X)=n.\frac{a}{N}=7.\frac{10}{15}=4.66\approx 5$$ صع

و يمكن تلخيص التوزيعات الإحتمالية المتقطعة الشهيرة في الجدول التالي:

اسم ورمز القانون	طبيعة المتغير x	صيغة القانون	الأمل الرياضي $E(X)$	التباين $V(X)$
برنولي $B(n,p)$ $(0<p<1)$	X متغير عشوائي منفصل يعكس نتائج تجربة برنولي ويأخذ القيمتين 0 أو 1 (1 يعني أن نتيجة التجربة هي النتيجة التي تهمنا أي نجاح، و0 يعني أن النتيجة لا تهمنا أي فشل).	$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$ $\Omega_x=\{0,1\}$	p	$p(1-p)$
ثنائي الحدين $B(n,p)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة مستقلة عن بعضها البعض (السحب مع الإرجاع)	$P(X=x)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$ $\Omega_x=\{0,1,\dots\dots\dots,n\}$	np	$np(1-p)$
فوق الهندسي $H(N,n,p)$ $N=N_1+N_2$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة غير مستقلة عن بعضها البعض (السحب دون الإرجاع)	$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^x C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$ $\Omega_x=\{0,1,\dots\dots\dots,n\}$	np	$np(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
بواسون $P(\lambda)$ $(\lambda>0)$	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات تحقق حدث معين خلال فترة زمنية معينة.	$P(X=x)=e^{-\lambda}.\frac{\lambda^x}{x!}$ $\Omega_x=\{0,1,\dots\dots\dots,\infty\}$	λ	λ

VI. التقريبات بين التوزيعات الإحتمالية المتقطعة الشهيرة:

VI. 1.تقريب التوزيع ذي الحدين بالتوزيع البواسوني:

إذا كان حجم المجتمع (N) كبير،يمكن تقدير توزيع ذي الحدين بالتوزيع البواسوني، و ذلك عند توفر الشروط التالية:

- ✓ P(إحتمال حدوث X) يقترب من 0 أي صغير جدا (P<0.05).
- ✓ $n \leq 30$.

VI. 2. تقريب التوزيع الفوق هندسي(الزائدي) بالتوزيع ذي الحدين:

إذا كان حجم المجتمع (N) كبير بالمقارنة مع(n) ، بحيث لا يوجد فرق بين التجربة بدون إعادة أو مع الاعادة ، فإنه يمكن تقدير توزيع الفوق هندسي بالتوزيع ذي الحدين، و ذلك عند توفر الشروط التالية:

- N>50 ✓
- $\frac{n}{N} \leq 0.1$ ✓

I. مفهوم المتغير العشوائي المستمر:

- ✓ المتغير العشوائي المستمر، هو المتغير الذي يأخذ قيما ما بين حدين (على شكل مجال)
- ✓ إذا كانت دالة التوزيع المتجمع ،مستمرة و قابلة للإشتقاق، نقول أن المتغير العشوائي مستمر.

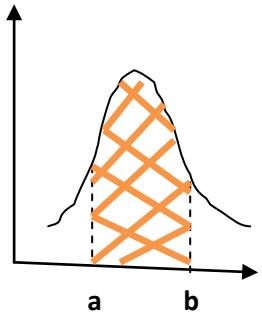
II. دالة التوزيع المتجمع و دالة كثافة الإحتمال:

إذا كانت دالة التوزيع المتجمع للمتغير العشوائي (X) قابلة للإشتقاق،فإن دالة كثافة الإحتمال f_X هي عبارة عن المشتقة الأولى لدالة التوزيع المتجمع F_X أي :

$$f_x = F'(x)$$

و هي تحسب بالنسبة للمتغيرات العشوائية المستمرة فقط.و بالتالي فإن: $F_x = \int_{-\infty}^{x} f_x dx$

- ➢ **خواص دالة كثافة الإحتمال:**



١. $f_X \geq 0$

٢. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = 1$

III. التوقع الرياضي و التباين:

III. 1. التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f_x dx$$

III. 2. التباين:

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 f_x dx - \langle \int_{-\infty}^{+\infty} x_i f_x dx \rangle^2$$

IV. قاعدة لايبنيز(Regle de Leibniz)

سميت هذه القاعدة نسبة لمؤسسها Gottfried Wilhelm Leibniz، و تعرف ب " قاعدة لايبينيز"

.

حسب هذه القاعدة فإن كل تكامل من الشكل:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt,$$

حيث أن : $-\infty < a(x), b(x) < \infty$

مشتقته بالشكل التالي:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt\right) = f\big(x,b(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}b(x) - f\big(x,a(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,t)\,dt,$$

تعمل هذه الأخيرة على تعميم قاعدة الضرب في علم التفاضل و التكامل . حيث تلعب مشتقات الاقترانات دورًا أساسيًا في حساب التفاضل والتكامل وتطبيقاتها.

قاعدة لايبنيز العامة، عبارة عن تعميم للمشتقة من الرتبة n لحاصل ضرب اقترانين، وتنص على أنه إذا كان كل من الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$ قابلًا للاشتقاق n من المرات، فإن حاصل ضربهما fg عبارة عن اقتران قابل للاشتقاق أيضًا من المرات، ومشتقته من الرتبة nتُعطى بالعلاقة:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

حيث أن : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$: معامل ذات الحدّين

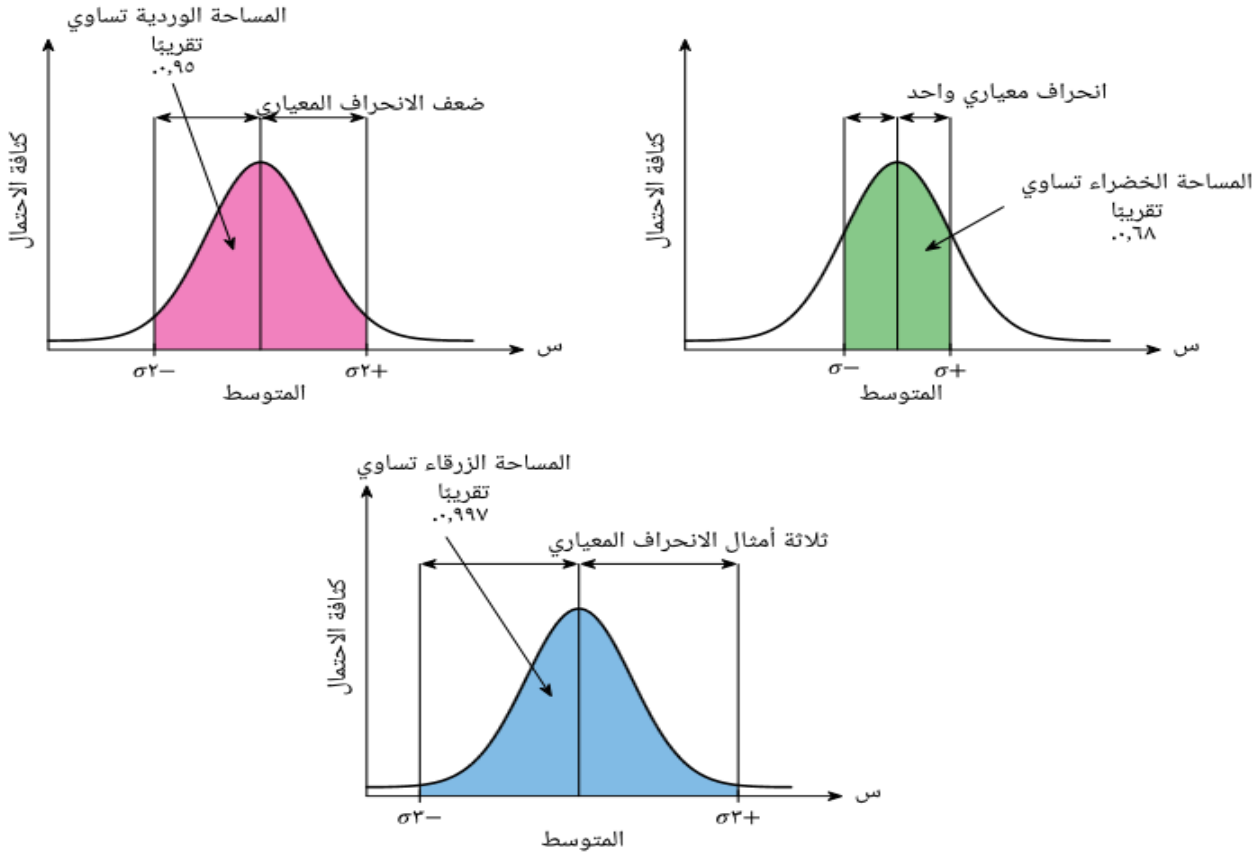
V. التوزيعات الإحتمالية المستمرة الشهيرة:

V. 1.التوزيع الطبيعي Normal Distribution:

في نظرية الاحتمالات، التوزيع الطبيعي ، هو توزيع احتمالي مستمر كثير الانتشار والاستعمال، يستخدم – غالباً – تقريباً أولياً لوصف المتغيرات العشوائية التي تميل إلى التمركز حول قيمة متوسطة وحيدة.

إن شكل منحنى التوزيع الاحتمالي لأي متغير عشوائي طبيعي يأخذ منحنى الجرس. والمساحة الكلية أسفل المنحنى تساوي 1 أو 100٪، وتنطبق قاعدة 68–95–99.7 أيضًا على المساحة أسفل المنحنى ،كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل(5-1):منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الطبيعي



المصدر: https://www.nagwa.com/ar/explainers/378184608718

أ. التوزيع الطبيعي العادي:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المستمرة ، و تأخذ دالة كثافة الإحتمال شكل منحنى متماثل ذو قيمة واحدة ، و يمتد طرفاه إلى ما لا نهاية(∞).فإذا كان (X) متغير عشوائي مستمر(متصل) فإن دالة كثافة إحتماله هي من الشكل :

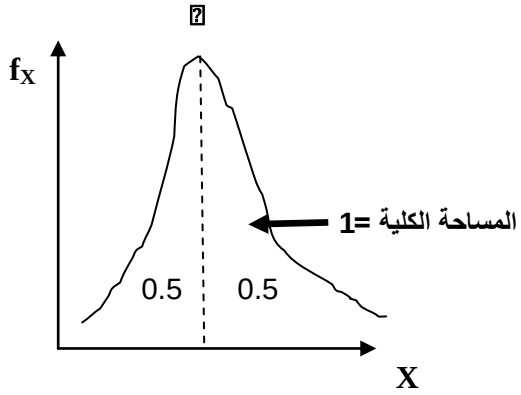
$$f_x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

بحيث أن: ∞-≤X≤∞+

و يكتب على الشكل : $X \curvearrowright N(\mu,\sigma)$، و تقرأ (X) يتبع التوزيع الطبيعي العادي ذو المتوسط μ و الإنحراف المعياري σ

و من خصائص هذا التوزيع، أن دالة كثافة إحتماله تأخذ شكلا متماثلا حول متوسطه(μ)، و إن المساحة تحت منحنى التوزيع تساوي الواحد،كما يوضحه الشكل التالي:

الشكل(5-2):دالة كثافة الإحتمال في التوزيع الطبيعي العادي.



ب. التوزيع الطبيعي القياسي Tأو Z :

نقول أن المتغير العشوائي المستمر يتبع توزيعا طبيعيا قياسيا إذا كان متوسطه $\mu=0$، و إنحرافه المعياري $\sigma_X=1$.

