الفصل الرابع

مقاييس الشكل

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت تسمح بتلخيص بيانات أي ظاهرة في صورة أرقام بسيطة تعطي فكرة عن خصائص توزيع هذه البيانات ودرجة تجانسها أو اختلافها فإن هذا الوصف الذي تعطيه يبقى تنقصه الدقة الكافية المطلوبة للتعرف على خواص التوزيع خاصة من حيث انتشار البيانات على المنحنى البياني الممثل لها من حيث التوائه أو تفلطحه عن الوضع الطبيعي* كذلك دعت الحاجة لاستخدام مقاييس أخرى لتحقيق هذا الغرض سميت هذه المقاييس بمقاييس الالتواء والتفلطح التي سنتعرف عليها في هذا الفصل بعد التطرق لموضوع العزوم.

أولا العزوم: Moments

العزوم قد تكون حول نقطة الأصل أو حول المتوسط الحسابي أو حول أي نقطة معينة، فالعزم الأول حول نقطة الأصل مثلا هو متوسط قيم الظاهرة والعزم حول المتوسط الحسابي هو متوسط انحرافات قيم التوزيع عن المتوسط الحسابي لها. أما رتبة العزم فتتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن المتوسط الحسابي. وتستخدم العزوم في إيجاد المعامل العزمي للإلتواء وكذلك معامل التفلطح.

1- العزوم حول نقطة الأصل:

إذا كانت لدينا القيم $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ فإن

العزم الأول = $\frac{\sum X_i}{n}$

العزم الثاني = $\frac{\sum X_i^2}{n}$

العزم الثالث = $\frac{\sum X_i^3}{n}$

. .

. .

. .

العزم النوني = $\frac{\sum X_i^n}{n}$

مثال1:

إذا كانت لدينا القيم 8،5،2،1 أوجد العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول نقطة الأصل؟.

الحل:

العزم الأول: $\frac{\sum X_i}{n} = \frac{8+5+2+1}{4} = \frac{16}{4} = 4$

* المنحنى الطبيعي كما عرفناه في الفصل الثاني هو المنحنى المتماثل الذي يأخذ شكل الجرس والذي عنده تنطبق قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

العزم الثاني: $\frac{\sum X_i^2}{n} = \frac{64+25+4+1}{4} = \frac{94}{4} = 23.5$

العزم الثالث: $\frac{\sum X_i^3}{n} = \frac{512+125+8+1}{4} = 161.5$

العزم الرابع : $\frac{\sum X_i^4}{n} = \frac{64+25+4+1}{4} = 1184.5$

نلاحظ أن: العزم الأول = المتوسط الحسابي والتباين = العزم الثاني – مربع العزم الأول ومنه فإن التباين في المثال السابق = $23.5 - 16$ = 7.5.

أما إذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في فئات فإن:

العزم الأول = $\frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i}$

العزم الثاني = $\frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i}$

العزم الثالث = $\frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i}$

. .

. .

. .

العزم النوني = $\frac{\sum n_i X_i^n}{\sum n_i}$

حيث n_i = التكرار.

x_i = القيم أو مراكز الفئات.

مثال2:

أوجد العزم الأول والثاني والثالث للبيانات المبوبة في جدول التوزيع التالي، ثم أوجد التباين والانحراف المعياري؟.

الفئة	3 − 1	5 − 3	7 − 5	9 − 7	11 − 9	**المجموع**
التكرار	1	2	3	4	6	16

الحل:

الفئة	التكرار (n_i)	مركز الفئة (x_i)	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$	$n_i x_i^3$
1–3	1	2	2	4	8
3–5	2	4	8	32	128
5–7	3	6	18	108	648
7–9	4	8	32	256	2048
9–11	5	10	60	600	6000
المجموع	16		120	1000	8832

العزم الأول = $M_1 = \frac{\sum n_i X_i}{\sum n_i} = \frac{120}{16} = 7.5 = \overline{X}$

العزم الثاني = $M_2 = \frac{\sum n_i X_i^2}{\sum n_i} = \frac{1000}{16} = 62.5$

العزم الثالث = $M_3 = \frac{\sum n_i X_i^3}{\sum n_i} = \frac{8832}{16} = 552$

التباين = العزم الثاني − مربع العزم الأول.

= $62.5 - 56.25 = 6.25$.

ومنه الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{6.25} = 2.5$

2 – العزوم حول المتوسط الحسابي:

ونرمز للعزم حول المتوسط الحسابي بالرمز μ.

العزم الأول حول المتوسط الحسابي: $\mu_1 = \frac{\sum\left(X_i - \bar{x}\right)}{\sum n}$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي: $\mu_2 = \frac{\sum\left(X_i - \bar{x}\right)^2}{\sum n}$

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي: $\mu_3 = \frac{\sum\left(X_1 - \bar{x}\right)^3}{\sum n}$

. .

. .

. .

العزم النوني حول المتوسط الحسابي: $\mu_n = \frac{\sum\left(X_i - \bar{x}\right)^n}{\sum n}$

مثال3:

أوجد العزم الأول والثاني والثالث حول المتوسط الحسابي للقيم التالية 2، 6،4؟

الحل: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{\sum n} = \frac{2+4+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$

X_1	$\left(X_1 \bar{X}\right)$	$\left(X_1 \bar{X}\right)^2$	$\left(X_1 \bar{X}\right)^3$
2	**2–**	**4**	**−8**
4	**0**	**0**	**0**
6	**2**	**4**	**8**
المجموع	**0**	**8**	**0**

$$\mu_1 = \frac{\sum\left(X_i - \bar{x}\right)}{\sum n} = \frac{0}{3} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\sum\left(X_i - \bar{x}\right)^2}{\sum n} = \frac{8}{3} = 2.66$$

$$\mu_2 = \frac{\sum\left(X_i - \bar{x}\right)^3}{\sum n} = \frac{0}{3} = 0$$

ويلاحظ من خلال هذه النتائج أن:

– العزم الأول حول المتوسط الحسابي يساوي صفر دائما.

– العزم الثاني حول المتوسط الحسابي يساوي التباين

أما إذا كانت البيانات متكررة أو مبوبة في جداول توزيع تكراري فإن العزوم حول المتوسط الحسابي يمكن حسابها على النحو التالي:

العزم الأول حول المتوسط الحسابي = $\mu_1 = \dfrac{\sum n_1\left(X_i - \bar{x}\right)}{\sum n_1}$

العزم الثاني حول المتوسط الحسابي: $\mu_2 = \dfrac{\sum n_1\left(X_i - \bar{x}\right)^2}{\sum n_1}$

العزم الثالث حول المتوسط الحسابي: $\mu_2 = \dfrac{\sum n_1\left(X_i - \bar{x}\right)^3}{\sum n_1}$

.

.

العزم النوني حول المتوسط الحسابي: $\mu_n = \dfrac{\sum n_1\left(X_i - \bar{x}\right)^n}{\sum n_1}$

مثال4:

أوجد العزم الأول والثاني حول المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة في الجدول التالي:

الفئة	$2-0$	$4-2$	$6-4$	$6-8$	المجموع
التكرار	2	4	6	4	16

الحل:

الفئة	n_i	X_i	nx_i	$\left(x_1 - \bar{x}\right)$	$n_i\left(x_1 - \bar{x}\right)$	$n_i\left(x_1 - \bar{x}\right)^2$
$2-0$	2	1	2	-3.5	-7	24.5
$4-2$	4	3	12	-1.5	-6	9
$6-4$	6	5	30	0.5	3	1.5
$8-6$	4	7	28	2.5	10	25
المجموع	**16**		**27**		**0**	**60**

العزم الأول حول المتوسط الحسابي = $\mu_1 = \dfrac{\sum n_i\left(X_i - \bar{x}\right)}{\sum n_i} = \dfrac{0}{4}$

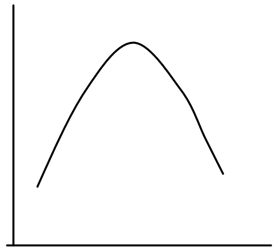
العزم الثاني حول المتوسط الحسابي = $\mu_1 = \dfrac{\sum n_i\left(X_i - \bar{x}\right)^2}{\sum n_i} = \dfrac{60}{4} = 18$

ثانيا: تحديد شكل التوزيع

يمكن تحديد شكل التوزيع باستخدام مقاييس الالتواء والتفلطح.

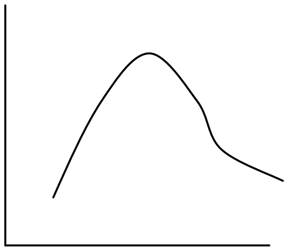
I – الالتواء Asymétrie : (عدم التناظر من اليمين أو من اليسار مقارنة بتوزيع متناظر بالنسبة للقيمة المركزية) يعتبر منحنى التوزيع التكراري المعتدل هاما جدا في الدراسات والتحليلات الإحصائية. إن هذا المنحنى الذي تتساوى عنده مقاييس النزعة المركزية الثلاث $\left(\overline{X} = Me = M0\right)$ نظري ونادر الوقوع، فالمنحنيات التي نحصل عليها عادة تكون ملتوية ناحية اليمين أو ناحية اليسار أو قريبة من الاعتدال .

فقد عرفنا عند دراستنا لمقاييس النزعة المركزية أن التوزيعات الإحصائية يمكن أن تأخذ أحد الأشكال التالية حسب العلاقة بين المقاييس الثلاث:



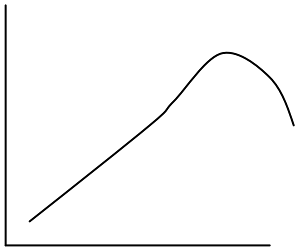
توزيع متناظر

$\overline{X}$ =Me=Mo



التواء ناحية اليمين

Mo<Me< $\overline{X}$



التواء ناحية اليسار

Mo>Me> $\overline{X}$

أما في هذا الشطر فسنحاول معرفة درجة تناظر (تماثل) توزيع البيانات حول المتوسط الحسابي باستخدام العزوم والانحراف المعياري.

2 – طرق حساب الالتواء

أ)- الطريقة التقريبية

– معامل بيرسون للالتواء Coefficient de Pearson:

* **المنوال**: $$P_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\delta_x}$$

* **الوسيط**: $$P_1 = \frac{3(\overline{X} - Me)}{\delta_x}$$

وتكون لدينا ثلاث حالات كذلك

توزيع إحصائي متناظر $P_1=0$ ⇨

منحنى التوزيع غير متناظر ناحية اليمين **إلتواء موجب** ⇨ $P_1>0$

منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار **إلتواء سالب** ⇨ $P_1<0$

***الثالث**: $$P_1 = \frac{(u3)^2}{(u_2)^3}$$

وتكون لدينا حالتين فقط: توزيع إحصائي متناظر ⇨ $P_1=0$

منحنى التوزيع غير متناظر ⇨ $P_1>0$

- **معامل يول وكندال للالتواء Coefficient de Yulle et Kendall**:

ويستعمل هذا المعامل بالنسبة للجداول الإحصائية المفتوحة.

$$\text{Cyk} = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1}$$

أما الحالات الممكنة فهي:

توزيع إحصائي متناظر ⇨ $\text{Cyk} = 0$

منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليمين ⇨ $\text{Cyk} > 0$

منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية اليسار ⇨ $\text{Cyk} < 0$.