و يكتب على الشكل : $Z \curvearrowright N(0,1)$،

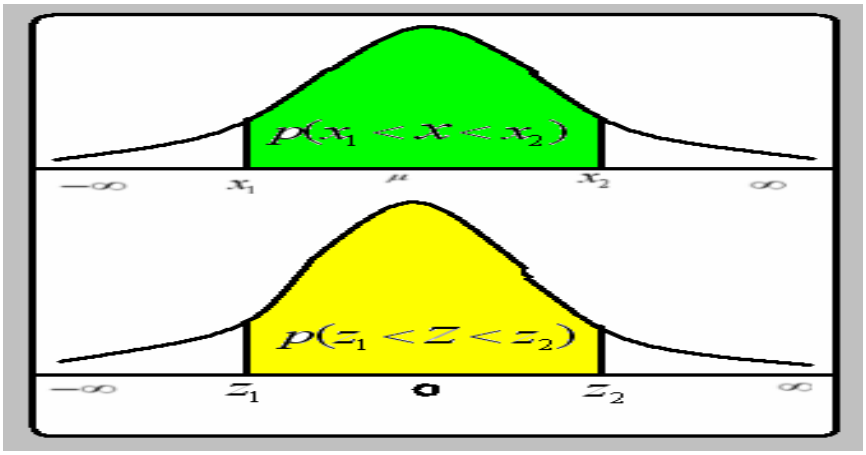
بحيث أن: $$Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

و دالة كثافة إحتماله من الشكل:

$$f_x = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}(X)^2}$$

ملاحظة:

الإنتقال من توزيع طبيعي عادي أو كيفي: $X \curvearrowright N(\mu,\sigma)$، إلى توزيع طبيعي قياسي أو معياري: $N(0,1) \curvearrowright Z$ ، يكون من خلال العلاقة السابقة: $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$



V. 2 توزيع مربع كاي Chi-Square Distribution :

هو توزيع إحتمالي مستمر،و أول من وصف مربع كاي هو العالم Carl Pearson ،

إذا كان المتغير العشوائي المستمر يتبع توزيع **مربع كاي Chi-Square Distribution** $X\sim \chi^2_{(k)}$،

فإن دالة كثافة إحتماله هي:

$$f_x = \frac{1}{2^{(k/2)}\Gamma(k/2)} x^{(\frac{k}{2}-1)} e^{(-\frac{x}{2})}, 0<X<\infty$$

حيث $\Gamma^{\frac{k}{2}}$ **هي** دالة غاما.

k: درجة الحرية

و تعرف دالة التوزيع المتجمع لتوزيع مربع كاي كما يلي:

$$F_x = \frac{\gamma(k/2, x/2)}{\Gamma(k/2)} = P(k/2, x/2)$$

هذا التوزيع هو توزيع موجب، متوسطه الحسابي(توقعه الرياضي) و تباينه :

$$E(\chi^2)=\mu=k$$

$$V(\chi^2)= \sigma^2=2k$$

- **أهم إستعمالات هذا التوزيع:**
  - إختبار تجانس العينات.

- يتم تطبيق هذا التوزيع على المتغيرات الكيفية(الوصفية).
- إختبار الإستقلال للمتغيرات الكيفية.
- اختبار حسن الموافقة او المطابقة (Goodness of fit test)

®**ملاحظة:**

حتى يتم تطبيق توزيع **مربع كاي** بالشكل الصحيح ، يجب أن تكون العينة كبيرة بما يكفي حتى يكون توزيع مربع كاي صحيحًا.

مثال:

ليكن (X) متغير عشوائي يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجات حرية $k=10$.

1.أوجد دالة كثافة الإحتمال لهذا المتغير ؟

2.أحسب $P(X\leq 3.94)$؟

الحل:

$$X\sim \chi^{2}_{(10)}$$

$$f_{x}=\frac{1}{2^{(10/2)}\Gamma(10/2)}x^{(\frac{10}{2}-1)}e^{(-\frac{x}{2})}$$

$$P(X\leq 3.94)=0.95^{*}$$

VI. التقريبات:

VI. 1.تقريب التوزيع ذي الحدين بالتوزيع الطبيعي:

في بعض الأحيان،يصعب حساب احتمال المتغير العشوائي الذي يخضع للتوزيع ذي الحدين (الثنائي)أي $X \rightarrow B(n,p)$، خاصة إذا كان حجم العينة كبيرا(يؤول إلى ∞)،في هذه الحالة نقوم بتقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي.

و ذلك عند توفر الشروط التالية:

*: تم إستخراج القيمة من جدول توزيع مربع كاي (عند درجة حرية n=10)

- ✓ كلما كان حجم العينة (n)كبيرا جدا (يؤول إلى +∞)،كلما كان التقريب أكثر جودة.
- ✓ Pوq (احتمال حدوث x،و احتمال عدم حدوث x) لا تقترب من 0 أو 1(أي تقترب من 0.5).
- ✓ N.p.q ≥5، و n.p≥15.

VI. 2.تقريب التوزيع البواسوني بالتوزيع الطبيعي:

يمكن تقريب التوزيع البواسوني إلى التوزيع الطبيعي ،إذا كانت λ >15.

جدول التوزيع الطبيعي القياسي (أو المعياري)

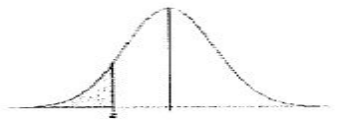


Table A.3 Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جدول التوزيع الطبيعي القياسي (أو المعياري)

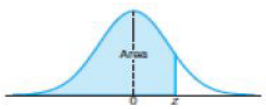
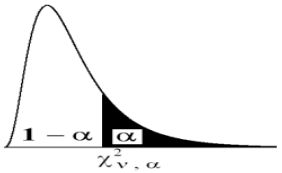


Table A.3 (continued) Areas under the Normal Curve

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول توزيع مربع كاي



Chi-Square (χ^2) Distribution

Degrees of Freedom	Area to the Right of Critical Value									
	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	—	—	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.071	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.299
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.257	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

I. العزوم(les moments) :

تعتبر العزوم من تطبيقات توقع الدالة. و في إطار هذا نميز ما بين نوعين من العزوم: العزوم المركزية و العزوم المرتبطة بالأصل.

و يتم إستخدام العزوم في حساب عدد من المقاييس على غرار: معامل التماثل (coefficient d'asymétrie) ، و معامل التلفطح(Kurtosis ou coefficient d'aplatissement)

I. 1.العزوم المركزية (M_r) Les moments central:.

أ. بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع $M_r = \sum_{+\infty}^{-\infty} p_i [x_i - E(x)]^r$

ب. بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر: $M_r = \int_{+\infty}^{-\infty} [x_i - E(x)]^r f(x) dx_i$

ملاحظات:

- $M_2 = V(X)$ ،**r=2**
- $M_1 = 0$ ،**r=1**
- $M_0 = 1$ ،**r=0**

I. 2.العزوم المرتبطة بالأصل (الإبتدائي)"M_r " :

بشكل عام ...العزمُ المرتبط بالأصل من الدرجة(r)، **لأي متغير عشوائي مستمرا أو متقطعا ، فإن يحسب كما يلي**

$$M_r = E(X^r),$$

بحيث: r=0.1.2.....

و بالتالي:

ت. بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع $M_r = \sum_{i=0}^{1} x_i^r p_i$

ث. بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر :

$$M_r = \int_{+\infty}^{-\infty} X_i{}^r f(x) dx_i$$

ملاحظات:

- إذا كان **r=1** فإن $M_1=E(x)$
- إذا كان **r=0** فإن $M_0=1$

II. الدالة المتجددة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم $\mathcal{M}x(t)$ كما يلي:

$$\mathcal{M}x(t) = E\ (e^{tx})$$

أ. بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع: $\mathcal{M}x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} p(x)$

ب. بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر : $\mathcal{M}x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx_i$

أ ي أن العزم $\mathcal{M}r$;ليس إلا المشتقة من الدرجة r لهذه الدالة بالنسبة إلى " t " ، مع وضع t = 0 في المشتقة المتحصل عليه ا، وهذا ما جعلها دالةً مولدةً للعزوم.

مثال:

إذا كانت الدالة الإحتمالية للمتغير العشوائي X، معطاة على الشكل التالي:

$$P(X) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x\ (1-p)^{n-X} & X=0,1,2,\ldots.n \\ 0 \end{cases}$$

- أوجد الدالة المولدة للعزم للمتغير العشوائي X؟

من خلال تعريف الدالة المولدة للعزم، لدينا:

$$\mathcal{M}x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, p(x)$$

$$= \sum_{0=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-X} = \sum_{0=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^X (1-p)^{n-X}$$

مثال:

إذا كانت القيمة المتوقعة E(X)=3، و كانت الدالة المولدة للعزم :

$$M(t)=\frac{pe^t}{1-e^t+p.e^t}$$

- أوجد قيمة P؟

نقوم بإيجاد المشتقة الأولى ل(M(t، ثم نعوض t=0 في المشتقة الأولى

$$M`(t)=\frac{pe^t}{[1-e^t+p.e^t]^2}$$

$$M`(0)=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$M`(0)=E(X)\Rightarrow \frac{1}{p}=3\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

III. العلاقة بين العزم المركزي و العزم المرتبط بالأصل:

$$\boldsymbol{\mu_r = M_r - C_r^1.M_{r-1}\mu^1 + \dots\dots + (-1)^i C_r^i.M_{r-i}\mu^i + \cdots.. + (-1)^r.M_0.\mu^r}.$$

يمكن أيضا الحصول على العزم المرتبط بالأصل من الدرجة r من خلال اشتقاق الدالة المتجددة للعزوم (r) مرة، بحيث الدالة المتجددة للعزوم هي دالة مرتبطة بالوسيط t بالإضافة إلى ارتباطها بالدالة $f(x)$-كما هو مشار إليه سابقا- :

$$MX(t)=E(etx)$$

إن العلاقة بين العزوم البسيطة(المرتبطة بالأصل) والعزوم المركزية في حالة متغير عشوائي مستمر كما في حالة متغير عشوائي متقطع في حالة $M2,M3,M4$ ، و تعرف ب **صيغة كونيق** :

$$M_2=m2-m_1^2$$

$$M_3=m_3-3m_1m_3+2m_1^3$$

$$M_4=m_4-4m_1m_3+6m_1^2m_2-3m_1^4$$

تمهيد:

تعد نظرية شيبيشيف ونظرية الأعداد الكبيرة من النظريات التي تقيس تشتت المتغيرة و هي من تطبيقات توقع دالة.

I. متراجحة شيبيشيف(Chebyshev's inequality):

هي متراجحة مشهورة ترجع إلى عالم الرياضيات الروسي بافنوتي تشيبيشيف. تلعب دورا مهما في نظرية الاحتمالات والإحصاء. كما أنها تعطي وسيلة للفهم الدقيق لكيفية أن التباين يقيس التغير حول المتوسط للمتغير العشوائي.

إدا علمنا التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (X) فإنه يمكننا تحديد تباينه V(x) و متوسطه μ= E(x) ، و لكن العكس غير صحيح إذ أنه من غير الممكن إيجاد التزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي بمجرد معرفة تباينه و متوسطه، و بالتالي فإنه من غير الممكن حساب الإحتمالات لهذا التوزيع في هذه الحالة. إلا أنه هناك إمكانية لحساب حد أعلى (أو حد أدنى) لهذه الاحتمالات وذلك باستخدام **متباينة شيبيشيف**.

إذا كان X متغيرا عشوائيا وسطه μ وتباينه V(x)= σ2 فإنه لأي عدد موجب k تكون:

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

مثال:

إذا كان أطوال مجموعة من المراهقين يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 170 سم مع انحراف معياري 8سم.

استخدم متباينة شيبيشف لإيجاد حد أعلى لاحتمال أن يكون أحد المراهقين أطول أو أقصر بـ 12سم من المتوسط.

الحل:

إعتمادا على متراجحة شيبيشيف $\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$

$$P(|X-170| \geq 8K) \leq 1/ (K^2)$$

بوضع K=1.5، تصبح المتراجحة:

$$P(|X-170| \geq 12) \leq 1/ (1.5^2)$$

$$P(|X-170| \geq 12) \leq 0.44$$

من خلال جدول التوزيع الطبيعي سنجد أنها تساوي 0.13

® **ملاحظات"**:

- ✓ إن إستعمال هذه المتراجحة ،لا يستدعي بالضرورة معرفة طبيعة قانون التوزيع الإحتمالي ، إذ تعد معرفة قيمة التباين $V(X)= \sigma 2$ و المتوسط $E(X)=\mu$ كافية لذلك.
- ✓ عندما يكون حجم العينة صغيرا($N<30$)، و التوزيغ غير طبيعي فيجب لإستخدام هذه المتراجحة.
- ✓ هذه المتراجحة لا تساعدنا على إيجاد الإحتمال ، و إنما تساعدنا فقط على إيجاد حد أعلى له.
- ✓ تكون متراجحة شيبيشيف مفيدة فقط إذا كانت k كبير نسبيا.

II. نظرية الأعداد الكبيرة:

تعد نظرية الأعداد الكبيرة إحدى النظريات المهمة في نظريات الإحصاء الرياضي عامة و نظرية الإحتمالات على وجه الخصوص، فهي عبارة عن نظرية تصف نتيجة تكرار نفس التجربة عددًا كبيرًا من المرات. بحيث تنص هذه نظرية على أنه في حالة تكرار نفس التجربة أو الدراسة بشكل مستقل لعدد كبير من المرات ، يجب أن يكون متوسط نتائج التجارب قريبًا من القيمة المتوقعة

القيمة المتوقعة (Expected Value) (أو التوقع ، أو المتوسط) هو متوسط قيمة المدى الطويل للمتغيرات العشوائية. و تصبح النتيجة أقرب إلى هذه القيمة المتوقعة مع زيادة عدد المحاولات.

حسب قانون الأعداد الكبيرة فإن التردد النسبي لحادثة عشوائية يقترب أكثر فأكثر من احتمالها النظري مع ازدياد عدد مرات إعادة التجربة العشوائية.

مثال : أبسط تجربة عشوائية هي تجربة رمي زهرة النرد.

عند رمي زهرة النرد، لدينا ستة أحداث مختلفة باحتمالات متساوية. القيمة المتوقعة لهذه الأحداث هي:

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(X=x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

إذا رمينا النرد مرتين فقط ، فقد يكون متوسط النتائج التي تم الحصول عليها بعيدًا عن القيمة المتوقعة.

فوفقًا لقانون الأعداد الكبيرة ،كلما رمينا النرد عددًا كبيرًا من المرات ، فإن متوسط النتيجة سيكون تكون أقرب إلى القيمة المتوقعة (3.5)

أعمال موجهة في الإحصاء 2

تمهيد:

يحتل تدريس مقياس الإحصاء الرياضي مكانة مميزة في مختلف برامج التكوين خاصة في مجال العلوم الإقتصادية،التجارية و علوم التسيير، كونه أحد أهم العناصر الرئيسية في أي عمل إداري أو مؤسسي ، كما يساعد الطلاب على إتخاذ القرارات السليمة من خلال الدراسة و التحليل الصحيح للبيانات فيما يخص طريقة أخد العينات و معرفة مبادئ الإحتمالات، كما له دور كبير في الدراسات العليا، و الأبحاث العلمية و الدراسات الإجتماعية.

يعتبر هذا الجزء من المطبوعة دعما للجزء الأول منها، و الذي إشتمل على مجموعة من التمارين لكل فصل مدعمة بالحل المفصل لهذه التمارين.لتكون بمثابة دعم للطالب على إكتساب قاعدة متينة لفهم المقياس.

القائمة 1: نظرية المجموعات

Set Theory

التمرين الأول:

رمينا قطعة نقود مرتين متتالية .

المطلوب:

1 -أكتب مجموعة النتائج الممكنة Ω.

٢ -أكتب المجموعات التالية :

A. ظهور صورة في الرمية الأولى

B. ظهور صورة واحدة على الأقل

C. ظهور كتابة في الرميةالأولى وصورة في الرمية الثانية.

3. أوجد (AuC) و $A \cap B$ و (A-B)

الحل:

1. مجموعة النتائج الممكنة Ω

Ω= {PF, FP, PP, FF}

2.أكتب المجموعات التالية:

A= {FP, FF}

B= {FP, PF, FF}

C= {PF}

3.(AuC) و A∩B و (A-B):

AuC={ FP, FF, PF}

A∩B= {FP,FF}

$A-B=\emptyset$

التمرين الثاني:

لتكن $\Omega=\{1,2,.....,8, 9\}$

$A=\{2, 4, 6, 8\}$

$B=\{1, 2, 3, 4\}$،

$C=\{3, 4, 5, 6\}$.

أوجد كل من المجموعات التالية:

1. أوجد: $\overline{A}$
2. $C\cap A$
3. $\overline{(C\cap A)}$
4. AUB
5. $\overline{(A\cap B)}$

الحل:

$$C\cap A = \{4, 6\}$$

$$\overline{(C\cap A)}= \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$$

$$AUB= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

التمرين الثالث:

خلال عملية إستقراء ل 60 شخصا حول الجرائد اليومية التي يقرأونها من بين جريديتين (الخبر ، المجاهد) ، تم التحصل على النتائج التالية:

45 شخصا يقرأون جريدة الخبر.

30 شخصا يقرأون جريدة المجاهد.

05 لا يقرأون هذه الجريدتين إطلاقا

المطلوب:

1.ما هو عدد الأشخاص الذين يقرأون جريدة واحدة على الأقل من بين هذه الجريدتين؟

2.ماهو عدد الأشخاص الذين يقرأون الجريدتين معا؟

3.ما هو عدد الأشخاص الذين يقرأون جريدة الحبر فقط؟

الحل:

المعطيات:

$\Omega=60$

$A \Rightarrow A=45$: عدد الأشخاص الذين يقرأون جريدة الخبر

$B \Rightarrow B=30$: عدد الأشخاص الذين يقرأون جريدة المجاهد

$$\bar{A} \cap \bar{B} = 5$$

1ما هو عدد الأشخاص الذين يقرأون جريدة واحدة على الأقل من بين هذه الجريدتين:

$AUB=\Omega-(\bar{A} \cap \bar{B})=60-5=55$شخصا

2ماهو عدد الأشخاص الذين يقرأون الجريدتين معا:

$A \cap B=A+B-(AUB)=45+30-55=20$شخصا

3.ما هو عدد الأشخاص الذين يقرأون جريدة الحبر فقط:

$A \cap \bar{B} = A - (A \cap B)=45-20=25$ **شخصا**

التمرين الرابع:

بعد عملية المداولات النهائية لنتائج مستوى السنة الأولى جذع مشترك ل.م.د بكلية الإقتصاد لأحد الجامعات، تقرر أن 100 طالب سيعيدون السنة ،بحيث:

42 طالب سيعيدون مقياس الرياضيات.

55 طالب سيعيدون مقياس الإحصاء،

30 لا يعيدون و لا مقياس من هذين المقياسين (يعيدون مقاييس أخرى)

المطلوب:

1.ما هو عدد الطلبة الذين سيعيدون مقياس واحد على الأقل من بين هذين المقياسين؟

2. ما هو عدد الطلبة الذين سيعيدون المقياسين معا؟

3.ما هو عدد الطلبة الذين يعيدون مقياسا واحدا فقط من بين هذين المقياسين؟

الحل:

المعطيات:

$\Omega=100$

$M \Rightarrow M=42$: الطلبة الذين سيعيدون الرياضيات

$S \Rightarrow S=55$: الطلبة الذين سيعيدون الإخصاء

$$\bar{M} \cap \bar{S}=30$$

1.عدد الطلبة الذين سيعيدون مقياس واحد على الأقل من بين هذين المقياسين :

$MUS= \Omega-(\bar{M} \cap \bar{S})=100-30=70$ طالب

2.عدد الطلبة الذين سيعيدون المقياسين معا:

$M \cap S=M+S-(MUS)=42+55-70=27$ طالب

3.عدد الطلبة الذين يعيدون مقياسا واحدا فقط من بين هذين المقياسين:

$$(\mathrm{M} \cap \overline{S}) \cup (\overline{M} \cap S) = [M - (M \cap S)] \cup [S - (M \cap S_] = (42 - 27) + (55 - 27) = 43$$ **طالب**

القائمة 2: التحليل العاملي أو التوافقي

Combinatorial analysis

التمرين الأول:

يتكون فوج من 5 رجال و 8 نساء ،نختار عشوائيا 6 أشخاص .

١. كم لجنة يمكن تكوينها؟
٢. كم لجنة مكونة من رجلين ينتميان إلى الفوج يمكن تشكيلها؟
٣. كم لجنة مكونة من 5 نساء يمكن تشكيلها؟
٤. كم لجنة مكونة من 5 رجال و1 نساء من الفةوج يمكن تشكيلها؟

الحل:

١. عدد اللجان الممكن تكوينها:

$$C_{13}^{6} = \frac{13!}{6!\,(13-6)!} = \frac{13!}{6!\,7!} = 1716 \text{ لجنة}$$

٢. عدد اللجان المكونة من رجلين ينتميان إلى الفوج التي يمكن تشكيلها:

$$C_{5}^{2} \cdot C_{8}^{4} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} \cdot \frac{8!}{4!\,(8-4)!} = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{8!}{4!\,4!} = 25200 \text{ لجنة}$$

٣. عدد اللجان المكونة من 5 نساء ينتمين إلى الفوج التي يمكن تشكيلها:

$$C_{8}^{5} \cdot C_{5}^{1} = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} \cdot \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = \frac{8!}{5!\,3!} \cdot \frac{5!}{1!\,4!} = 1120 \text{ لجنة}$$

عدد اللجان المكونة من 5رجال و 1 نساء ينتمون إلى الفوج التي يمكن تشكيلها:

$$C_{5}^{5} \cdot C_{8}^{1} = \frac{5!}{5!\,(5-5)!} \cdot \frac{8!}{1!\,(8-1)!} = \frac{5!}{5!\,0!} \cdot \frac{8!}{1!\,7!} = 8 \text{ لجان}$$

التمرين الثاني:

أراد أحد الأشخاص عمل رقم سري لحساب بريده الإلكتروني(الإيميل)، بحث يحتوي على 4 أرقام مختلفة على اليسار و 4أحرف لاتينية مختلفة على اليمين:

١. كم رقما سريا يمكن تشكيله بهذه الطريقة.؟
٢. كم رقما سريا يحتوي على 3 أرقام مختلفة يمكن تكوينه؟
٣. كم رقما سريا يحتوي على 2 أحرف مختلفة يمكن تكوينه؟

الحل:

يوجد 10 أرقام نختار منهم (0,1,2,….9) و يوجد 26 حرف لاتيني نختار منه(a,b,c,d,……z)

١. عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها بهذه الطريقة:

$$\boldsymbol{A_{10}^{4} \cdot A_{26}^{4}} = \frac{10!}{(10-4)!} \cdot \frac{26!}{(26-4)!} = 1.80 \cdot 10^{9}$$

٢. عدد الأرقام السريّة الممكن تكونها بحيث يحتوي على 3 أرقام مختلفة :

$$\boldsymbol{A_{10}^{3} \cdot A_{26}^{5}} = \frac{10!}{(10-3)!} \cdot \frac{26!}{(26-5)!} = 5.68 \cdot 10^{9}$$

٣. عدد الأرقام السريّة الممكن تكونها بحيث يحتوي على 2 أحرف مختلفة:

$$\boldsymbol{A_{26}^{2} \cdot A_{10}^{6}} = \frac{26!}{(26-2)!} \cdot \frac{10!}{(10-6)!} = 98280000$$

التمرين الثالث:

في إطار تنظيم مسابقة للفروسية من قبل أحد النوادي في منطقة معينة،ترشح ((20 متسابق.