ب)- الطريقة الدقيقة:

- **معامل فيشر للالتواء Coefficient de Fisher:**

يقيس هذا المعامل درجة إلتواء شكل التوزيع الإحصائي ويعتمد في ذلك على قيمة العزم الثالث حول المتوسط الحسابي، ولاستبعاد وحدة القياس نقسمه على الانحراف المعياري من نفس المرتبة.

$$F_1 = \frac{u^3}{\sigma_x^3} \; *$$

ويكون لدينا ثلاث حالات هي:

توزيع إحصائي متناظر ⇨ $F_1 = 0$

منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية **اليمين** **إلتواء موجب** ⇨ $F_1 > 0$

منحنى التوزيع غير متناظر ملتوي ناحية **اليسار** **إلتواء سالب** ⇨ $F_1 < 0$.

II – التفلطح Aplatissement (تطاول أو تفلطح المنحنى مقارنة بالتوزيع الطبيعي):

ويقصد بالتفلطح مدى اتساع وضعف قمة منحنى التوزيع ولقد أصطلح على اعتبار منحنى التوزيع الطبيعي متوسط التفلطح.

وتوجد كذلك عدة معاملات لقياس التفلطح أهمها:

أ) **معامل بيرسون للتفلطح Coefficient de Pearson** :

$$P_2 = \frac{u_4}{(\sigma_x)^4} = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2}$$

والحالات الممكنة هي:

توزيع معتدل التفلطح (توزيع طبيعي) ⇨ $P_2 = 3$.

منحنى التوزيع متطاول (مذبب) (توزيع **قليل** التشتت) $P_2 > 3$

---

* تم اختيار u^3 لقياس الالتواء في المعاملين لأن قيمته تساوي صفر في التوزيع المعتدل.

منحنى التوزيع متفلطح $P_2<3$ (توزيع **قوي** التشتت)

ب) معامل fisher للتفلطح Coefficient de fisher

وهو عبارة عن معامل بيرسون مطروحا منه 3.

$$F_2 = P_2 - 3 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} - 3$$

والحالات الممكنة هي:

منحنى التوزيع معتدل التفلطح $F_2 = 0$

منحنى التوزيع متطاول (مذبب) $F_2 > 0$ (توزيع **قليل** التشتت)

منحنى التوزيع متفلطح $F_2 < 0$ (توزيع **قوي** التشتت)

مثال5:

أدرس شكل منحنى التوزيع التكراري الآتي باستخدام معامل فيشر للالتواء ومعامل بيرسون للتفلطح؟.

X_I	1	2	3	4	المجموع
n_i	6	9	4	1	20

الحل:

Xi	**ni**	**Nixi**	**(Xi-X)**	**Ni(Xi-X)²**	**Ni(Xi-X)^3**	**Ni(Xi-X)**	**Ni(Xi-X)**
1	6	6	-1	-6	6	-6	6
2	9	18	0	0	0	0	0
3	4	12	1	4	4	4	4
4	1	4	2	2	4	8	16
المجموع	**20**	**40**		**0**	**14**	**6**	**26**

$$\overline{X} = \frac{\sum niXi}{\sum} = \frac{40}{20} = 2$$

$$\mu_1 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})}{\sum n_i} = \frac{0}{20} = 0$$

التباين:

$$\mu_2 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^2}{\sum n_i} = \frac{14}{20} = 0.7 =$$

والانحراف المعياري

$$S_x = \sqrt{0.7} = 0.83$$

$$\mu_3 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^3}{\sum n_i} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$$\mu_4 = \frac{\sum n_i (X_i - \overline{X})^4}{\sum n_i} = \frac{26}{20} = 1.3$$

ومنه معامل فيشر الالتواء

$$F_1 = \frac{\mu 3}{(S_x)^3} = \frac{0.3}{(0.83)^3} = 0.52$$

معامل فيشر للالتواء موجب هذا يعني أن منحنى التوزيع التكراري ملتوي ناحية اليمين.

معامل بيرسون للتفلطح. $P_2 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = \frac{1.3}{(0.7)^2} = 2.653$

معامل بيرسون للتفلطح أقل من 3 هذا يعني أم منحنى التوزيع يميل للتفلطح.

ج- معامل كيلي للتفلطح Coefficient de Kelly

ويستخدم عندما يكون جدول التوزيع التكراري مفتوح من البداية أو من النهاية، ويعطي هذا المعامل بالعلاقة التالية:

$$C_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1}$$

والحالات الممكنة هي:

منحنى التوزيع معتدل التفلطح $C_K = 0.263$

منحنى التوزيع متطاول (مذبب) $C_K > 0.263$ (توزيع **قليل** التشتت)

منحنى التوزيع متفلطح $C_K < 0$ (توزيع **قوي** التشتت)

تمارين حول مقاييس التشتت و الشكل

تمرين1:

البيانات التالية تعبر عن المسافة المقطوعة من طرف 92 زائر داخل منطقة سياحية.

المسافة (كم)	20 - 10	40 - 20	B - 40	80 - B	100 - 80
عدد السياح	9	26	19	24	14

1- أوجد القيمة المجهولة لـ B علماً أن المسافة المتوسطة المقطوعة من طرف السياح هي $\bar{X} = 49.89$.

2- أ وجد المسافة التي قطعها أكبر عدد من السياح ثم مثلها بيانياً.

3- ما هي المسافة الوسيطية المقطوعة من طرف السياح ؟ مثلها بيانياً.

4- أحسب المدى و المدى الربيعي النسبي. ماذا تستنتج ؟

5- أحسب التباين، الإنحراف المعياري، و معامل الإختلاف، ثم علل النتائج المتحصل عليها.

6- أحسب معامل إلتواء Fisher و Pearson ثم علل إجابتك.

7- باستعمال قانون Fisher حدد درجت تفلطح (إنبساط) البيانات.

تمرين2:

يبين الجدول التكراري التالي؛ النفقات الإستهلاكية الشهرية لمئة (100) عائلة بالألف (1000) دينار .

النفقات	10 - 08	12 - 10	18 - 12	22 - 18	25 - 22	40 - 25
عدد العائلات	15	n_2	n_3	19	13	05

1- أوجد قيمة كل من n_2،و n_3 علماً أن العشير الثالث يساوي ($D_3 = 11.428$).

2- أحسب النفقات المتوسطة و الوسيطية لهذه العائلات ثم مثل هذه الأخيرة بيانياً.

3- حدد عدد الاسر التي يتراوح الإنفاق الإستهلاكي لديهم ما بين 15000 و 25000 دج.

4- حدد شكل هذا التوزيع باستعمال مقاييس النزعة المركزية.

5- أدرس تشتت هذا التوزيع باستعمال المدى الربيعي النسبي، و معامل الإختلاف.

6- بين درجة إلتواء منحنى هذا التوزيع باستعمال معاملFisher ثم معامل الإلتواء الربيعي. علل إجابتك.

7- مثل هذه الظاهرة بيانياً.

تمرين3:

تحتوي وكالة لكراء السيارات على 100 سيارة موزعة على منطقتين (أ) و (ب). حاول مسير هذه الوكالة بواسطة الجدول المدون الصفحة الموالية تحليل توزيع الكيلومترات (بالألف) التي قطعتها هذه السيارات.

إذا كانت المسافة الوسيطية التي قطعتها هذه السيارات هي [Me = 11467 km]، و أن العدد المتوسط للكيلومترات المقطوعة هو [$\bar{X}$ = 14360 km]، أوجد:

تمارين حول مقاييس التشتت و الشكل

المنطقة – أ –		المنطقة – ب –	
المسافة المقطوعة	عدد السيارات	المسافة المقطوعة	عدد السيارات
4 – 2	1	6 – 4	7
8 – 6	11	9 – 8	8
10 – 9	n_5	12 – 10	n_6
16 – 12	19	20 – 16	16
40 - 20	8	80 - 40	3

1- القيمتين n_5 و n_6.

2- المدى، المدى الربيعي النسبي، ثم علل (ي) إجابتك (ي).

3- التباين، الإنحراف المعياري، و معامل الإخلاف، ثم علل (ي) إجابتك (ي).

4- بين درجة إلتواء منحنى هذا التوزيع باستعمال معاملFisher ثم معامل Pearson. علل (ي) إجابتك (ي).

5- حدد درجة تفلطح منحنى هذا التوزيع باستعمال قانون Fisher.

6- ما هو عدد السيارات التي كانت المسافة التي قطعتها ما بين 12000 و 25000 كم ؟

7- أرسم المضلع النسبي التجميعي الصاعد.

تمرين4:

يلخص التوزيع التكراري التالي نتائج الدراسة التي قامت بها مصلحة متابعة الجودة لمؤسسة صناعة المصابيح الكهربائية على عينة حجمها 50 مصباح، و كان ذلك على حسب مدة الاستعمال (كل وحدة بـ 10 أيام).

مدة الاستعمال	5 - 1	B - 5	9 - B	10 - 9	11 - 10	15 - 11
عدد المصابيح	2	4	n_3	n_4	15	5

1- أوجد قيمة المجهولين n_3 و n_4 ، علماً أن مدة الاستعمال الوسيطية هي [Me = 9.722].

2- أحسب القيمة B علماً أن متوسط مدة استعمال المصابيح هو [$\bar{X}$=9.53].

3- ما هي المدة التي اشتغلها أكبر عدد من المصابيح ؟ مثلها بيانياً.

4- بين درجة إلتواء منحنى هذا التوزيع باستعمال معاملFisher ثم معامل Pearson. علل (ي) إجابتك (ي).

5- حدد درجة تفلطح منحنى هذا التوزيع باستعمال قانون Fisher، و Kelly.

6- ما هو عدد المصابيح التي كانت مدة إستعمالها بين 70 و 130 يوم ؟

القسم الثاني

الاحصاء الرياضي

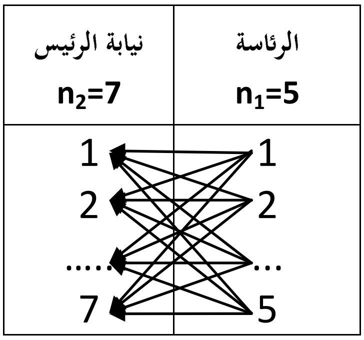
L'Analyse factorielle التحليل العاملي

تعريف: هو النظرية الرياضية للعد، أو المبدأ الأساسي للعد.

1. المبدأ الأساسي للعد Principe fondamental de compte

إذا كانت لدينا مجموعة جزئية: A_1، A_2، A_3، ......، A_k. عدد عناصرها على الترتيب: n_1، n_2، n_3، .....، n_k. فإن عدد الطرق الممكنة لأختيار عنصر واحد من كل مجموعة منها هو: $n_1.n_2.n_3. ... .n_k$.

مثال1: أثناء عملية اختيار ممثل للنقابة لمؤسسة معينة، ترشح [5] عمال للرئاسة، و [7] عمال لنيابة الرئيس. كم لجنة يمكن تشكيلها مكونة من رئيس و نائب.



الحل: $\mathbf{n_1 \times n_2 = 5 \times 7 = 35}$

2.التوفيقات Les Combinaisons يرمز لها ب C

تكون لدينا توفيقة عندما نسحب (نختار) **دفعة واحدة** و بدون إرجاع في الحالة العامة نسمي توفيقة لـ k عنصراً من بين n عنصراً، كل مجموعة جزئية ذات **k** عنصراً مختارة من بين **n** عنصراً و عدد هذه التوفيقات هو:

$$\mathbf{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

مثال: يحتوي صندوق على 10 كريات حمراء، و 8 بيضاء. نسحب منه 5 كريات.

س1: بكم كيفية يمكننا سحب هذه الكريات ؟ **ج1:** عدد الحالات الممكنة أي C_{18}^5

س2: بكم كيفية يمكننا سحب 5 كريات بيضاء ؟ **ج2:** عدد الحالات المواتية أي C_8^5

س3: بكم كيفية يمكننا سحب 3 حمراء و 2 بيضاء ؟ **ج3:** عدد الحالات الممكنة المواتية أي $C_5^2 \times C_{10}^3$

3. الترتيبات Les Arrangements يرمز لها ب A

تكون لدينا ترتيبة عندما نسحب (نختار) مجموعة من العناصر **الواحدة تلوى الأخرى** و ليس دفعة واحدة مثل التوفيقة.