قامت الهيئة المنظمة للتظاهرة بترقيم الخيول بأرقام مختلفة من ① إلى ⑳، على أن يتم في الأخير تكريم 5 فائزين الأوائل على الترتيب.

١. ما هو عدد الحالات الممكنة لذلك؟

٢. ما هو عدد الحالات الممكنة لأن الحصان رقم ④، يفوز و يحتل المرتبة الأولى.

الحل:

1. ما هو عدد الحالات الممكنة لذلك

$$\boldsymbol{A_{20}^{5}} = \frac{20!}{(20-5)!} = 1860480$$

2. ما هو عدد الحالات الممكنة لأن الحصان رقم ④، يفوز و يحتل المرتبة الأولى:

$$\boldsymbol{A_{1}^{1} \cdot A_{19}^{4}} = 1 \cdot \frac{19!}{(19-4)!} = 93024$$

التمرين الرابع:

1.كم كلمة يمكن تشكيلها من كلمة STATISTIQUE؟

2.كم كلمة يمكن تشكيلها من كلمة GESTION؟

3.بكم طريقة يمكن ل 10أشخاص الجلوس على 10مقاعد مختلفة الواحد تلوى الآخر على الترتيب؟

الحل:

1. عدد الكلمات الممكن تشكيلها:

$$\boldsymbol{\widetilde{P}_{n}^{n_1,n_2,\ldots,n_k}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{n_1!.\, n_2! \ldots n_k!}}$$

$$\tilde{P}_{11}^{2\ 3,1,2,1,1,1} = \frac{11!}{2!\,.3!\ 1!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!} = 1663200 \text{ كلمة}$$

2. عدد الكلمات الممكن تشكيلها:

$$\mathbf{P_n = n!}$$

$$\mathrm{P_n} = 7! = 5040 \text{ كلمة}$$

.3

$$\mathbf{P_n = n!}$$

$$\mathrm{P_n} = 10! = 3628800$$

التمرين الخامس:

من أجل تزويد إحدى المستشفيات بكمية معينة من الدم،تم سحب عشوائيا 05 أسماء من قائمة تحتوي على 15 شخص قاموا بتسجيل أنفسهم من أجل التبرع، موزعين كما يلي: 10 أشخاص لديهم فصيلة الدم " O^+"، أما الباقي لديهم ة فصائل دم أخرى .

1. ما هو عدد القوائم الممكن تكوينها في هذه الحالة؟

2. ما هو عدد القوائم الممكن تكوينها من 3 أشخاص ذوي الفصيلة الدم "O^+"؟

3. ما هو عدد القوائم الممكن تكوينها بحيث لا تحتوي على أي شخص ذو الفصية الدم "O^+"؟

الحل:

1. عدد القوائم الممكن تكوينها في هذه الحالة:

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!\,(15-5)!} = \frac{15!}{5!\,10!} = 3003$$

2. ما هو عدد القوائم الممكن تكوينها من 3 أشخاص ذوي الفصيلة الدم "O^+":

$$C_{10}^{3} C_{5}^{2} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} \cdot \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = (120).(10) = 1200$$

3. عدد القوائم الممكن تكوينها بحيث لا تحتوي على أي شخص ذو الفصية الدم "O^+":

$$C_{10}^{0} C_{5}^{5} = \frac{10!}{0!\,(10-0)!} \cdot \frac{5!}{5!\,(5-5)!} = 1$$

القائمة 03: نظرية الإحتمالات

Probability Theory

التمرين الأول:

لتكن الأحداث التالية (A)،(B)،(C) من فضاء العينة Ω

عبر عن ما يلي:

1.(A) و (B) يقع؟

2.(C) يقع و(B) يقع و (A) لا يقع

3.يقع حادث واحد على الأقل.

4.لايقع أي حادث من بين الثلاث؟

الحل:

1.(A) و (B) يقع:

$$A \cap B$$

2.(C) يقع و(B) يقع و (A) لا يقع:

$$C \cap B \cap \overline{A}$$

3.يقع حادث واحد على الأقل:

$$A \cup B \cup C$$

4.لايقع أي حادث من بين الثلاث:

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$$

التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على 30تفاحة منها 5فاسدة ،نسحب من هذا الصندوق 6تفاحات.احسب احتمال الحصول على:

١. 5تفاحات صالحة.
٢. 4تفاحات صالحة على الأقل.
٣. 3تفاحات فاسدة على الاكثر.

الحل: عدد الحالات الكلية: C_{30}^{6}

١. (**A**):**الحصول على 5تفاحات صالحة:**

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{((عدد الحالات الكلية االممكنة))}}=\frac{C_{25}^{5}\cdot C_{5}^{1}}{C_{30}^{6}}$$

٢. (**B**):**الحصول على 4تفاحات صالحة على الأقل:**

$$P(B)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{((عدد الحالات الكلية االممكنة))}}=\frac{C_{25}^{4}\cdot C_{5}^{2}+C_{25}^{5}\cdot C_{5}^{1}+C_{25}^{6}\cdot C_{5}^{0}}{C_{30}^{6}}$$

٣. (**C**):**الحصول على 3تفاحات صالحة على الأكثر:**

$$P(C)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{((عدد الحالات الكلية االممكنة))}}=\frac{C_{5}^{3}\cdot C_{25}^{3}+C_{5}^{2}\cdot C_{25}^{4}+C_{5}^{1}\cdot C_{25}^{5}+C_{5}^{0}\cdot C_{25}^{6}}{C_{30}^{6}}$$

التمرين الثالث:

توجد في إحدى المدن الكبرى ثمانية 6 مراكز تجارية نرقمها من 1 إلى 6.

نختار هيئة لمراقبة الأسعار كل يوم مركزا تجاريا واحدا من بين هذه الفضاءات لإجراء عملية الرقابة.

نفرض أن أيام عمل الهيئة هي 5 أيام أسبوعيا (من الأحد إلى الخميس) كما أنه لا يمكن للهيئة مراقبة نفس المركز التجاري أكثر من مرة واحدة في نفس الأسبوع.

خلال أسبوع معين أحسب احتمالات الحوادث التالية:

1- المركز 2 يراقب وذلك يوم الأحد.

2- الفضاء 4 يراقب مرة واحدة على الأكثر.

3- لا تتم مراقبة الفضاءين 1.

4- الفضاء 6 يراقب مباشرة بعد الفضاء 3.

الحل:

عدد الحالات الكلية: $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$

حساب إحتمالات:

(**A**):المركز 2 يراقب وذلك يوم الأحد.

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}} = \frac{A_1^1 \cdot A_5^4}{A_6^5} = \frac{A_5^4}{A_6^5} = \frac{120}{720} = 0.166$$

(**B**):الفضاء 4 يراقب مرة واحدة على الأكثر

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}} = \frac{5.A_1^1 \cdot A_5^4 + A_5^5}{A_6^5} = \frac{5 \cdot A_5^4 + A_5^5}{A_6^5} = \frac{720}{720} = 1$$

(**C**):لا تتم مراقبة الفضاء 1 :

$$P(C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}} = \frac{A_5^5}{A_6^5} = \frac{120}{720} = 0.166$$

(**D**):الفضاء 6 يراقب مباشرة بعد الفضاء 3

$$P(D) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}} = \frac{4.A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^3}{A_6^5} = \frac{4.A_4^3}{A_6^5} = \frac{96}{720} = 0.133$$

التمرين الرابع:

في إطار تنظيم مسابقة للفروسية من قبل أحد النوادي في منطقة معينة،ترشح (20) متسابق.

قامت الهيئة المنظمة للتظاهرة بترقيم الخيول بأرقام مختلفة من ① إلى⑳، على أن يتم في الأخير تكريم (5) فائزين الأوائل على الترتيب.أحسب إحتمال:

(**A**) : الحصان رقم ③، يفوز و يحتل المرتبة الأولى.

(**B**) : الأحصنة رقم ②،⑨،⑪،⑰ على الترتيب تفوز.

(**C**) : الحصان رقم⑱ يفوز و يحتل المرتبة الثالثة مباشرة بعد الحصان رقم⑳. و هل (A) و (C) مستقلان؟

(**D**): لا يفوز لا الحصان رقم ⑬ و لا الحصان رقم ⑯.

الحل:

عدد الحالات الكلية: $\boldsymbol{A_{20}^5 = \frac{20!}{(20-5)!}} = 1860480$

حساب إحتمالات:

(**A**) : الحصان رقم ③، يفوز و يحتل المرتبة الأولى.

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة)}} = \frac{A_1^1 \cdot A_{19}^4}{A_{20}^5} = \frac{A_{19}^4}{A_{20}^5} = \frac{93024}{1860480} = 0.05$$

(**B**) : الأحصنة رقم ②،⑨،⑪،⑰ على الترتيب تفوز.

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة)}} = \frac{2.A_1^1 A_1^1 A_1^1 A_1^1 \cdot A_{16}^1 + A_5^5}{A_{20}^5} = \frac{2.A_{16}^1}{A_{20}^5} = \frac{32}{1860480} = 0.000017$$

(**C**) : الحصان رقم⑱ يفوز و يحتل المرتبة الثالثة مباشرة بعد الحصان رقم⑳.

$$P(C) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة)}} = \frac{A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_{18}^3}{A_{20}^5} = \frac{A_{18}^3}{A_{20}^5} = \frac{4896}{1860480} = 0.0026$$

- هل (A) و (C) مستقلان؟

نتأكد من العلاقة: $\mathbf{P(A \cap C) = P(A).P(C)}$.

فإن كانت العلاقة محققة نقول بأن (A) و (B) مستقلان. و العكس صحيح

- (A∩C): الحصان رقم ③، يفوز و يحتل المرتبة الأولى و الحصان رقم ⑱ يفوز و يحتل المرتبة الثالثة مباشرة بعد الحصان رقم⑳

$$P(A\cap C)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}}=\frac{A_1^1\cdot A_1^1 A_1^1\cdot A_{17}^2}{A_{20}^5}=\frac{A_{17}^2}{A_{20}^5}=\frac{272}{1860480}=0.0001$$

- $\mathbf{P(A).P(C)}$:

$$\mathbf{P(A).P(C)}=0.05.0.0026=0.0001$$

بما أن العلاقة $\mathbf{P(A\cap C)=P(A).P(C)}$ محققة نقول بأن (A) و (C) مستقلان

(**D**): لا يفوز لا الحصان رقم ⑬ و لا الحصان رقم ⑯.

$$P(D)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}}=\frac{A_{18}^5}{A_{20}^5}=\frac{1028160}{1860480}=0.552$$

التمرين الخامس:

في إطار تشجيع السياحة الداخلية ،قامت وكالة سفر بإختيار (5) ولايات من بين 58 ,ولاية مرقمة من 1 إلى 58 لتنظيم رحلة سياحية من خمسة مراحل متتالية بحيث يتمّ زيارة الولاية مرة واحدة فقط خلال الرحلة، احسب احتمالات :

1) الولاية رقم ③ تكون نقطة بداية الرحلة السياحية.