1.3. الترتيبات بدون تكرار: هي كل ترتيبة على k عنصراً مختارة من بين n عنصراً، بحيث لا يمكن لكل عنصر الظهور أكثر من **مرة واحدة**. عددها هو:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2).....(n+k-1)(n-k)(n-k-1).....1}{(n-k)(n-k-1)......1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: كم لوحة سيارة يمكن تركيبها من **03** أرقام على اليسار، و **05** أحرف(لاتينية) على اليمين:

س1: **ثلاث** أرقام **مختلفة؛** **ج1:** $\mathbf{B_1}=A_{10}^3 \times \tilde{A}_2^5$؛

ر3	ر2	ر1	ح1	ح2	ح3	ح4	ح5
8	9	10	26	26	26	26	26

س$_2$: **خمس** أحرف **مختلفة**؛ ج$_2$: $B_2 = \tilde{A}_1^3 \times A_{26}^5$؛

س$_3$: **خمس** أحرف **مختلفة** على اليسار، و **ثلاث** أرقام **مختلفة** على اليمين. ج$_3$: $B_3 = A_{10}^3 \times A_{26}^5$

2.3. الترتيبات بالتكرار: هي كل ترتيبة على k عنصراً مختارة من بين n عنصراً، بحيث يمكن لكل عنصر الظهور أكثر من مرة واحدة. عددها هو: $\tilde{A}$

$= n.n.n. \dots. n = n^k$

مثال$_1$: س: كم لوحة سيارة يمكن تركيبها من 03 أحرف(لاتينية) على اليسار، و 05 أرقام على اليمين.

ج: $B = \tilde{A}_{26}^3 \times \tilde{A}_{10}^5 = (26)^3(10)^4$

ح$_1$	ح$_2$	ح$_3$	ر$_5$	ر$_4$	ر$_3$	ر$_2$	ر$_1$
26	**26**	**26**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**

لأن: الأرقام: 10 إمكانيات في لكل حالة الأحرف: 26 إمكانية لكل حالة

مثال$_2$: بكم كيفية يمكن لـ **3** أشخاص الركوب في قطار من **6** عربات.: $B = \tilde{A}_6^3 = 6\times6\times6=216$

4. التبديلات Les Permutations يرمز لها بـ P

1.4. التبديلات بدون تكرار: هي حالة خاصة من **الترتيبات** بدون تكرار مع $n = k$ و عددها هو $P_n = n!$

مثال$_1$: س: بكم كيفية يمكن لـ 10 طلبة الجلوس على 10 كراسي موجودة على إستقامة واحدة ؟ ج: $B_1=P_{10}=A_{10}^{10}= 10!$

مثال$_2$: كم من كلمة يمكن تكوينها إنطلاقاً من أحرف كلمة **Gestion**. $B_2=A_7^7= 7!$

2.4. التبديلات بالتكرار: هي كل ترتيبة على n عنصراً، مقسمة إلى k فئة، يكون فيها تغيير الأماكن، عدد عناصرها على الترتيب: $n_1, n_2, \dots, n_k$، و

عددها هو :
$$P_n^{n1,n2,\dots,nk} = \frac{n!}{n1!.n2!\dots nk!}$$

مثال$_1$: س: بكم كيفية يمكننا ترتيب 5 كريات حمراء، 7 بيضاء، و 3 صفراء. ج: $P_{15}^{5,7,3} = \frac{A_{15}^{15}}{5!\times7!\times3!} = \frac{15!}{5!\times7!\times3!}$

مثال$_2$: : س: كم من كلمة يمكن تكوينها إنطلاقاً من أحرف كلمة **STATISTIQUE**. ج: $P_{11}^{3,2,2} = \frac{11!}{3!2!2!}$

ملاحظة: - **T** تتكرر 3 مرات، **S** تتكرر 2 مرة،**I** تتكرر 2 مرة،

الفصل الأول

نظرية الاحتمالات

يستخدم الكثير من الأشخاص وفي حالات مختلفة كلمة احتمال ولكن بدرجات مختلفة من الثقة، فإذا قال الطالب مثلا أنه سيحضر محاضرة الإحصاء الوصفي هذا الصباح فهذا يعني أنه متأكد من الحضور، أما إذا قال أنه يحتمل الحضور إلى هذه المحاضرة فهذا يعني أنه قد يحضر وقد لا يحضر، وهنا فإنه لا يمكننا معرفة درجة الثقة في الحضور.

من أجل هذا جاءت الحاجة إلى وضع مقاييس رقمية تبين درجة التأكد وتعوض العبارات التي قد لا تعطي المعنى الدقيق، هذه المقاييس يمكن الحصول عليها من علم الاحتمالات.

تعتبر نظرية الاحتمالات من أهم فروع الرياضيات المعاصرة حيث تستعمل نماذج نظرية الاحتمالات في عدة ميادين كالفيزياء ، الكيمياء والاقتصاد و غيرها...

لقد كانت أمس نظرية الاحتمالات نتيجة لمسيرة طويلة في البحث العلمي، كما ترتكز نظرية الاحتمالات على مجموعة من المبادئ الأساسية.

أولا – التعريف بالمصطلحات

I – التجربة العشوائية:

هي التجربة التي يمكن معرفة جميع نتائجها الممكنة ولكن من غير ممكن معرفة ترتيب حدوث هذه النتائج مسبقا، فمثلا عند رمي قطعة نقود فإننا نعرف أن جميع النتائج الممكنة هي ظهور الوجه الذي عليه الصورة أو الوجه الذي عليه كتابة، غير أنه لا يمكن لأحد أن يؤكد قبل رمي قطعة النقود أن ما يظهر هو الصورة أو الكتابة، وعلى أساس ما سبق فإن رمي قطعة النقود تسمى بالتجربة العشوائية، كذلك فإن رمي زهرة نرد تسمى بتجربة عشوائية، لأن جميع نتائجها هي ظهور أحد الأوجه الستة التي تحمل الأرقام 1،2،3،4،5،6 ولا يمكن لأحد أن يعرف قبل رمي زهرة النرد أي الأوجه سيظهر.

II – فضاء (فراغ) العينة :

فضاء العينة هو جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. سنرمز لفضاء المعاينة بالرمز (Ω) فمثلا فضاء العينة لرمي قطعة نقود هو

$$\Omega = \{A_1, A_2\}$$

حيث: A_1= تمثل ظهور الصورة.

A_2 = تمثل ظهور الكتابة.

وفضاء العينة لرمي زهرة نرد هو $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

ففضاء العينة هو الفئة الشاملة (المجموعة المكونة من جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية).

مثال1:

أوجد فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرتين؟.

الحل: $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$

مثال2:

أوجد فضاء المعاينة وعدد عناصره عند رمي زهرتي نرد متتاليتين؟

الحل:

يمكن الحصول على فضاء العينة انطلاقا من الشكل التالي:

الرمية الثانية						
6	1.6	2.6	3.6	4.6	5.6	6.6
5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5
4	1.4	2.4	3.4	4.4	5.4	6.4
3	1.3	2.3	3.3	4.3	5.3	6.3
2	1.2	2.2	3.2	4.2	5.2	6.2
1	1.1	2.1	3.1	4.1	5.1	6.1
	1	2	3	4	5	6

الرمية الأولى

ويكون فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{(1.1),(1.2),(1.3),(1.4).....(2.1),(2.2)....(6.3),(6.4),(6.5),(6.6)\}$$

أما عدد عناصر هذا الفضاء فهو: $n(\Omega)=36$

III – الحادث (الحادثة):

الحدث هو فئة جزئية من فضاء العينة (الفئة الشاملة)، وتنقسم الحوادث إلى:

- حوادث بسيطة وحوادث مركبة.
- حوادث مستحيلة وحوادث مؤكدة.
- حوادث مستقلة وحوادث متنافية.

1– الحادث البسيط والحادث المركب:

- عند رمي قطعة نقود وكان A يمثل ظهور الصورة فإن $A = \{P\}$

نقول أن A هو فئة جزئية تحتوي على عنصر واحد من فضاء العينة $\Omega = \{P, F\}$

- كذلك عند رمي زهرة نرد وكان الحدث B يمثل ظهور رقم زوجي فإن : $B = \{2.4.6\}$

نقول كذلك أن B هو فئة جزئية تحتوي على ثلاث عناصر من فضاء العينة:

$$\Omega = \{1.2.3.4.5.6\}$$

نسمي الحدثين A و B حدثين بسيطين لأن العناصر الموجودة في كل منهما تعتبر عناصر بسيطة، على خلاف ما سبق فإن الحوادث المركبة هي الحوادث التي تتكون من عناصر مركبة، فمثلا لو رمينا قطعتي نقود في نفس الوقت فإن فضاء المعاينة يكون

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$$

نلاحظ أن كل عنصر من فضاء العينة (Ω) هو عنصر مركب يحتوي على نتيجتين نتيجة على القطعة الأولى، وأخرى على القطعة الثانية، فمثلا الحدث $A=\{(PF)\}$ فيتكون من عنصر مركب واحد هو (P,F) والذي يشير إلى ظهور صورة على القطعة الأولى وكتابة على القطعة الثانية.

2- الحادث المستحيل والحادث الأكيد و العشوائي:

- الحادث المستحيل أو الذي لا يمكن حدوثه هو الحادث الذي لا يحتوي على عناصر، فالحصول على عنصر فاسد من صندوق يحتوي إلا على العناصر الصالحة يعتبر حادث مستحيل.
- أما الحادث الأكيد فهو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر فضاء العينة، فالحصول على كرة بيضاء من صندوق يحتوي إلا على الكريات البيضاء يعتبر حادث أكيد.
- الحادث العشوائي فهو الحادث الذي قد يقع و قد لا يقع عند إجراء تجربة عشوائية فالحصول على ثلاث كرات بيضاء و ثلاثة سوداء من صندوق يحتوي على سبع كرات بيضاء و ثمانية سوداء إذا سحبت منه ست كرات حادث عشوائي.

3 – الحوادث المستقلة والحوادث المتنافية:

إذا كان لدينا حدثين A وB، بحيث الحدث A لا يمنع ولا يؤثر على وقوع الحدث B ووقوع الحدث B لا يمنع ولا يؤثر على وقوع الحدث A فإننا نقول أن الحدثين A وB حدثين مستقلين، أما إذا كان وقوع الحادث A يمنع وقوع الحادث B أو العكس، فإننا نقول أن الحادثين متنافيين (غير متلائمين)، فمثلا عند رمي قطعة نقود فإن ظهور الوجه الذي عليه صورة يمنع ظهور الوجه الذي عليه كتابة، وبالتالي فإن حدث ظهور الصورة وحدث ظهور كتابة يمثلان حدثين متنافيين أي $A\cap B=\Phi$.

4 – الحوادث الشاملة والحوادث المنفصلة:

إذا كان لدينا مجموعة من الحوادث $A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots. A_n$ عند إجراء تجربة عشوائية ما، فإنه يقال لهذه الحوادث السابقة أنها حوادث شاملة إذا كان لا بد من حدوث احدهما عند إجراء هذه التجربة. مثال عند إلقاء زهرة النرد فإن الحوادث البسيطة $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$ تعتبر حوادث شاملة.