2) الولايات رقم ①②⑤ تكون متتابعة خلال الرحلة السياحية.

3) الولاية رقم ⑤ تأتي مباشرة بعد الولاية رقم ④ خلال الرحلة السياحية.

الحل:

عدد الحالات الكلية: $A_{58}^5=\frac{58!}{(58-5)!}=549853920$

حساب إحتمالات:

(**A**) : الولاية رقم ③ تكون نقطة بداية الرحلة السياحية

$$P(A)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة)}}=\frac{A_1^1\cdot A_{57}^4}{A_{58}^5}=\frac{A_{57}^4}{A_{58}^5}=\frac{9480240}{549853920}=0.0172$$

(**B**) : الولايات رقم ①②⑤ تكون متتابعة و بهذا الترتيب خلال الرحلة السياحية

$$P(B)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة)}}=\frac{3.A_1^1A_1^1A_1^1\cdot A_{55}^2+A_5^5}{A_{58}^5}=\frac{3.A_{55}^2}{A_{58}^5}=\frac{8910}{549853920}=0.000016$$

(**C**) : الولاية رقم ⑤ تأتي مباشرة بعد الولاية رقم④ خلال الرحلة السياحية.

$$P(C)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة)}}=\frac{4.A_1^1\cdot A_1^1\cdot A_{56}^3}{A_{58}^5}=\frac{4.A_{56}^3}{A_{58}^5}=\frac{665280}{549853920}=0.0012$$

التمرين السادس:

قامت شركة معينة بطرح منتوج جديد في السوق، و من أجل الترويج له و تشجيع المستهلكين على إقتنائه، قامت بإجراء طومبولا من خلال وضع بطاقة رابحة داخل بعض العلب من هذا المنتوج.

هذه البطاقة الرابحة تحتوي على (6) أرقام **مختلفة** مختارة من (9) أرقام التالية (1,2,3,4,5,6,7,8,9).

أحسب إحتمال أن :

(A):تحتوي البطاقة الرابحة على الرقم ④.

(B): تحتوي البطاقة الرابحة على الأرقام ①،②،⑧،⑨ على الترتيب و تكون في البداية.

هل (A) و (B) مستقلان؟

(C): الرقم ② يظهر مباشرة بعد الرقم ⑦ في البطاقة الرابحة.

(D): لا تحتوي البطاقة الرابحة لا على الرقم ③ و لا على الرقم ⑤.

الحل:

عدد الحالات الكلية: $A_9^6 = \frac{9!}{(9-6)!} = 60480$

حساب إحتمالات:

(**A**) : تحتوي البطاقة الرابحة على الرقم ④.

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة}} = \frac{6.A_1^1 \cdot A_8^5}{A_9^6} = \frac{6.A_8^5}{A_9^6} = \frac{40320}{60480} = 0.6666$$

(**B**) : تحتوي البطاقة الرابحة على الأرقام ①،②،⑧،⑨ على الترتيب و تكون في البداية.

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة}} = \frac{A_1^1 A_1^1 A_1^1 A_1^1 \cdot A_5^2 + A_5^5}{A_9^6} = \frac{A_5^2}{A_9^6} = \frac{20}{60480} = 0.0003$$

- هل (A) و (B) مستقلان؟
  - هل (A) و (B) مستقلان؟

نتأكد من العلاقة: $\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$.

فإن كانت العلاقة محققة نقول بأن (A) و (B) مستقلان. و العكس صحيح

- $(A \cap B)$: تحتوي البطاقة الرابحة على الرقم ④و تحتوي على الأرقام ①،②،⑧،⑨ على الترتيب و تكون في البداية

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة}} = \frac{6.A_1^1 \cdot A_1^1 A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_1^1 \cdot A_4^1}{A_9^6} = \frac{6.A_4^1}{A_9^6} = \frac{24}{60480} = 0.0003$$

- $\mathbf{P(A).P(B)}$:

$\mathbf{P(A).P(B)} = 0.6666.0.0003 = 0.0001$

بما أن العلاقة $\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$ غير محققة نقول بأن (A) و (B) غير مستقلان

(**C**) : الرقم ② يظهر مباشرة بعد الرقم ⑦ في البطاقة الرابحة.

$$P(C)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}}=\frac{5.A_1^1\cdot A_1^1\cdot A_7^4}{A_9^6}=\frac{5.A_7^4}{A_9^6}=\frac{4200}{60480}=0.0694$$

(**D**): لا تحتوي البطاقة الرابحة لا على الرقم ③ و لا على الرقم ⑤

$$P(D)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية االممكنة))}}=\frac{A_7^6}{A_9^6}=\frac{5040}{60480}=0.0833$$

التمرين السابع:

يتميز منتوج مصنع بالعيبين (A) و (B) ،نسبة العيب(A)في المنتوج 25%، و نسبة العيب(B)في المنتوج 10%،أما نسبة المنتوج الخال من العيبين فهي 68%.

١. ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بعيب واحد على الأقل؟

٢. ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيبين معا؟

٣. هل العيبين(A) و (B) مستقلان؟

٤. ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بعيب واحد فقط؟

الحل:

المعطيات:

$$P(B)=0.10$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0.68$$

١. **نسبة المنتوج الذي يتميز بعيب واحد على الأقل**:أي حساب $P(A\cup B)$

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-0.68=0.32\ (32\%)$$

٢. **نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيبين معا**: أي حساب $P(A\cap B)$

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.25 + 0.1 - 0.32 = 0.03 (3\%)$$

٣. **هل العيبين(A) و (B) مستقلان:**

نتأكد من العلاقة التالية: $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

فإذا كانت العلاقة محققة فإن الحدثين مستقلان و العكس صحيح.

$$P(A\cap B) = 0.03$$

$$P(A).P(B) = 0.25.0.10 = 0.025$$

$$P(A\cap B) \neq P(A)\cdot P(B)$$

إذن العيبين غير مستقلين.

4. أي حساب: **نسبة المنتوج الذي يتميز بعيب واحد فقط** $P(A\cap \bar{B}) + P(\bar{A}\cap B)$

$$P(A\cap \bar{B}) + P(\bar{A}\cap B) = [P(A) - P(A\cap B)] + [P(B) - P(A\cap B)] =$$

التمرين الثامن:

أجريت عملية احصائية في كلية العلوم الدقيقة في جامعة ما حول نسبة النجاح لدفعة من الطلبة خلال السنة الجامعية الحالية في مقياسين الاحصاء و الرياضيات فأعطت النتائج التالية :

- نسبة الناجحين في مقياس الاحصاء هو 70%.
- نسبة الناجحين في مقياس الرياضيات هو 45%.
- من بين الناجحين في مقياس الاحصاء، 40% نجحوا كذلك في مقياس الرياضيات .

١ -من بين الناجحين في مقياس الرياضيات ماهي نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس الاحصاء؟

٢ -ماهي نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس واحد على الأقل؟

٣ -ماهي نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس الاحصاء فقط؟

٤ -ماهي نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس واحد فقط من بين الاثنين؟

٥ -ماهي نسبة الطلبة الذين لم ينجحوا في اي مقياس من بين الاثنين؟

الحل:

المعطيات:

(A)الناجحين في مقياس الإحصاء $P(A) = 0.70$

(B) :الناجحين في مقياس الرياضيات $P(B) = 0.45$

$$P(B\backslash A)=0.40$$

1. **نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس الاحصاء ، من بين الناجحين في مقياس الرياضيات :**

$$P(A\backslash B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = p(B\backslash A).P(A)$$

و منه:

$$P(A\backslash B)=\frac{0.28}{0.45} = 0.6222 \ \textbf{(62.22\%)}$$

2. **نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس واحد على الاقل:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.7 + 0.45 - 0.28 = 0.87 \ \textbf{(87\%)}$$

3. **نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس الاحصاء فقط:**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0.7 - 0.28 = 0.42 \ \textbf{(42\%)}$$

4. **نسبة الطلبة الذين نجحوا في مقياس واحد فقط من بين الاثنين:**

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$$
$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$
$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} - B) = 0.7 + 0.45 - 2(0.28) = 0.59 \quad (\textbf{59\%})$$

5. ماهي نسبة الطلبة الذين لم ينجحوا في أي مقياس من بين الاثنين:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.87 = 0.13 \textbf{ (13%)}$$

التمرين التاسع:

قامت إحدى الوكالات السياحية بصبر آراء لزبائنها حول موقعين سياحيين ببلد ما ، فتحصلت على النتائج الإحصائية التالية:

- نسبة الزبائن الذين يفضلون الموقع ① هي (70%).
- نسبة الزبائن الذين يفضلون الموقع ② ، هي (40%)
- من بين الزبائن الذين يفضلون الموقع ①،هناك (25%) يفضلون الموقع②.

1) ما هي نسبة الذين يفضلون الموقع ① فقط؟

2)ماهي نسبة الزبائن الذين يفضلون موقع واحد فقط؟

3) ما هي نسبة الزبائن الذين يفضلون موقع واحد على الأقل؟

4)نسبة الزبائن الذين لا يفضلون لا الموقع① ولا الموقع ②؟

الحل:

المعطيات:

(A)الزبائن الذين يفضلون الموقع ① $P(A) = 0.70$

(B) : الزبائن الذين يفضلون الموقع② $P(B) = 0.40$

$$P(B\backslash A) = 0.25$$

1.نسبة الذين يفضلون الموقع ① فقط:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B\backslash A).P(A)$$

$$P(A \cap B) = (0.25).(0.70) = 0.175$$

$$P(A \cap \bar{B}) = (0.7) - 0.175 = 0.525 \textbf{(52.5\%)}$$

2. **نسبة الزبائن الذين يفضلون موقع واحد فقط:**

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = [P(A) - P(A \cap B)] + [P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

$$P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} - B) = 0.7 + 0.40 - 2(0.175) = 0.75 \quad (75\%)$$

3.نسبة الزبائن الذين يفضلون موقع واحد على الأقل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0.7 + 0.40 - 0.175 = 0.925 \ (92.5\%)$$

4.نسبة الزبائن الذين لا يفضلون لا الموقع① ولا الموقع②:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0.925 = 0.075 \ (7.5\%)$$

التمرين العاشر:

أجرت مؤسسة متخصصة في صناعة الورق، دراسة اهتمت فيها بمعيارين هما:الاحتياجات من الورق، و القدرة على التسديد.فتحصلت على النتائج التالية:

35% من العملاء يستعملون أقل من 12 طن من الورق سنويا، و 80% منهم قادرين على التسديد.

40% من العملاء يستعملون ما بين 12-20 طن من الورق سنويا، و 85% منهم قادرين على التسديد.

25% من العملاء يستعملون فوق 20 طن من الورق سنويا،و 10% منهم غير قادرين على التسديد.

المطلوب: ما هي نسبة الزبائن الغير قادرين على التسديد؟

الحل:

(A):العملاء الذين يستعملون أقل من 12طن من الورق.