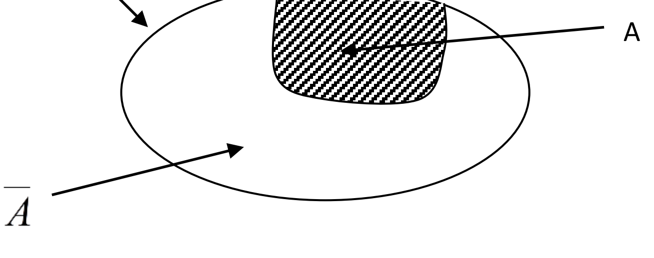
وعندما تكون الحوادث شاملة فإن

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4 \ldots. \cup A_n=\Omega$$

أما الحوادث المنفصلة فهي تلك الحوادث التي لا يوجد عناصر مشتركة بينها. فإذا كان الحدثين A وB منفصلين فإن $A\cap B=\Phi$.

IV – الحادث المكمل (المتمم):

إذا كان الحدث A ينتمي إلى فضاء العينة (Ω) فإن الحدث المكمل له ويرمز بالرمز $\overline{A}$ يتكون من عناصر فضاء العينة (Ω) غير الموجودة في الحادث A كما يظهر في الشكل التالي:



مثال3:

عند رمي زهرة النرد وكان الحدث A يمثل ظهور رقم فردي $A = \{1.3.5\}$

فإن $\overline{A}$ (الحادث المكمل) يمثل ظهور رقم زوجي: $\overline{A} = \{2.4.6\}$

ومنه
$$A \cup \overline{A} = \Omega$$
$$A \cap \overline{A} = \phi$$

مثال4:

قذفت قطعة نقود ثلاثة مرات المطلوب:

1- أكتب فضاء العينة وعدد عناصرها؟

2- أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها؟.

أ) A: الحادث الدال على ظهور صورة في الرمية الأولى.

B: الحادث الدال على ظهور صورة واحدة على الأقل.

C: الحادث الدال على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة؟.

3- أوجد العناصر التالية وعناصر كل منها:

$$A \cap B, A \cup C, \overline{A} \cup \overline{B}$$

الحل:

إن عناصر فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(FPP),(PFF)(FPF)(FFP)(FFF)\}$$

وعدد عناصره n(Ω)=8

2)

أ) $$A = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF)\}$$

n(A)=4

ب)

$$B = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FPP)(FPF)(FFP)\}$$

n(B)=7

ج) $$C = \{(FPP),(FFP)\}$$

n(C)=2

3)

أ)
$$A \cap B = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF)\}$$
$$n(A \cap B) = 4$$

ب)

$$A \cup C = \{(PPP),(PPF),(PFP),(PFF),(FPP),(FPF)\}$$
$$n(A \cup C) = 6$$

ج)

$$\overline{A} = \{(FPP),(FPF),(FFP),(FFF)\}$$
$$n(\overline{A}) = 4$$

$$\overline{B} = \{(FFF)\}$$
$$n(\overline{B}) = 1$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{(FPP),(FPF),(FFP),(FFF)\}$$
$$n(\overline{A} \cup \overline{B}) = 4$$

V- **الحالات:**

1) الحالات المواتية:

هي الحالات التي تؤدي إلى تحقيق حادثة معينة، ففي حالة رمي قطعة نقود فإن ظهور الصورة يعتبر حالة مواتية أو مفضلة إذا كان اهتمامنا هو ظهور الصورة، وفي حالة رمي زهرة نرد فإن ظهور الأوجه التي تحمل الأرقام 2 أو 4 أو 6 تعتبر حالات مواتية أو مفضلة إذا كان اهتمامنا بحادثة ظهور رقم زوجي عند إلقاء زهرة النرد.

2) الحالات المتماثلة (متساوية الفرصة):

إذا قمنا بتجربة عشوائية وكانت جميع نتائج التجربة متساوية الفرصة في الظهور، وتكون المصادفة وحدها هي التي تحدد ذلك فإنه يقال لنتائج التجربة أنها متساوية الفرصة ومتماثلة.

مثال5:

عند رمي قطعة نقود فإن ظهور الصورة (P) مساوية لفرصة ظهور الكتابة (F)، هنا نقول أن ظهور الصورة والكتابة حالتين متماثلتين.

وعند رمي زهرة نرد متجانسة ومنتظمة، فإن ظهور أي وجه من الأوجه الستة تعتبر متماثلة، وكذلك فإن سحب كرة من صندوق به كمجوعة من الكرات متساوية الحجم واللمس هي أيضا حالات متماثلة.

ثانيا – تعريف الاحتمال

إذا كان لدينا تجربة عشوائية جميع نتائجها متماثلة (متساوية الفرصة) في الظهور، وكان فضاء العينة (Ω) يحتوي على عدد من العناصر n(Ω) وكان لدينا حالة A تحتوي على n(A) من العناصر المتماثلة، فإن الاحتمال الكلاسيكي للحادثة A ويرمز له بالرمز P(A) يحسب كالتالي:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

احتمال A = $\dfrac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

وتتراوح قيمة الاحتمال بين الصفر والواحد الصحيح، فالأحداث المستحيلة الوقوع يكون احتمال حدوثها صفرا، والأحداث المؤكدة الوقوع يكون احتمال وقوعها واحد صحيح، أما الحوادث المحتملة الوقوع فاحتمالها يكون ضمن المجال [0،1]، وكلما اقتربت القيمة من الواحد كان احتمال تحقق الحادث أكبر والعكس صحيح.

مثال6:

إذا رميت زهرة نرد عشوائيا، أحسب احتمال ظهور رقم فردي واحتمال ظهور رقم زوجي؟.

الحل:

فضاء العينة

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$n(\Omega) = 6$$

فإذا كانت A تشير إلى حدوث ظهور رقم فردي وB تشير إلى حادث ظهور رقم زوجي فإن:

$$A = \{1,3,5\}, n(A) = 3$$
$$B = \{2,4,6\}, n(B) = 3$$

وبالتالي

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0.5$$
$$P(B) = \frac{3}{6} = 0.5$$

مثال7:

إذا رميت قطعة نقود مرتين، أوجد احتمال الحصول على الوجه الذي عليه صورة مرتين؟

الحل:

فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}, n(\Omega) = 4$$

الحادثة A تمثل ظهور الصورة مرتين وهي:

$$A = \{PP\}, n(A) = 1$$

ومنه فالاحتمال هو

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0.25$$

مثال8:

يحتوي صندوق على 10 عناصر معابة و 8 عناصر غير معابة نسحب عنصر بالصدفة من هذا الصندوق ؟

الحل:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{18} = 0.44$$

مثال09:

إذا بلغ عدد طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتسيير في سنة 2016، 4500 طالب مقسمين إلى 3000 طالب في قسم التسيير و 1500 طالب في قسم الاقتصاد ، وطلب منا اختيار طالب واحد عشوائيا لتمثيل طلبة الكلية في إحدى المسابقات، ما هو احتمال أن يكون هذا الطالب من قسم الاقتصاد وما هو احتمال أن يكون من قسم التسيير؟

الحل:

احتمال أن يكون الطالب من قسم الاقتصاد = $P(B) = \frac{1500}{4500} = \frac{1}{3}$

احتمال أن يكون الطالب من قسم التسيير = $P(B) = \frac{3000}{4500} = \frac{2}{3}$

ثالثا – خواص الاحتمال

تعتبر الخواص التالية بمثابة الأساس الذي تبنى عليه نظريات الاحتمال:

1) إذا كان الحادث A فئة جزئية من فضاء العينة (Ω) أي $(A \subset \Omega)$ فإن $1 \geq P(A) \geq 0$

- فاحتمال الحادث المستحيل (الذي بطبيعته لا يمكن أن يحدث) هو $P(A)=0$ وكمثال على ذلك احتمال سحب كرة سوداء من صندوق جميع كراته بيضاء.

- واحتمال الحادث الأكيد يساوي الواحد الصحيح $P(A)=1$ ، كاحتمال سحب كرة بيضاء من صندوق جميع كراته البيضاء.

2) إذا كانت الأحداث $A_1,A_2,A_3,A_4,\ldots\ldots\ldots A_n$ سلسلة من الأحداث المتنافية في فضاء العينة Ω أي $(Ai \cap Aj = \phi, i.j = 1,2,3,4.....n, i \neq j)$

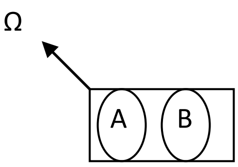
فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...P(A_n)$$

وباختصار نكتب

$$\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} Ai) = \sum_{i=1}^{n} P(Ai)}$$

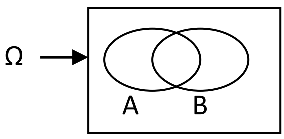
ومنه إذا كانت $A \cap B = \phi$ فإن



$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

حيث B,A حادثين متنافيين و هذا ما يسمى **بقانون الجمع**

3) إذا كان A وB حادثين غير متنافيين



فإن

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

مثال10:

إذا كان عدد طلبة السنة الثالثة LMD علوم اقتصادية وعلوم التسيير 130 طالب وطالبة منهم

- 50 طالب وطالبة يدرسون مادة الرياضيات كمادة اختيارية.
- 60 طالب وطالبة يدرسون مادة الإحصاء كمادة اختيارية أخرى.
- ما هو احتمال أن نختار طالب يدرس الرياضيات أو الإحصاء.

الحل:

إذا كانت A تمثل أن الطالب يدرس الرياضيات و B تمثل أن الطالب يدرس الإحصاء.

فإنه واضح أن الحادثتين متنافيين فإن:

احتمال اختيار طالب يدرس الرياضيات أو الإحصاء = احتمال طالب يدرس الرياضيات + احتمال طالب يدرس الإحصاء.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

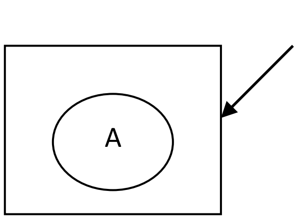
$$P(A \cup B) = \frac{50}{130} + \frac{60}{130} = \frac{110}{130}$$

مثال11:

في المثال السابق إذا كان هناك 30 طالب وطالبة يدرسون المادتين معا (الرياضيات والإحصاء)، في هذه الحالة فإن الحدثين A وB تصبح غير متنافية وبالتالي فإن احتمال اختيار طالب يدرس الرياضيات أو الإحصاء = احتمال طالب يدرس الرياضيات + احتمال طالب يدرس الإحصاء – احتمال طالب يدرس الرياضيات والإحصاء معا

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{50}{130} + \frac{60}{130} - \frac{30}{130} = \frac{80}{130}$$



4) إذا كان الحادث A ينتمي إلى الحدث B $(A \subset B)$

فإن:

$$P(A) < P(B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(B)$$

مثال12:

لدينا 90 بطاقة مكتوب عليها الأرقام من 1 إلى 90.

المطلوب:

1) ما هو احتمال سحب بطاقة تحمل رقما من مضاعفات رقم 2؟.

2) ما هو احتمال سحب بطاقة تنتهي بالرقم 3؟

3) ما هو احتمال سحب بطاقة تحمل رقما من مضاعفات 5؟.

4) ما هو احتمال سحب بطاقة تحمل رقما من مضاعفات 2 أو تنتهي بالرقم 3؟ لماذا؟.

5) ما هو احتمال سحب مضاعفات الرقم 2 أو 5 من نفس اللعبة.

الحل:

1) احتمال سحب بطاقة تحمل رقما من مضاعفات الرقم 2 = $\frac{45}{90}=0.5$.

2) احتمال سحب بطاقة تحمل رقما ينتهي بـ3 = $\frac{11}{90}=0.12$.

3) احتمال سحب بطاقة تحمل رقما من مضاعفات الرقم 5 = $\frac{18}{90}=0.2$.

4) مجموع البطاقات التي تحمل أرقاما من مضاعفات 2 أو تنتهي بالرقم 3 يساوي 45+11 وبالتالي فإن:

احتمال سحب ورقة تحمل رقما من مضاعفات 2 أو تنتهي بالرقم 3 = $\frac{56}{90}=0.011$

فالحادثين متنافيين (لأن الرقم الذي ينتهي بـ3 لا يمكن أن يكون من مضاعفات 2)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

حيث A يمثل حادث سحب ورقة تحمل رقما من مضاعفات 2 و B يمثل حادث سحب ورقة تحمل رقما من مضاعفات 3.

5) لدينا 45 بطاقة تحمل أرقاما من مضاعفات 2 واحتمال سحبها =0.5

ولدينا 18 بطاقة تحمل أرقاما من مضاعفات 5 واحتمال سحبها = 0.2

ولكننا نلاحظ أن هناك بطاقات وعددها 9 تحمل أرقاما هي من مضاعفات 2 في نفس الوقت هي من مضاعفات 5، وبالتالي فإن:

احتمال سحب بطاقات تحتوي على أرقام من مضاعفات 2 أو 5 هو

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{45}{90}+\frac{18}{90}-\frac{9}{90}=\frac{54}{90}=0.6$$

5) إذا كان الحادث $\overline{A}$ هو متمم الحادث A أو الحادث **العكسي** في فضاء العينة (Ω) فإن $P(\overline{A})=1-P(A)$ ومنه

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

مثال13:

قذفت قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية في الهواء

المطلوب: أحسب احتمال الحصول على Pمرة واحدة على الأقل بطريقتين:

الحل:

إن عناصر فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(FPP),(PFF)(FPF)(FFP)(FFF)\}$$

وعدد عناصره $n(\Omega)=8$

الطريقة الأولى:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{7}{8}=0.875$$

الطريقة الثانية:

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

$\overline{A}$: هو الحصول على F ثلاث مرات متتالية

$$P(\overline{A})=\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)}=\frac{1}{8}=0.125$$

إذن

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

6) احتمال الحوادث المستقلة: (أي تلك الحوادث التي يؤثر وقوع أحدها على وقوع الآخر)

إذا كان الحدثين A_1 وA_2 حدثين مستقلين فإن:

$$P(A_1,A_2)=P(A_1\cap A_2)=P(A_1).P(A_2)$$

و هذا ما يسمى **بقانون الضرب**

وبصفة عامة إذا كانت لدينا عدد من الحوادث المستقلة $A_1,\ A_2,A_3,A_4\ \ldots.A_n$ فإن احتمال وقع هذه الأحداث معا هو :

$$\boxed{P(A_1,A_2,A_3.......An)=\bigcap_{j=1}^{N}P(Ai)}$$

7) احتمال الحوادث غير المستقلة : (أي تلك التي يؤثر وقوع أحدها على وقوع الآخر).

إذا كان لدينا صندوق به 8 كرات بيضاء و6 كرات سوداء وسحبنا عشوائيا كرة من هذا الصندوق وسجلنا لونها ثم سحبنا كرة أخرى وسجلنا لونها، وأستمرينا في القيام بهذه العملية عدد من المرات (أي السحب بدون إرجاع) فإن احتمالات السحب لا تكون ثابتة في كل مرة، فعند سحب الكرة الأولى فإن احتمال أن يكون لونها أبيض = $\frac{8}{14}$، أما احتمال أن يكون لون الكرة الثانية أبيض فهو $\frac{7}{13}$،

واحتمال أن يكون لونها أسود فهو $\frac{6}{13}$.

في مثل هذه الحالات التي لا نرجع فيها الكرات المسحوبة للصندوق، فإن نتائج السحب السابقة تؤثر على نتائج السحب اللاحقة، وعندها نقول أن الحوادث **غير مستقلة**.

فإذا كانت A_1, A_2 حدثين في فضاء العينة (Ω) أي $(\Omega \subset A_1, A_2,)$، وكان وقوع الحدث A_1 يتوقف على وقوع الحدث A_2فإن احتمال وقوع الحدث A_1 بشرط وقوع الحدث A_2 يسمى **بالاحتمال الشرطي** ويرمز له بالرمز $P(A_1/A_2)$، ويقرأ احتمال وقوع الحدث A_1 بشرط وقوع الحدث A_2، يسمى الحدث A_1 بشرط وقوع الحدث A_2 بالحدث القبلي ويسمى الحدث (A_1/A_2) بالحدث البعدي، ويتم حساب $P(A_1/A_2)$ وفقا للمعادلة

$$P(A_1 / A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} ; P(A_2) > 0$$

وبالمثل

$$P(A_2 / A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} ; P(A_1) > 0$$

من المعادلتين السابقتين نستنتج:

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1/A_2).P(A_2) = P(A_2/A_1).P(A_1)}$$

مثال14:

قذفت قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية في الهواء، علما أن نتيجة الرمية الأولى كانت P ، فماهو احتمال الحصول على P في رميتين فقط و متواليتين

الحل:

إن عناصر فضاء العينة هو:

$$\Omega = \{(PPP),(PPF),(PFP),(FPP),(PFF)(FPF)(FFP)(FFF)\}$$

وعدد عناصره $n(\Omega)=8$

A_2: الحصول على P في الرمية الأولى

A_1: الحصول على P مرتين فقط و متواليتين

- حساب $P(A_1/A_2)$:

$$P(A_1 / A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} \text{،} \quad P(A_2) = \frac{n(A_2)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = 0.5$$

$P(A_1 \cap A_2) = 1/8$

$$P(A_1 / A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

مثال15: الجدول التالي يبين توزيع طلبة كلية العلوم الاقتصادية على السنوات الدراسية المختلفة في كل من قسمي التسيير والاقتصاد:

السنة / القسم	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة	المجموع
التسيير	300	180	150	100	730
الاقتصاد	500	320	250	180	5250
المجموع	800	500	400	280	1980

المطلوب: أحسب الاحتمالات التالية:

1) احتمال اختيار طالب من السنة الأولى، احتمال اختيار طالب من السنة الثانية، احتمال اختيار طالب من السنة الثالثة، احتمال اختيار طالب من السنة الرابعة.

2) احتمال اختيار طالب من قسم التسيير بشرط أن يكون مسجل في السنة الأولى؟

3) احتمال اختيار طالب من السنة الأولى بشرط أن يكون من قسم التسيير.

4) احتمال اختيار طالب من قسم الاقتصاد مسجلا في السنة الرابعة؟.

الحل:

إذا افترضنا أن الأحداث A_4,A_3,A_2,A_1 تمثل اختيار طالب من السنة الأولى والسنة الثانية والسنة الثالثة والسنة الرابعة على التوالي فإن:

$$P(A_1)=\frac{800}{1980}=0.404\ P(A_2)=\frac{500}{1980}=0.252$$
$$P(A_3)=\frac{400}{1980}=0.202\ P(A_4)=\frac{280}{1980}=0.141$$

2) إذا افترضنا أن B تمثل اختيار طالب من قسم التسيير فإن الحدث B/A_1 يمثل اختيار طالب من قسم التسيير بشرط أن يكون مسجلا في السنة الأولى، في هذه الحالة فإنه يكون الحدث القبلي هو A_1 (أي اختيار طالب من السنة الأولى) والحدث البعدي (B/A_1) أي اختيار طالب من قسم التسيير بشرط يكون مسجلا في السنة الأولى وبالتالي:

$$P(B/A_1)=\frac{P(B\cap A_1)}{P(A_1)}=\frac{\frac{300}{1980}}{\frac{800}{1980}}=\frac{300}{800}=\frac{3}{8}$$

3) كذلك احتمال اختيار طالب من السنة الأولى بشرط أن يكون مسجل في قسم التسيير $P(A_1/B)$، فإن الحدث القبلي هنا هو B (أن يكون الطالب من قسم التسيير) والحدث البعدي هو (A_1/B) أي اختيار طالب من قسم التسيير بشرط أن يكون في السنة الأولى.

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{300}{1980}}{\frac{730}{1980}}=\frac{300}{730}$$

ونلاحظ أن $P\ (A_1/B) \neq P(B/A_1)$

4) بالمثل اختيار طالب من قسم الاقتصاد بشرط أن يكون مسجلا في السنة الرابعة هو $P(\overline{B}/A_4)$ حيث

$$P(\overline{B}/A_4)=\frac{P(\overline{B}\cap A_4)}{P(A)}=\frac{\frac{180}{1980}}{\frac{280}{1980}}=\frac{180}{280}$$

رابعا – نظرية الاحتمالات الكلية و نظرية بايز

1– نظرية الاحتمالات الكلية:

نعتبر صندوقين U_1،U_2 بحيث يحتوي الصندوق U_1 على b_1 كرة بيضاء و n_1 كرة سوداء، أما الصندوق U_2 فيحتوي b_2 كرة بيضاء و n_2 كرة سوداء، نسحب كرة بالصدفة عبر مرحلتين:

- اختيار أحد الصندوقين U_1 احتمال P_1 و U_2 باحتمال P_2 بحيث $P_1+P_2=1$
- نسحب كرة بالصدفة من الصندوق المختار في المرحلة الأولى ثم حساب احتمال الحصول على كرة بيضاء.

A: الحصول على كرة بيضاء

$$P(A)=P(A/U_1).P(U_1)+P(A/U_2).P(U_2)$$

إذا كانت لدينا الحوادث $A_1,A_2,\ldots.A_n$ حوادث منفصلة من فضاء العينة Ω، و من أجل كل $P(A_i)\succ 0$,i=1,2,3…n

$$P(B)=\sum P(B/A_i).P(A_i)$$

مثال15:

يجبر طالب على اجراء امتحان شفهي عند أحد الأساتذة الثلاث E_1,E_2,E_3 إن حظوظ نجاحه عند الأستاذ E_1 هي 60% ، عند الأستاذ E_2 هي50% وعند الأستاذ E_3 هي30%

نفترض أن حظوظ اجتيازه للامتحان عند أحد الأساتذة الثلاثة متساوية.

- أحسب احتمال نجاحه

الحل:

$$P(A)=P(A/E_1).P(E_1)+P(A/E_2).P(E_2)+P(A/E_3).P(E_3)$$

$$P(A)=0.6.\,{}^{1}\!/_{3}+0.5.\,{}^{1}\!/_{3}+0.3.\,{}^{1}\!/_{3}=0.46$$

مثال16:

ينقسم مصنع إلى ثلاثة أقسام ، ينتج القسم الأول 35% من المنتوج الكلي للمصنع ، أما القسم الثاني فينتج 25% من جملة المنتوج الكلي للمصنع أما القسم الثالث فينتج 40% من جملة المنتوج الكلي للمصنع، نسبة المنتوج المعاب في القسم الأول هي 10% و في القسم الثاني هي 12 % و في القسم الثالث هي 7%

- أحسب المنتوج المعاب؟

نسبة المنتوج المعاب= احتمال الحصول على قطعة معابة إذا سحبت من المنتوج

$$P(A) = P(A/1).P(1) + P(A/2).P(2) + P(A/3).P(3)$$

$$P(A) = 0{,}1.0{,}35 + 0{,}12.0{,}25 + 0{,}07.0{,}4 = 0{,}035 + 0{,}03 + 0{,}028 = 0{,}093$$

2- نظرية بايز Bayes:

تحت فرضيات النظرية السابقة و مهما كانت A_j حدث من Ω بحيث $P(B)\neq 0$ فإن:

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j) \times P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_j) \times P(B/A_j)}$$

مثال17:

نفس معطيات المثال السابق، إذا اشترى شخص قطعة من منتوج المصنع و ظهر أنها معابة.

- أحسب احتمال انجازها في القسم الثاني.