(B):العملاء الذين يستعملون ما بين 12-20 طن من الورق.

(C):العملاء الذين يستعملون فوق 20 طن من الورق.

(D):العملاء القادرين على التسديد.

لدينا من المعطيات:

$$P(A) = 0.35$$

$$P(B) = 0.40$$

$$P(C) = 0.25$$

$$P(D \mid A) = 0.80 \rightarrow P(\overline{D} \mid A) = 0.20$$

$$P(D \mid B) = 0.85 \rightarrow P(\overline{D} \mid B) = 0.15$$

$$P(\overline{D} \mid C) = 0.10 \rightarrow P(D \mid C) = 0.90$$

حساب نسبة الزبائن الغير قادرين على التسديد:

$$P(\overline{\boldsymbol{D}}) = \sum_{i=1}^{n} P(\overline{\boldsymbol{D}} \setminus A).P(A) + P(\overline{\boldsymbol{D}} \setminus B).P(B) + P(\overline{\boldsymbol{D}} \setminus C).P(C) =$$

$$0.20.0.35 + 0.15.0.40 + 0.1.0.25 = 0.155 \ (\mathbf{15.5\%})$$

القائمة 4: التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المقطع

Probability Distributions of a Discrete Random Variable

التمرين الأول:

عدد حوادث العمل اليومية في مصنع معين متغير عشوائي ،توزيعه الإحتمالي معطى في الجدول التالي:

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	2K	0.15	0.20	0.25	0.1	K

المطلوب:

١. عين قيمة الثابت (K)؟

٢. أكتب دالة التوزيع المتجمع ؟

٣. احسب احتمال عدد حوادث العمل في المصنع في يوم ما لا يقل عن 2؟

الحل:

1.حساب (K):

نعلم أن: $\sum p(X=x_i)=1$، و بالتالي: $p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=1$

$2K+0.15+0.20+0.25+0.1+K=1 \rightarrow \mathbf{K=0.1}$

٣. **دالة التوزيع المتجمع:**

$$F(x)=P(X\le x_i)=\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)$$

$x_i \le x$

$$F_X \begin{cases} 0 & si \quad x_i<0 \\ 0.2 & si \quad 0 \le x_i < 1 \\ 0.35 & si \quad 1 \le x_i<2 \\ 0.55 & si \quad 2 \le x_i<3 \\ 0.8 & si \quad 3 \le x_i<4 \\ 0.9 & si \quad 4 \le x_i <5 \\ 1 & si \quad x_i \ge 5 \end{cases}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	∑
$P(X=x_i)$	0.2	0.15	0.20	0.25	0.1	0.1	1
F(X)	0.2	0.35	0.55	0.80	0.9	1	/

٤. حساب احتمال عدد الحوادث اليومية لا تقل عن 2:

الطريقة1:

$$P(X \ge 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0.2+0.25+0.1+0.1=\mathbf{0.65}$$

الطريقة2:

$$P(X \ge 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-(0.2+0.15)=\mathbf{0.65}$$

الطريقة3:

$$P(X \geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X\leq 1)=1-F_1=1-0.35=\mathbf{0.65}$$

التمرين الثاني:

تصل مكالمات إلى مجمع هاتفي بمعدل مكالمتين في الدقيقة.إذا كان (X) متغير عشوائي يعبر عن عدد المكالمات التي تصل المكتب خلال ساعة.

١. ما هو التوزيع الإحتمالي ل (X)؟احسب توقعه و تباينه؟

٢. احسب احتمال أن لا تقل عدد المكالمات التي تصل المكتب عن 3 مكالمات؟

الحل:

١. التوزيع الإحتمالي:

(X):عدد المكالمات خلال ساعة.

(X)خاضع للتوزيع البواسوني: $X \rightsquigarrow P(\lambda=120)$ (لأنه: منسوب لوحدة زمنية: الساعة)

λ :متوسط عدد المكالمات خلال ساعة.

من المعطيات لدينا متوسط عدد المكالمات خلال الدقيقة: 2 مكالمة، و نعلم أن الساعة تساوي 60دقيقة، و بالتالي متوسط عدد المكالمات خلال الساعة هو يساوي :$2.60=\mathbf{120}$ **مكالمة**.

$$X\in \{0, 1, 2, 3.....n\}$$

- توقعه و تباينه:

$$E(X)=\lambda=120$$

$$V(X) = \lambda = 120$$

٢. احتمال أن لا تقل عدد المكالمات عن 3 مكالمات:

$$P(X \geq 3)=1-P(X<3)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]=1-(2.71^{-120}\frac{120^0}{0!}+2.71^{-120}\frac{120^1}{1!}+2.71^{-120}\frac{120^2}{2!})$$

التمرين الثالث:

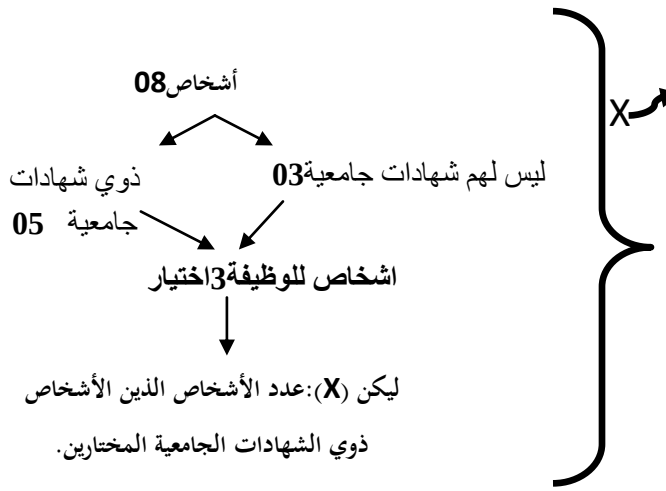
أعلنت شركة عن 3 وظائف شاغرة، تقدم لهذه الشركة 8 أشخاص بطلباتهم للإنضمام إليها، من بينهم 5 يحملون شهادات جامعية، إختارت هذه الشركة 3 أشخاص بالصدفة لتوظيفهم.

ليكن (X) متغير عشوائي يمثل عدد المترشحين للوظيفة ذوي الشهادات الجامعية.

١. أوجد التوزيع الإحتمالي؟احسب متوسطه؟

٢. احسب احتمال أن يقل عدد المترشحين المختارين للوظيفة ذوي الشهادات الجامعية عن 4؟

الحل:



(X) خاضع للتوزيع الفوق هندسي: $H(8,3,5,3)$ ← X

1.**التوزيع الإحتمالي:**

$X \in \{0,1,2,3\}$

$$P(X=k)=\frac{C_5^k C_3^{3-k}}{C_8^3}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	$\sum$
$P_{(X=x_i)}$	1/56	15/56	30/56	10/56	1

- **متوسطه:**

$$E(X)=n.\frac{a}{N}=3.\frac{5}{8}=1.875\approx 2 \text{شخص}$$

٣. **حساب احتمال**

أن يقل عدد المترشحين ذوي الشهادات الجامعية المختارين عن 4 أشخاص:

$P(X<4) \rightarrow$ يعتبر حدثا أكيدا $=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

التمرين الرابع:

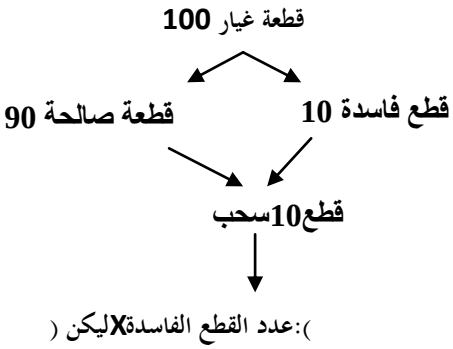
في مستودع لقطع الغيار 100 قطعة ، 10 % منهم غير صالحة للاستخدام ، نقوم بسحب 10قطع عشوائيا.

ليكن (X) متغيرا عشوائيا يمثل ععد القطع الفاسدة

المطلوب :

1. أوجد التوزيع الإحتمالي ل (X) ؟

الحل:



(X) خاضع للتوزيع الفوق هندسي:

$X \curvearrowright H\ (100,10,10,90)$

$X \in \{\ 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots 10\ \}$

$$P(X = k) = \frac{C_{10}^{k} C_{90}^{10-k}}{C_{100}^{10}}$$

و لكن بما أنه لدينا:

$N=100>50$ ✓

$\frac{n}{N} = \frac{10}{100} \leq 0.1$ ✓

فإنه يمكننا تقريب هذا التوزيع الفوق هندسي إلى التوزيع الثنائي(ذي الحدين)":

$$P(X=k) = C_{10}^{k} \cdot (0.1)^{K} \cdot (0.9)^{10-k}$$

التمرين الخامس:

خلال شهر معين، لاحظ مدير مستشفى أن إحتمال عدم نجاح عملية جراحية معينة داخل مستشفى هو (0.2).في شهر ما تم إجراء 15 عملية جراحية.

لنعرف المتغير العشوائي (X) الذيث يمثل عدد العمليات الجراحية الناجحة.

1. ما هو التوزيع الإحتمالي ل (X) ؟ و أدرس خصائصه؟

2.أحسب إحتمال أن تكون هناك 3 عمليات جراحية ناجحة؟

3.أجسب إحتمال أن لا يزيد عدد العمليات الجراحية عن 5 و لا يقل عن 3؟

الحل:

(X) خاضع للتوزيع الثنائي(ذي الحدين)

$X \rightsquigarrow B\ (n=15, p=0.8, q=o.2)$

1. التوزيع الإحتمالي ل (X):

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

p: إحتمال نجاح العملية الجراحية.

q: إحتمال عدم نجاح العملية الجراحية.

$$P_{(X=k)}=C_{15}^k \cdot (0.8)^K \cdot (0.2)^{15-k}$$

- دراسة خصائصه:

- حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=n.p$$

$E_{(X)}=15._{(0.8)}=12$ عملية جراحية ناجحة

- حساب التباين:

$$V(X)=n.p.q$$

$$V_{(X)}=15._{(0.8)(0.2)}=2.4\approx 2$$

- حساب الإنحراف المعياري:

2. أحسب إحتمال أن تكون هناك 3 عمليات جراحية ناجحة:

$$P(X=3) = C_{15}^{3} \cdot (0.8)^{3} \cdot (0.2)^{15-3}$$

3.أجسب إحتمال أن لا يزيد عدد العمليات الجراحية عن 5و لا يقل عن 3:

$$P(3 \leq X \leq 5) = C_{15}^{3} \cdot (0.8)^{3} \cdot (0.2)^{15-3} + C_{15}^{4} \cdot (0.8)^{4} \cdot (0.2)^{15-4} + C_{15}^{5} \cdot (0.8)^{5} \cdot (0.2)^{15-5}$$

التمرين السادس:

يتوافد أشخاص على مصلحة الضرائب بمعدل شخص كل دقيقتين

ليكن (X) المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة كل ساعتين

1. ما هو التوزيع الإحتمالي ل (X)؟ و احسب توقع و تباينه؟

2.أحسب إحتمال أن يتوافد على المصلحة شخصان على الأقل؟

3. أحسب إحتمال أن يتوافد على المصلحة 4 أشخاص على الأكثر؟

الحل:

(X): عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة كل ساعتين

(X)خاضع للتوزيع البواسوني: $P(\lambda=120)$ (لأنه: منسوب لوحدة زمنية)

λ :متوسط عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة كل ساعتين(أي كل 120 دقيقة)

من المعطيات لدينا متوسط عدد الأشخاص المتوافدين كل دقيقتين هو 2 شخص، و عليه فإن متوسط عدد الأشخاص المتوافدين كل ساعتين(120 دقيقة) هو 120 شخص

$$X\epsilon \ \{\ 0, 1, 2, 3\ldots\ldots\ldots\ldots n\}$$

$$P(X = k) = 2.71^{-120}\ \frac{120^k}{k!}$$

- توقعه و تباينه:

$$E(X)=\lambda=120 \text{ شخص}$$

$$V(X)=\lambda=120 \text{ شخص}$$

2.أحسب إحتمال: أن يتوافد على المصلحة شخصان على الأقل:

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$+\ 2.71^{-120}\ \frac{120^1}{1!}\ ] \qquad =1-[2.71^{-120}\ \frac{120^0}{0!}$$

$$=1$$

3.أحسب إحتمال أن يتوافد على المصلحة 4 أشخاص على الأكثر:

$$P\ (X\leq 4)=\ [P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)]$$

$$=2.71^{-120}\ \frac{120^0}{0!} + 2.71^{-120}\ \frac{120^1}{1!} + 2.71^{-120}\ \frac{120^2}{2!} +$$
$$2.71^{-120}\ \frac{120^3}{3!}+2.71^{-120}\ \frac{120^4}{4!}$$

التمرين السابع:

يلعب فريق (6) مقابلات في دورة معينة لكرة القدم في ظروف مستقلة.إحتمال عدم فوزه بأي مقابلة هو (0.4).