الحل:

$$P(2/A) = \frac{P(2) \times P(A/2)}{P(A)}$$

$$P(2/A) = \frac{0{,}12 \times 0{,}25}{0{,}093} = 0{,}32$$

مثال18:

في مصنع لإنتاج نوع معين من المصبرات نجد أن:

الآلة الأولى تنتج 40% من المنتج مع العلم أن 1.5% من إنتاجها معاب.

الآلة الثانية تنتج 25% من المنتج مع العلم أن 1.2% من إنتاجها معاب.

الآلة الثالثة تنتج 35% من المنتج مع العلم أن 2% من إنتاجها معاب.

فإذا اخترنا وحدة من الإنتاج اليومي بشكل عشوائي أحسب الاحتمالات التالية:

1) احتمال أن تكون الوحدة معابة؟

2) إذا كانت الوحدة المسحوبة معابة فما هو احتمال:

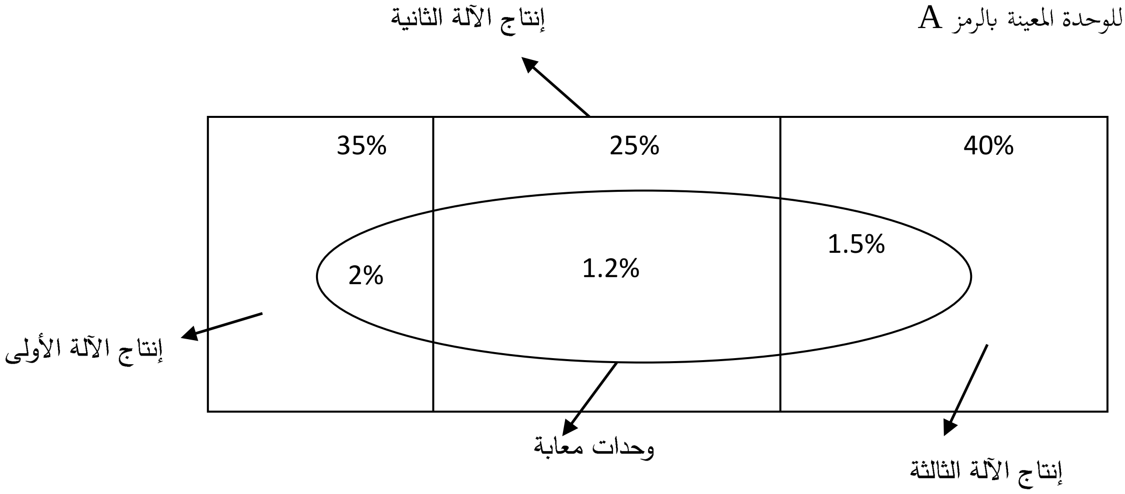
أ) أن تكون من إنتاج الآلة الأولى (A_1).

ب) أن تكون من إنتاج الآلة الثانية (A_2).

ج) أن تكون من إنتاج الآلة الثالثة (A_3).

الحل:

نرمز للوحدة المعينة بالرمز A



$$P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.25, P(A_3)=0.35$$
$$P(A/A_1)=0.015$$
$$P(A/A_2)=0.012$$
$$P(A/A_3)=0.02$$
$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(Ai).P(A/Ai)$$
$$=0.4\times 0.015+0.25\times 0.012+0.35\times 0.02=0.016$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الأولى بشرط أن تكون معابة $P(A_1/A)$

$$P(A_1/A)=\frac{P(A_1).P(A/A_1)}{P(A)}=\frac{0.4\times 0.015}{0.016}=0.375$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الثانية بشرط تكون معابة $P(A_2/A)$

$$P(A_2/A)=\frac{P(A_2).P(A/A_2)}{P(A)}=\frac{0.25\times 0.012}{0.016}=0.1875$$
$$P(A_3/A)=0.4375$$

- احتمال الحصول على وحدة من الآلة الثالثة بشرط تكون معابة $P(A_3/A)$

$$P(A_3/A)=\frac{P(A_3).P(A/A_3)}{P(A)}=\frac{0.35\times 0.02}{0.016}=0.4375$$

قائمة 01: التحليل التوافقي،

و نظرية الاحتمالات

***تمرين1:**

نعتبر أن هناك الثلاث حوادث التالية : A، B، C من فضاء العينة Ω. بحيث:

$A = \{2,4,6\}$

$B = \{1,3,5\}$

$C = \{3,6\}$

1- الحوادث الثلاثة تقع.

2- لا يقع أي حادث من بين الثلاثة.

3- يقع الحادثان A، و C فقط.

4- يقع حادث واحد على الأقل من بين الثلاثة.

***تمرين2:**

يحتوي صندوق على (30) تفاحة منها (05) فاسدة. نسحب من هذا الصندوق (06) تفاحات. أحسب احتمال الحصول على:

1- (05) تفاحات صالحة

2- (04) تفاحات صالحة على الأقل.

3- (03) تفاحات فاسدة على الأكثر.

***تمرين3:**

أجريت دراسة إحصائية بأحد المناطق حول عينة مكونة من 200 شخص، لمعرفة العلامة التجارية (من بين اثنتين هما *Djezzy* و *Nedjma*) التي يستفيدون من خدماتها. فتحصلنا على النتائج التالية:

[110] يستعملون *Djezzy*.، [60] يستعملون فقط *Nedjma*.،[40] يستعملون العلامتين.

نختار [10] أشخاص عشوائياً (بالصدفة). أحسب احتمال أن يكون عدد الأشخاص الذين:

1- يستعملون العلامة *Nedjma* هو [06].

2- لا يستعملون أي من العلامتين هو [04].

3- يستعملون العلامة *Nedjma* لا يقل عن [03].

4- يستعملون علامة واحدة أقل عن (لا يزيد) [08].

***تمرين4:**

بحوزتنا [12] الورقة، تحمل كل واحدة منها حرفا من بين الحروف التالية :{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l}. نختار منها عشوائياً ورقة ثم نسجل الحرف الظاهر عليها، ثم نختار ورقة ثانية و نسجل الحرف الظاهر عليها، ... ، و هكذا حتى نشكل كلمة مكونة من خمس أحرف.

أ/ الإختيار في كل مرحلة يتم دون إرجاع الورقة المحصل عليها في المرحلة السابقة.

ب/ الإختيار في كل مرحلة يتم بعد إرجاع الورقة المحصل عليها في المرحلة السابقة.

اعتبر كل حالة على حدى، ثم أحسب احتمال وقوع الحوادث التالية:

A- الحروف a, d, e, i, l هي حروف الكلمة المحصل عليها.

B- **ideal** هي الكلمة المحصل عليها.

C- الحرف b يظهر مرة واحدة و واحدة فقط ضمن الكلمة المحصل عليها.

D- الحرف b يظهر مرة واحدة على الأقل ضمن الكلمة المحصل عليها.

E- الأحرف a, b, c تأتي متتابعة و تظهر مرة واحدة فقط ضمن الكلمة المحصل عليها.

F- الأحرف a, b, c هي الأحرف الأولى هي التي تظهر في الكلمة المحصل عليها.

***تمرين5:**

تريد وكالة سفر اختيار [06] عواصم دول من بين [12] العاصمة مرقمة من **1** إلى **12** لتنظيم دورة سياحية من [06] مراحل متتالية، بحيث يتم زيارة العاصمة مرة واحدة فقط خلال كل مرحلة. أحسب احتمال وقوع الحوادث التالية:

A – العاصمة **2** تكون نقطة بداية الدورة السياحية.

B – العواصم **2**، **4**، **5**، **10**، تكون متتابعة خلال الدورة السياحية.

C – العاصمة الــ **5**، تأتي مباشرة بعد العاصمة الــ **4** خلال الدورة السياحية.

D – الدورة السياحية لا تشمل العاصمتين **4** و **5**. هل الحادثان A و D مستقلان ؟

***تمرين6:**

بحوزتنا [06] مفاتيح نوزعها بالصدفة على [08] علب مرقمة من **1** إلى **8**، بحيث يمكن لكل علبة أن تضم أكثر من مفتاح واحد. أحسب احتمال وقوع الحوادث الآتية:

A – العلب **3**، و **4** خالية من المفاتيح.

B – كل من العلب: **1**، **2**، **5**، **6**، **7**، **8** تضم مفتاحاً واحدا و واحدا فقط.

C – العلبة **5** تضم [04]، و العلبة الــ **7** تضم [02].

* أحسب إحتمال $(A \cap B)$.

تمرين7:

زود باب معين بلوحة مفاتيح تحمل الأزرار التالية:{**a, b, c, d**، **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** }. تفتح الباب إذا تم الضغط على [03] أرقام و **حرفين** [02] على الترتيب و التي تُكَوِّنْ مفتاحاً. الأرقام مختلفة أما الحرفان فمن الممكن أن يكونا متشابهين.

أحسب إحتمال أن يفتح شخصاً ما الباب في المحاولة الأولى إذا:

A – ضيع كل المفتاح.

B – تذكر أن الأرقام في المفتاح زوجية.

C – تذكر أن الحرفين متشابهين.

D– تذكر أن الرقم الأول في المفتاح هو [5] و الحرف الأخير هو الــ **D**.

***تمرين8:**

يتميز منتوج مصنع بالعيبين A و B. نسبة العيب **A** في المنتوج هي [25%]، و نسبة العيب **B** في المنتوج هي [10%]، أما نسبة المنتوج الخال من العيبين فهي [68%].

1- ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بعيب واحد على الأقل ؟

2- ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيبين معاً ؟ هل العيبين مستقلين عن بعضهما البعض ؟

3- ما هي نسبة المنتوج الذي يتميز بعيب واحد فقط ؟

***تمرين9:**

أجريت عملية لصبر الأراء في مدينة معينة حول اقتراحين جديدين، يتعلق الأول بتسديد القروض، و الثاني بصيغة لبيع السكنات، فأعطت النتائج التالية: نسبة الموافقين على الإقتراح الأول هي [70%]، نسبة الموافقين على الإقتراح الثاني هي [45%]، من بين الموافقين على الإقتراح الأول [40%] وافقوا على الإقتراح الثاني.

1- من بين الموافقين على الإقتراح الثاني ما هي نسبة الموافقين على الإقتراح الأول ؟

2- ما هي نسبة الموافقين على الإقتراح الأول فقط ؟

3- ما هي نسبة الذين لم يوافقوا على أي إقتراح ؟

4- ما هي نسبة الذين وافقوا على الأقل على اقتراح واحد ؟

5- ما هي نسبة الذين وافقوا على اقتراح واحد و لم يوافقوا على الآخر ؟

***تمرين10:**

ينتج مصنع نوعا من الساعات، البعض منها قد يظهر عليه العيب (x) أو العيب (y). دراسة إحصائية أجريت على (10000) ساعة أعطت النتائج التالية.

- [10%] من الساعات قد يظهر عليها العيب (x).
- من بين الساعات التي يظهر عليها العيب (x)، [12%] منها يظهر عليها العيب (y).
- من بين الساعات التي لا يظهر عليها العيب (x)، [5%] منها يظهر عليها العيب (y).

1- إملء الجدول التالي:

عدد الساعات	فيها العيب (x)	ليس فيها العيب ($\bar{x}$)	المجموع
فيها العيب (X)			
ليس فيها العيب ($\bar{X}$)			
المجموع			

2- نختار بالصدفة ساعة واحدة. أحسب احتمال الحوادث:

A- الساعة يظهر عليها العيب (x).

B- الساعة يظهر عليها العيب (y).

C- الساعة لا يظهر عليها أي عيب .

***تمرين11:**

أجرت مؤسسة مختصة في صناعة الورق دراسة اهتمت فيها بمعيارين هما: الاحتياجات، و القدرة على التمويل.