ليكن (X) متغير عشوائي يمثل عدد المقابلات التي لا يفوز بها الفريق.

1. ما هو التوزيع الإحجتمالي ل (X)؟ و أحسب توقع و تباينه؟

2.أحسب إحتمال عدم فوز الفريق في مبارتين على الأقل؟

3.أحسب إحتمال عدم فوز الفريق في أي مباراة؟

الحل:

1 .ما هو التوزيع الإحجتمالي ل (X)، و توقع و تباينه:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

p: إحتمال عدم الفوز بالمباراة.

q: إحتمال الفوز بالمباراة

$$P(X=k)=C_6^k \cdot (0.4)^K \cdot (0.6)^{6-k}$$

- حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=n.p$$

$$E(X)=6.(0.4)=2.4$$

- حساب التباين:

$$V(X)=n.p.q=6(0.4)(0.6)=1.44$$

2.أحسب إحتمال عدم فوز الفريق في مبارتين على الأقل:

$$P(X\geq 2)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$$

$$=1-C_6^0 \cdot (0.4)^0 \cdot (0.6)^{6-0}$$

$$= 1-0.0466= 0.9534$$

3.أحسب إحتمال عدم فوز الفريق في أي مباراة:

$$P(X=0) = C_6^0 \cdot (0.4)^0 \cdot (0.6)^{6-0} =0.0466$$

التمرين الثامن:

تتكون هيئة إدارية من (7) أعضاء دائمين و (5) أعضاء غير دائمين. أرادت الهيئة تكوين لجنة من 8 أعضاء لتكليفهم بمهمة معينة.

ليكن (X) المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة المكونة

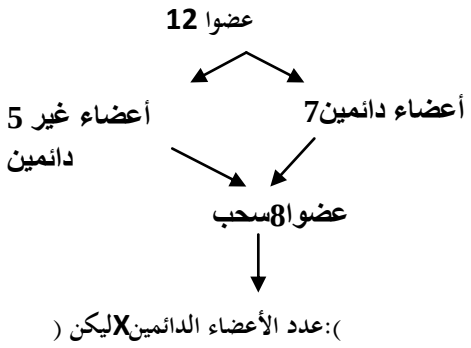
1.أوجد التوزيع الإحتمالي ل (X) ؟

2.أحسب إحتمال أن لا يقل عدد الأعضاء الدائمين عن 3؟

3.أحسب إحتمال أن لا يزيد عدد الأعضاء الغير دائمين عن 5؟

الحل:

1.التوزيع الإحتمالي ل (X):



(X) خاضع للتوزيع الفوق هندسي:

$X \rightarrow H(12,8,7,5)$

$X \in \{3,4,5,6,7\}$

$$P(X=k)=\frac{C_7^k C_5^{8-k}}{C_{12}^8}$$

$X=x_i$	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	0.0707	0.3535	0.4242	0.1414	0.0101

2. إحتمال أن لا يقل عدد الأعضاء الدائمين عن 3:

يعتبر هذا الحدث أكيد و بالتالي:

$$P(X \geq 3)=1$$

3. إحتمال أن لا يزيد عدد الأعضاء الغير دائمين عن 5

يعتبر هذا الحدث أكيد و بالتالي

$$P(X \leq 5)=1$$

القائمة 5: التوزيعات الإحتمالية للمتغير العشوائي المستمر

Probability Distributions of a Continuous Random Variable

التمرين الأول:

أفرض لديك المتغير العشوائي X ودالة الكثافة الاحتمالية له كالآتي:

$$f(X)= 4X^3 ,\ 0 <X< 1$$

المطلوب: جد القيمة المتوقعة $E(X)$والتباين $V(X)$ ؟

الحل:

1. القيمة المتوقعة $E(X)$:

$$dx\ E(x) = \int_0^1 x4x^3 = 4\int_0^1 x^4 dx = 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \mathbf{4}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} - \mathbf{0}\right) = \mathbf{0.8}$$

2. التباين V(X):

$$\mathbf{V(X) =E(X^2)-[E(X)]^2}$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 4x^3 = 4\int_0^1 x^5 dx = 4\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \mathbf{4}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} - \mathbf{0}\right) = \mathbf{0.66}$$

$$V(X)= 0.66-(0.8)^2=0.02$$

التمرين الثاني:

مدة المكالمات الهاتفية (بالدقائق) التي تصل إلى مكتب معين، متغير عشوائي ،دالة كثافة إحتماله معرفة كما يلي:

$$f_x = e^{-3\alpha x} ,x\geq 0$$

المطلوب:

١. عين قيمة الثابت α؟

٢. أكتب دالة التوزيع المتجمع؟

٣. حساب احتمال أن لا تفوق مدة المكالمة الواحدة عن دقيقيتين؟

الحل:

١. حساب α:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{0} f_x dx + \int_{0}^{+\infty} f_x dx = 1$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-3\alpha x} dx = 1$$

$$\rightarrow 0 + \int_{0}^{+\infty} e^{-3\alpha x} dx = 1$$

$$\rightarrow [\frac{1}{-3\alpha} \cdot e^{-3\alpha x}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\rightarrow 0 - \frac{1}{-3\alpha} = 1$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

و بالتالي:

$$f_x = e^{-x} \quad ،\mathbf{x \geq 0}$$

٢. كتابة دالة التوزيع المتجمع F_X:

$$F_x = \int_{-\infty}^{x} f_x dx$$

الحالة 01: $x<0$

$$F_x = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$$

الحالة 02: $x \geq 0$

$$F_x = \int_{-\infty}^{x} f_x dx = \int_{-\infty}^{0} f_x dx + \int_{0}^{x} f_x dx = \int_{-\infty}^{0} 0 dx + \int_{0}^{x} e^{-x} dx = 0 + [-e^{-x}]_0^x = (-e^{-x}) - (-1) = 1 - e^{-x}$$

و بالتالي:

$$F_X = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

٣. احتمال أن لا تفوق مدة المكالمة عن 2 دقائق:

$$P(X \leq 2) = F_2 = 1-e^{-2} = (1-2.71)^{-2} = 0.86$$

التمرين الثالث:

كانت علامات 200 طالب في امتحان معين تخضع لتوزيع طبيعي،وسطه الحسابي 12، و انحرافه المعياري 02.

١. ما هي نسبة الطلبة الذين تراوحت علاماتهم ما بين 10 و 15؟ و احسب عددهم؟

الحل:

$X \rightsquigarrow N(12,2)$

١. حساب نسبة الطلبة الذين تراوحت علاماتهم ما بين 10 و 15:

أي حساب $P(10 \leq X \leq 15)$؟

نحول (X_i) إلى (Z_i) بحيث: $Z_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma}$

$$P(15 \leq X \leq 10) = P((15-12)/2 \leq Zi \leq (10-12)/2) = P(-1 \leq Zi \leq 1.5)$$

$$= P(Z_i \leq 1.5) - P(Z_i \leq -1)$$

$$= P(z_i \leq 1.5) - P(Z_i \geq 1)$$

$$= P(z_i \leq 1.5)-[1-P(Z_i<1)]$$

$$=0.93-1+0.84=0.77\ (77\%)$$

نستعمل جدول التوزيع الطبيعي القياسي(أو المعياري)

و بالتالي عدد الطلبة =(200).(0.77)=154 طالب

التمرين الرابع:

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد مناطق الوطن يتبع توزيع طبيعي متوسطه 60(ألف ددينار جزائري) ، وتباينه 400 .

المطلوب:

1.أوجد التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي؟

2.أكتب دالة كثافة الإحتمال؟

3.ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها السنوي عن 40 000 دينار جزائري؟

الحل:

(X): متغير عشوائي يمثل الدخل السنوي للأسرة في أحد المناطق(بالألف دينار جزائري)

(X) يتبع التوزيع الطبيعي ، متوسطه $E(X)=\mu=60$، و تباينه $V(X)=\sigma^2=400$

$$X \sim N(60,700)$$

2.كتابة دالة كثافة الإحتمال:

$$f_x = \frac{1}{20\sqrt{2\prod}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-60}{20})^2}$$

3.نسبة الأسر التي يقل دخلها السنوي عن 40 000 دينار جزائري:

$$P(X<40)=P(Z<\frac{40-60}{20})=P(Z<-1)=0.1587^*$$

التمرين الخامس:

ليكن (X) متغير عشوائي يخضع لتوزيع مربع كاي بدرجات حرية n=10.