- [35%] من الزبائن يستعملون أقل من (12 طن) من الورق سنوياً، و [80%] منهم قادرون على التسديد.
- [40%] من الزبائن يستعملون ما بين (12 طن و 20 طن) من الورق سنوياً، و [85%] منهم قادرون على التسديد.
- أما ما تبقى من زبائن فـ [10%] منهم غير قادرين على التسديد. **ما هي نسبة الزبائن الغير قادرين على التسديد ؟**

***تمرين12:**

يوجد بمنطقة معينة [45%] من القوة العاملة رجال. نعلم كذلك أنه [5%] رجال و [4%] نساء من هذه القوة العاملة بطالين.

1- ما هي نسبة البطالين في هذه المنطقة ؟

2- أختير شخصاً بالصدفة من سكان المنطقة و ظهر بأنه بطال، ما هو احتمال أن يكون رجلاً ؟

الفصل الثاني

المتغير العشوائي

أولا– المتغير العشوائي المتقطع وتوزيعه الاحتمالي

مسألة: أجريت دراسة على 1000 طفل أصيب خلال السنوات الثلاث الأولى من عمره بمرض ما. بينت الدراسة أن احتمال الإصابة مرتبط بالزمن (X: السنة) من خلال دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

✓ أحسب احتمال أن تكون إصابة طفل مختار عشوائيا من العينة المدروسة في السنة الأولى.

يعالج المرض لمدة شهر، شهر ونصف، أو 3 أشهر حسب الجدول التالي:

X الأشهر	1	1.5	3
الاحتمال	0.5	0.3	0.2

✓ أحسب احتمال أن تكون مدة علاج طفل من العينة شهر ونصف على الأكثر.

I – مفهوم المتغير العشوائي

هو قيمة متغيرة يلحق بقيمها احتمالات تحقق كل قيمة. يرمز للمتغير ع بحرف لاتيني كبير. ونميز بين م ع المتقطع وم العشوائي المتصل أو المستمر.

مثال : في تجربة إلقاء مكعب نرد يمكن أن نسمي الوجه الذي يستقر عليه الكعب متغيرة عشوائية X. القيم الممكنة لX هي: 1، 2، 3، 4، 5، 6. بكل قيمة يمكن أن نلحق احتمال تحققها، وهو هنا 1/6. ونكتب مثلا :

$$P(X = 1) = f(1) = 1/6,\ \ P(X = 2) = f(2) = 1/6\ ,\ldots$$

لاحظ أن القيم الممكنة ل X (1، 2، 3، 4، 5، 6) هي متنافية، ولذلك فإن مجموع احتمالاتها يساوي 1.

$$\sum_{x=1}^{6} P(X = x) = 1$$

مثال 2. في تجربة إلقاء قطعة نقدية مرتين يمكن أن نعين المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات الحصول على كتابة. في هذه الحالة القيم الممكنة ل X هي 0، 1، 2. لا حظ أنه يمكن تعيين متغيرات عشوائية أخرى انطلاقا منن نفس التجربة، مثلا Y عدد مرات الحصول على صورة، وهي متغير تأخذ القيم 0، 1، 2، ثم المتغيرة Z بحث Z = X – Y ...

القيم الممكنة ل X هي 0، 2، -2. الاحتمالات الملحقة بقيمها يمكن حسابها كما يلي:

$$P(Z = 0) = P(X – Y = 0) = P(X = 0 \text{ et } Y = 0 \text{ ou } X = 1 \text{ et } Y = 1 \text{ ou } X = 2 \text{ et } Y = 2) \Rightarrow$$

$$P(Z = 0) = 0 + P(X = 1 \text{ et } Y = 1) + 0 = 2 * 0.5^2 = \mathbf{0.5}$$

II – المتغير العشوائي المتقطع

و يسمى أيضا م ع منفصل، وهو الذي يأخذ عددا منتهيا من القيم الممكنة في مجال مغلق.

مثال: داخل المجال المغلق [2, 5] المتغير X المعرف في المثال الأول يأخذ 4 قيم ممكنة.

1- التوزيع الاحتمالي للمتغير المتقطع

هو مجموعة القيم الممكنة مع الاحتمالات المرتبطة بقيم المتغير. نرمز للمتغير بحرف كبير وللقيم التي تأخذها المتغير بحرف صغير. نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$. وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية.

مثال: التوزيع الاحتمالي لم ع للمثال الأول (إلقاء مكعب نرد) يكتب كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6	المجموع
P(X = x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

مثال 2. التوزيع الاحتمالي ل X، عدد مرات الصورة في رميتين لقطعة نقدية:

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	2/4	1/4	1

2- شروط دالة الكثافة للمتغير المتقطع

نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $P(X = x)$ ونكتب أيضا : $f(x)$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية. لكي يمكن اعتبار دالة ما، أيا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب أن يتحقق شرطان اثنان:

1) $f(x) \geq 0$

2) $\sum_x f(x) = 1$

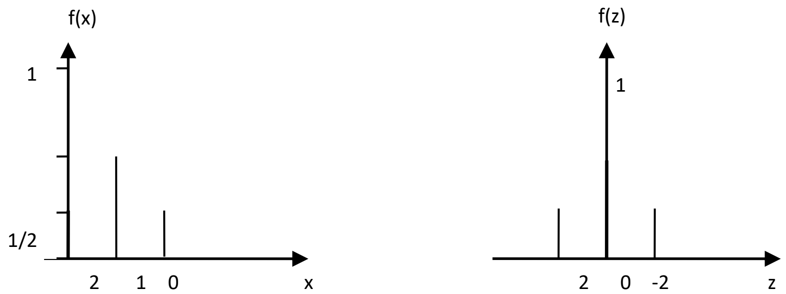
مثال: نأخذ دالة الكثافة ل X نتيجة لإلقاء حجر نرد: $f(1) = f(2) = f(3) = \ldots f(6) = 1/6 \geq 0$,

الشرط الأول محقق، والشرط الثاني أيضا لأن: $\Sigma f(x) = 1/6 + 1/6 + \ldots + 1/6 = 6(1/6) = 1$

3- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ل م ع المتقطع

تمثل المتغيرة العشوائية المتقطعة ليس من خلال منحنى ولكن من خلال أعمدة متوازية على محور X.

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة ل X و Z المعرفة على إلقاء قطعة نقدية مرتين.



التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغير العشوائي المتقطع

4- دالة التوزيع F(x) للمتغير العشوائي المتقطع

تعرف دالة التوزيع – وتسمى أيضا "الدالة التجميعية" –كما يلي:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية f(x) كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)$$

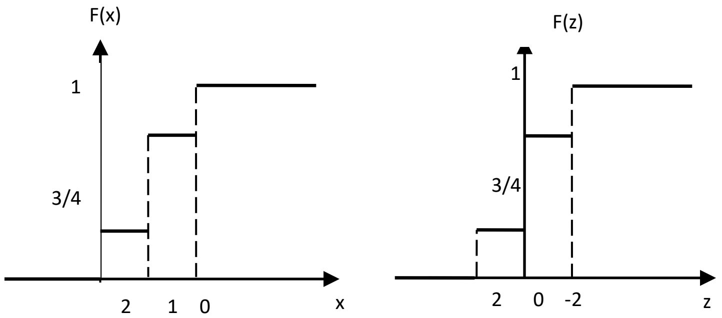
إذا كانت X تأخذ عددا منتهيا من القيم فإن F(x) يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & , \quad x_2 \leq x < x_3 \\ \cdots & \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \quad x_n \leq x < +\infty \end{cases}$$

مثال: أوجد قيم F(x) وF(z) للأمثلة السابقة ومثلهما بيانيا.

X	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1

Z	-2	0	2
f(x)	1/4	1/2	1/4
F(x)=P(X≤x)	1/4	3/4	1



التمثيل البياني لدالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع

ملاحظة. تأخذ دالة التوزيع للم ع المتقطع شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

ثانيا– المتغير العشوائي المستمر وتوزيعه الاحتمالي

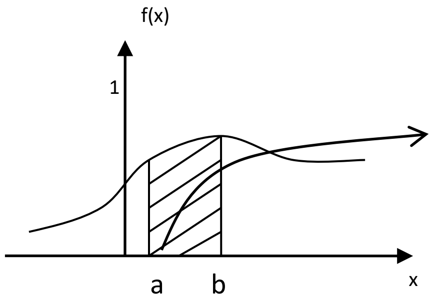
I – تعريف المتغير العشوائي المستمر

هو متغير ع يأخذ عددا لا متناهيا من القيم في مجال محدود، أو هو يأخذ أي قيمة داخل هذا المجال. من أجل هذا فأن وحدات قياس المتغير المستمر تكون مستمرة مثل الزمن، الوزن، المسافة، الحجم، ...

1– التوزيع الاحتمالي المستمر

هو مجموعة القيم التي يمكن أن تأخذها المتغيرة ع المستمرة والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية أو دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.

لاحظ أنه بما أن X تأخذ عددا لا متناهيا من القيم داخل أي مجال، فإن احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول إلى الصفر.$P(X=x) \rightarrow 0$ لذلك فإن دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى f(x) بين حدود المجال.



التمثيل البياني لدالة الكثافة للمتغير العشوائي المستمر

$$\boxed{P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx}$$

لاحظ أن إشارة التكامل هنا تقابل إشارة المجموع في حالة المتغير ع المتقطع.

2– خصائص دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة

باستبدال إشارة التكامل بإشارة المجموع نجد أن شروط دالة الكثافة الاحتمالية للم ع المستمر تكتب كما يلي :

$$1)\ f(x) \geq 0$$

$$2)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

من البديهي إذا أن منحنى دالة الكثافة لا يمكن أن ينزل أسفل محور الم ع، كما أن المساحة الإجمالية بين المنحنى والمحور الأفقي تساوي الواحد.

هذه الخصائص تفيدنا في حساب احتمالات بعض المجالات من خلال احتمالات مجالات أخرى.

مثال: أوجد قيمة الثابت C التي تحقق الشرطين الأول والثاني لدالة الكثافة الاحتمالية في الدالة التالية:

- ✓ أحسب احتمال أن تكون X تنتمي للمجال من 1 إلى 2.
- ✓ أحسب احتمال أن تكون X لا تنتمي للمجال من 1 إلى 2.

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 => \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^3 Cx^2dx + \int_3^{+\infty} 0dx = 1 => C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9C = 1 => C = 1/9$$

لكي تكون x دالة كثافة يجب أن يكون $C = 1/9$.

$$P(1 < x \le 2) = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (1/9)x^2 dx = \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{9}\left[\frac{8-1}{3}\right] = \frac{7}{27}$$

$$P(1 > x > 2) = 1 - P(1 < x < 2) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

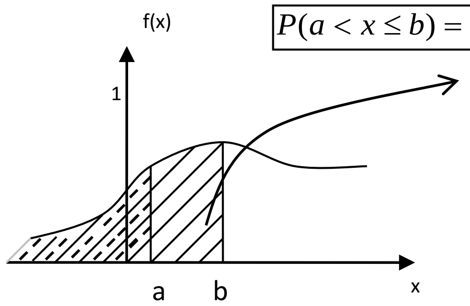
3- دالة التوزيع F(x) للمتغيرة العشوائية المستمرة

تعرف دالة التوزيع للمتغيرة المستمرة كما يلي:

$$\boxed{F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du}$$

لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغيرة المستمرة. السبب في ذلك أننا نهتم، في حالة المتغيرة المستمرة، باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأيسر التعويض في دالة التوزيع بدلا من حساب التكامل في كل مرة. يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض a, b نقطتان من مجال تعريف X، بحيث b > a . لحساب احتمال أن تكون X تنتمي إلى المجال]a, b] :

$$\boxed{P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)}$$



حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

مثال:

أوجد دالة التوزيع للمتغيرة المذكورة في المثال السابق.