1.أوجد دالة كثافة الإحتمال لهذا المتغير ؟

2.أحسب $P(X\leq 3.94)$؟

الحل:

$$X\sim \chi^2_{(10)}$$

$$f_x = \frac{1}{2^{(10/2)}\prod(\frac{10}{2})} x^{(\frac{10}{2}-1)} e^{(-\frac{x}{2})}$$

$$P(X\leq 3.94) = 0.95^*$$

التمرين السادس:

إذا كانت نتائج امتحان مقياس الاحصاء الرياضي ل (300)طالب سنة أولى ل.م.د بكلية الإقتصاد، تتوزع توزيعا طبيعيا ، متوسطه $\mu=13$ و إنحرافه المعياري $\delta=2$

1- أحسب إحتمال الحصول على علامة 15 فأقل؟ و ما هو عدد الطلبة الذين تحصلوا عليها؟

الحل:

$$P(X\leq 15)=P(Z\leq\frac{15-13}{2})=P(Z\leq 1)=0.8413(84.13\%)$$

* :تم إستخراج القيمة إعتمادا على جدول التوزيع الطبيعي القياسي(أو المعياري)

*: تم إستخراج القيمة من جدول توزيع مربع كاي (عند درجة حرية n=10)

عدد الطلبة:

N=300.(0.8413)≈252طالب

القائمة 6: العزوم و الدالة المتجددة للعزوم

Moments and the moment-generating function

التمرين الأول:

لتكن $f(x)$ دالة كثافة احتمال للمتغير العشوائي المستمر X معطاة على النحو التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & si\ 0 < x < 2 \\ 0, & si\ non \end{cases}$$

المطلوب:

1.أحسب العزوم البسيطة من الدرجة 0،1،2،3؟

2. أحسب العزوم المركزية من الدرجة 0 ، 1 ، 2 ،3 ؟

الحل:

1.العزوم البسيطة من الدرجة 0،1،2،3

$$\boldsymbol{M_r = \int_{+\infty}^{-\infty} {X_i}^r f(x) dx_i}$$

- **إذا كان r=0 فإن** $M_0=1$

$$M_0 = \int_0^2 {X_i}^0 f(x) dx_i = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}(2-0) = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

- **إذا كان r=1 فإن** $M_1=E(x)$

$$M_1 = E(X) = \int_0^2 {X_i}^1 f(x)dx_i = \int_0^2 x\frac{X}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \mathbf{4/3}$$

- إذا كان **r=2** فإن $M_2=E(x^2)$

$$\boldsymbol{M_2} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{X_i}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{f(x)dx_i} = \int_0^2 x^2\frac{X}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{2}(4-0)$$
$$= 2$$

- إذا كان **r=3**:

$$\boldsymbol{M_3} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{X_i}^{\mathbf{3}} \boldsymbol{f(x)dx_i} = \int_0^2 x^3\frac{X}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{32}{5} - 0\right) = \mathbf{\frac{16}{5}}$$

العزوم المركزية من الدرجة **0 ، 1 ، 2 ،3** :

$$\boldsymbol{M_r} = \int_{+\infty}^{-\infty} [\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{E(x)}]^r \boldsymbol{f(x)dx_i}$$

- إذاكان $r=0$ فإن $M_0=1$

$$M_0 = \int_{+\infty}^{-\infty} [x_i - E(x)]^0 f(x) dx_i = \int_{+\infty}^{-\infty} 1 f(x) dx_i = 1$$

- إذا كان $r=1$، فإن $M_1=0$

$$M_1 = \int_{+\infty}^{-\infty} [x_i - E(x)]^1 f(x) dx_i$$
$$= \int_{+\infty}^{-\infty} x_i f(x) dx_i - E(X) \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) dx_i = E(X) - E(X).1$$
$$= 0$$

- إذا كان $r=2$، فإن $M_2=V(x)$

$$M_2 = \int_{+\infty}^{-\infty} [x_i - E(x)]^2 f(x) dx_i = \int_{+\infty}^{-\infty} \left[x_i - \frac{4}{3}\right]^2 f(x) dx_i$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \left[x_i - \frac{4}{3}\right]^2 0 dx_i$$
$$+ \int_{0}^{2} \left[x_i - \frac{4}{3}\right]^2 \frac{x}{2} dx_i + \int_{2}^{+\infty} \left[x_i - \frac{4}{3}\right]^2 0 dx_i = \frac{2}{9}$$

- إذا كان $r=3$، فإن

$$\boldsymbol{M_3} = \int_{+\infty}^{-\infty} [x_i - E(x)]^3 f(x) dx_i$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \left[x_i - \frac{4}{3}\right]^3 0 dx_i$$

$$+ \int_{0}^{2} \left[x_i - \frac{4}{3}\right]^3 \frac{x}{2} dx_i + \int_{2}^{+\infty} \left[x_i - \frac{4}{3}\right]^3 0 dx_i =$$

التمرين الثاني:

إذا كانت الدالة الإحتمالية للمتغير العشوائي X، معطاة على الشكل التالي:

$$P(X) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-X} & , \quad X=0,1,2,\ldots.n \\ 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الدالة المولدة للعزم للمتغير العشوائي X؟

من خلال تعريف الدالة المولدة للعزم، لدينا:

$$\mathcal{M}x(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} p(x)$$

$$= \sum_{0=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-X} = \sum_{0=0}^{n} \binom{n}{X} (e^t p)^X (1-p)^{n-X}$$

التمرين الثالث:

إذا كانت القيمة المتوقعة E(X)=3، و كانت الدالة المولدة للعزم :

$$M_{(t)} = \frac{p e^t}{1 - e^t + p.e^t}$$

أوجد قيمة P؟

الحل:

نقوم بإيجاد المشتقة الأولى ل(M(t، ثم نعوض t=0 في المشتقة الأولى

$$M`(t)=\frac{pe^t}{[1-e^t+p.e^t]^2}$$

$$M`(0)=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}$$

$$M`(0)=E(X)\Rightarrow \frac{1}{p}=3\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

التمرين الرابع:

إذا كانت دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير العشوائي المستمر X، معطاة على الشكل التالي:

$$f_x=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & , \quad a\leq X\leq b\\ 0\end{cases}$$

المطلوب: أوجد الدالة المولدة للعزم للمتغير العشوائي X؟

الحل:

$$\mathcal{M}x(t)=\int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b e^{tx}=\frac{1}{(b-a)}\frac{1}{t}[e^{tx}]_a^b$$

$$\mathcal{M}x(t)=\frac{1}{(b-a)t}(e^{bt}-e^{at})$$

القائمة 7: نظرية شيبيشيف و نظرية الأعداد الكبيرة

Chebyshov theorem and Large Number Theory

التمرين الأول:

إذا إفترضنا أن عدد المنتجات المصنعة في الشركة خلال أسبوع هو متغير عشوائي بمتوسط 50.

إذا كان التباين في أسبوع الإنتاج يساوي V(X)=25 ، فماذا يمكن أن نقول عن احتمال أن يختلف الإنتاج في هذا الأسبوع بأكثر من 10 عن المتوسط؟

الحل:

بتطبيق عدم المساواة في نظرية شيبيشيف"Chebyshov "

$$P(|X(s) - 50| \geq 10) \leq \frac{Var(X)}{10^2} = \frac{1}{4}$$

إذن إحتمال أن يختلف الإنتاج في هذا الأسبوع بأكثر من 10 عن المتوسط هو : 0.25(25%) على الأكثر

التمرين الثاني:

لتكن X1، X2، Xn ... هي عينة من المتغيرات العشوائية المستقلة مع توزيع Bernoulli ، بحيث تأخذ القيمة 1 بالاحتمال p = 0.5.

ما هو حجم العينة لتكون قادرة على التأكد من أن احتمال أن . $| Sn - 0.5 | \geq 0.1 \leq 0.01$ ؟

الحل

لدينا :

$$E(X) = \mu = p = 0.5$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = p(1-p) = 0.25.$$

بتطبيق عدم المساواة في نظرية Chebyshov ، لأي $k > 0$:

$$P(|S_n - \mu| \geq k) \leq \frac{p(1-p)}{nk^2}$$

بأخذ $k = 0.1$:

$$n \geq \frac{0.5^2}{0.01^2} = 2500 \quad \text{إذا} \quad P(|S_n - 0.5| \geq 0.1) \leq 0.01$$

و عليه فإن حجم عينة لضمان أن يكون احتمال الحدث $|\ Sn - 0.5\ | \geq 0.1 \leq 0.01$ هو 2500.

التمرين الثالث:

إذا كان أطوال مجموعة من المراهقين يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه 170 سم مع انحراف معياري 8سم.

استخدم متباينة شيبيشف لإيجاد حد أعلى لاحتمال أن يكون أحد المراهقين أطول أو أقصر بـ 12سم من المتوسط.

الحل:

إعتمادا على متراجحة شيبيشيف $\Pr(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$

$$P(|X-170| \geq 8K) \leq 1/(K^2)$$

بوضع $K=1.5$، تصبح المتراجحة:

$$P(|X-170| \geq 12) \leq 1/(1.5^2)$$

$$P(|X-170| \geq 12) \leq 0.44$$

التمرين الرابع:

متوسط مدة التمدرس في مجتمع معين هي 8سنوات، والانحراف المعياري $\sigma = 1$.

١. أحسب أدنى احتمال لمدة تمدرس بين 6 و10 سنوات لفرد مختار عشوائيا من هذا المجتمع.

٢. أحسب أقصى احتمال لمدة تمدرس لا تزيد عن 6 سنوات أو لا تقل عن 10 سنوات.

الحل:

1. أدنى احتمال لمدة تمدرس بين 6 و10 سنوات لفرد مختار عشوائيا من هذا المجتمع:

لدينا $\mu= 8$، $\sigma = 1$

بوضع k=2

$$P(|x-\mu|<k\sigma)>1-\frac{1}{k^2}. \qquad \mu=8,\sigma=1\Rightarrow 10=\mu+2\sigma,\ 6=\mu-2\sigma.$$

$$P(10>x>6)=P(|x-\mu|<2\sigma)>1-\frac{1}{2^2}=3/4$$

أدنى احتمال لمدة تمدرس بين 6 و10 سنوات لفرد مختار عشوائيا من هذا المجتمع هو: 0.75

2. أقصى احتمال لمدة تمدرس لا تزيد عن 6 سنوات أو لا تقل عن 10:

بوضع k=2

$P(X\leq 6)=$ $P(|x-\mu|\geq k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}.$ $6=\mu-2\sigma.$

P ($|x-\mu|\geq 2\sigma)\leq\frac{1}{2^2}=1/4$

أقصى احتمال لمدة تمدرس لا تزيد عن 6 سنوات أو لا تقل عن 10 هو 0.25.

المراجع

- **الكتب:**

١. بو عبد الله صالح، محاضرات الإحصاء الرياضي،بدون دار نشر، الجزائر، 2005-2006.
http://www.uaemath.com/uploaded/102850/1320401139.pdf

٢. حبار عبد مضحى،"مقدمة في نظرية الإحتمالات"، دار المسيرة للنشر و التوزيع، الأردن، 2011.

٣. السعدي رجال،"نظرية الإحتمالات :مبادئ الحساب الإحتمال- دروس و تمارين"، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية ،الجزائر، 2005.

٤. عبد الحفيظ مصطفى،" نظرية الإحتمالات-مبادئ و تطبيقات،ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية،الجزائر، 2004

٥. عزام صبري،"الإحصاء الرياضي"، دار صفاء للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى،عمان، 2010.

٦. عمار شرقية،" الرياضيات خطوة بخطوة-المجموعات و العناصر –نظرية المجموعات" ،2022.

٧. كامل فليفل،حمدي حمدان،"الإحصاء"دار المناهج للنشر و التوزيع،الطبعة الثانية،عمان-الأردن، 2012.

٨. محمد صبحي أبو صالح،"مبادئ الإحصاء"،دار اليازوري العلمية للنشر و التوزيع،الطبعة العربية، عمان-الأردن،2007.

٩. موساوي عبد النور، بركان يوسف،"الإحصاء 2"،دار العلوم للنشر و التوزيع، عنابة-الجزائر،2010.

- **المطبوعات البيداغوجية:**

١٠. العمري علي ، حيدوشي عاشور ، وعيل ميلود، محاضرات في الإحصاء 2، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الإقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة البويرة،2020/2019
http://dspace.univ-bouira.dz:8080/jspui/bitstream/123456789/9334/1/Cours-Stat-2-1LMD-2019-2020.pdf

١١. هاشمي عبابسة. ،" محاضرات في مقياس الإحصاء الرياضي"، مطبوعة بيداغوجية ، كلية العلوم الإقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة بسكرة.
http://elearning.univ-biskra.dz/moodle2019/course/view.php?id=3510

- **المواقع الإلكترونية:**

1. المكتبة المركزية، الجامعة الإسلامية، غزة. أنظر:

https://library.iugaza.edu.ps/view_toc.aspx?id=17767&part=9999

2. https://memas.wordpress.com
3. https://ar.wikipedia.org