استخدم دالة التوزيع لحساب الاحتمال: P(1< x <2).

$$*\, x < 0: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du = 0$$

$$*\, 0 \le x < 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^x \frac{1}{9}u^2 du = \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{27}$$

$$*\, x \ge 3: \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_0^3 \frac{1}{9}u^2 du + \int_3^x 0du = 0 + \frac{1}{9}\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^3 + 0 = \frac{27}{27} = 1$$

: 0

$$P(1 < x \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{27} - \frac{1^3}{27} = \frac{7}{27} \qquad x < 3$$

: 3

4- قاعدة لايبنيز Règle de LEIBNITZ

تفيد هذه القاعدة الرياضية العامة في استنتاج أن مشتقة دالة التوزيع هي دالة الكثافة:

$$\boxed{\frac{d\int_{-\infty}^{x} f(u)du}{dx} = f(x) \Rightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)}$$

مثال: أوجد دالة الكثافة للمتغيرة X إذا كانت دالة التوزيع كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$*\, x<0: f(x)=F'(x)=(0)'=0$$

$$*\, x\geq 0: F(x)=1-e^{-2x} \Rightarrow f(x)=\left(1-e^{-2x}\right)'=2e^{-2x}$$

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x>0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

ثالثا- التوقع الرياضي Espérance mathématique

I – تعريف التوقع

يعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي متقطع كما يلي:

$$\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)}$$

ويعرف التوقع الرياضي لمتغير عشوائي مستمر كما يلي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$$

نرمز للتوقع أحيانا ب μ أو μ_X.

مثال: نلقي قطعة نقدية 4 مرات. أحسب العدد المتوقع من المرات التي نحصل فيها على وجه.

X عدد مرات وجه	0	1	2	3	4	المجموع
P(X)	$(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	$6\,(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	$(1/2)^4$	16/16 = 1
XP(X)	0	$4\,(1/2)^4$	$12\,(1/2)^4$	$12\,(1/2)^4$	$4\,(1/2)^4$	32/16 = 2

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=32/16=2$$

العدد المتوقع هو مرتين من بين 4 رميات.

مثال 2. نلقي قطعة نقدية مرة واحدة. يربح اللاعب 20 دج إذا حصل على الرقم 2، ويربح 40 دج إذا حصل على الرقم 4، و60 دج إذا حصل على الرقم 6، ويخسر 10 دج إذا حصل على الرقم 1، 30 دج إذا حصل على الرقم 3، و50 دج إذا حصل على الرقم 5.

تحقق مما إذا كانت العبة متوازنة (هل توقع الربح يساوي توقع الخسارة).

الجواب هو أن اللعبة غير متوازنة لأن توقع الربح أكبر من توقع الخسارة $E(x) = 30/6 = 5 > 0$

نتيجة الرمي	1	2	3	4	5	6	المجموع
X نتيجة المراهنة	-10	20	-30	40	-50	60	-
P(X=x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	6/6
X*P(X=x)	-10/6	20/6	-30/6	40/6	-50/6	60/6	(120-90)/6>0

مثال3. أوجد التوقع الرياضي للمتغيرة ذات دالة الكثافة التالية:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x.0.dx+\int_{0}^{2}x(\frac{1}{2}x)dx+\int_{2}^{\infty}x.0.dx$$

$$E(x)=0+\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+0=\frac{4}{3}$$

1- توقع دالة

يستخدم توقع دالة عند حساب عدد من المقاييس مثل التباين، العزوم المركزية والعزوم المرتبطة بالأصل.

لتكن X م ع لها دالة كثافة f(x)، و$y = g(x)$ م ع تابعة لها.

$$E(Y)=E(g(x))=\sum_x g(x)f(x)$$

في حالة X م متصلة:

$$E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

مثال1. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، و$Y=X^2$. أحسب E(X) وE(Y) .

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(X)	0	1/2	1/2	E(X) =1
X^2	0	1	4	
X^2*P(X)	0	1/2	1	$E(X^2)$ = 3/2

مثال2: لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية، و$Y = g(x) = 3x^2 - 2x$. أحسب E(Y).

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$E(Y)=E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(3x^2-2x)(0)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}(3x^2-2x)(x/2)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}(3x^2-2x)(0)dx$$

$$E(Y)=0+\int_{0}^{2}(3x^2-2x)(x/2)dx+0=\frac{1}{2}\left[\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left[12-\frac{16}{3}\right]=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$$

2- خصائص التوقع الرياضي

E (C) = C

E(CX) = CE(X)

E(X+Y) = E(X) + E(Y)

E(XY) = E(X)E(Y) إذا كانت المتغيرتان مستقلتان.

مثال: تتوقع مؤسسة أن تتلقى كل شهر 3 طلبيات من العميل A و4 من B .

- أحسب العدد المتوقع من الطلبيات المتلقاة من A في السنة.
- أحسب العدد الإجمالي المتوقع من الطلبيات المتلقاة في شهر.

يعين كل عميل من طرفه مندوبا عن كل طلبية لمتابعة إتمامها. كم تتوقع أن يلزم من مقابلة لتعريف مندوبي العميل A بمندوبي B.

E(12A) = 12E(A) = 12(3) = 36

E(A*B) = E(A)*E(B) = 4*3 = 12.

E(A + B) = E(A) + E(B) = 3 + 4 = 7

رابعا– التباين والانحراف المعياري Variance et écart type

I – تعريف التباين

يعرف التباين لمتغير عشوائي كما يلي:

$$\boxed{\sigma_X{}^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]}$$

و الانحراف المعياري هو جذر التباين. $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma^2}$.

في حالة المتغير العشوائي المتقطع :

$$V(X) = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

في حالة المتغير العشوائي مستمر :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

مثال. نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب V(X) .

X	0	1	2	**المجموع**
P(**X** = **x**)	1/4	1/2	1/4	1
X*P(**X**)	0	1/2	1/2	E(X) = μ =1
(**X**–**μ**)²	1	0	1	
(**X**–**μ**)² * **P**(**X**)	1/4	0	1/4	V(X) = 1/2

مثال 2. لتكن X م ع ذات دالة الكثافة التالية؛ أحسب تباين X.

$$\mu = 4/3 \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{0}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 * 0dx + \int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 \frac{x}{2}dx + \int_2^{+\infty}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 0dx = 0 + \frac{1}{2}x\left(x^2 - \frac{8x}{3} + \frac{16}{9}\right)_0^2 + 0$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{16x}{9}\right)_0^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + \frac{32}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

1– خصائص التباين

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$V(CX) = C^2V(X)$, $V(C) = 0$

في حالة استقلال المتغيرتان عن بعضهما

$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

مثال: نلقي قطعة نقدية مرتين. نسمي X عدد مرات الحصول على صورة، أحسب $V(X)$ باستخدام الصيغة

. $\mathbf{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$

لتكن المتغيرة $Y = 2X$. أحسب $V(Y)$ ، نلقي حجر نرد ونسمي Z النتيجة المحصل عيها. أحسب تباين المتغيرة W حيث:

$W = Z - Y$

X	0	1	2	المجموع
P(X = x)	1/4	1/2	1/4	1
X P(X)	0	1/2	1/2	$E(X) = \mu = 1$
$(\mathbf{X})^2$	0	1	4	
$(\mathbf{X})^2 * \mathbf{P(X)}$	0	1/2	1	$E(X)^2 = 3/2$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (3/2) - 1 = 1/2$

$V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4\ (1/2) = 2.$

$V(W) = V(Z-2X) = V(Z) + V(2X) = V(Z) + 2^2V(X).$

$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = (1/6)[1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2]-(1/6)[1+2+3+4+5+6] = 70/6$

$V(W) = (70/6) + 4\ (1/2) = 82/6 = 13.67$

خامسا- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الأكثر استخداما

بعد أن عرفنا مفهوم المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي يمكننا الآن أن ندرس عدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة. تستخدم هذه التوزيعات في حل العديد من المسائل في مجال التسيير الصناعي والتجاري وفي الإدارة. ومن أكثر هذه التوزيعات شيوعا: التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون. في نهاية المحاضرة يفترض أن يكون الطالب قادرا على استذكار القوانين المدروسة وخصائصها الأساسية، ومن خلال التطبيقات يفترض أن يتمكن من معرفة متى وكيف يمكن استخدام كل قانون.

I. التوزيع الهندسي الزائد: Distribution hyper géométrique

1- استنتاج صيغة قانون التوزيع الهندسي الزائد:

مثال 1. صندوق به 6 كريات منها 4 بيضاء و2 حمراء. نسحب بدون إرجاع 3كريات. احسب احتمال الحصول على كرتين بيضاوين، 3كريات بيضاء، كرية واحدة بيضاء، ولا كرية بيضاء.

نفترض أننا نسحب من صندوق كريات **بدون إرجاع** عددها n، إذا كان الصندوق يحتوي على N كرية منها b بيضاء و r حمراء $(N = b + r)$ فإن احتمال الحصول على عدد معين $x \leq b$ من الكريات البيضاء يمكن أن نحصل عليه من خلال القانون الكلاسيكي للاحتمالات (ع الحالات الملائمة /ع الحالات الممكنة) وذلك باستخدام التوفيقات:

$$\boxed{P(X = x) = \frac{C_b^x \cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}}$$

تسمى هذه الصيغة: قانون التوزيع الهندسي الزائد ونكتب **$X \sim H(N, b, p)$** حيث:

$p = b/N$ و $q = r/N = 1-p$

يمكن الآن الإجابة على أسئلة المثال كما يلي:

$P(X=2) = C_4^2 \,.\, C_2^3 / C_6^1 = 12/20$, $P(x = 3) = C_4^3 \,.\, C_2^0 / C_6^3 = 1/5$, ...

2- خصائص التوزيع الهندسي الزائد

$$\mu = np, \qquad \sigma^2 = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

ملاحظة: للتوزيع الهندسي الزائد علاقة بالتوزيع الثنائي سنذكرها عندما نتطرق لهذا الأخير.

II. التوزيع الهندسي الزائد المتعدد: Distribution Multi-hypergéométrique

1- استنتاج صيغة قانون التوزيع الهندسي الزائد المتعدد

يمكن بسهولة تعميم القانون السابق على حالة وجود أكثر من صنفين (k صنف)، حيث من كل صنف لدينا Ni كرية، $(\Sigma Ni = N)$ ، ولحساب احتمال نتيجة معينة؛ مثلا 2 كريات بيضاء $(X_1 = 2)$ ، 5حمراء، 1 زرقاء، . . . يمكن حساب عدد الحالات الملائمة والممكنة من خلال التوفيقات كما يلي:

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots X_k = x_k) = \frac{C_{N_1}^{x_1} C_{N_2}^{x_2} \ldots C_{N_k}^{x_k}}{C_N^n} \qquad \sum_1^k N_i = N, \sum_1^k x_i = n}$$

2- خصائص التوزيع الهندسي الزائد المتعدد

$$E(X_i) = n\frac{N_i}{N} = np_i$$

ملاحظة : للتوزيع الهندسي الزائد علاقة بالتوزيع الثنائي سنذكرها عندما نتطرق لهذا الأخير.

III.توزيع برنولي[1] Distribution de Bernoulli

1- استنتاج صيغة قانون برنولي

نقول عن تجربة أنها "برنولية" إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A وA’. نسمي A نجاح وA’ فشل.

نعتبر المتغيرة ع X التي تمثل **عدد مرات النجاح**، تأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A و0 في الحالة المعاكسة.

نرمز عادة ب p "احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A و q = 1 - p احتمال الحدث المعاكس (الفشل). يعين توزيع برنولي كما يلي :

$$\boxed{P(X=1)=p, \qquad P(X=0)=q, \qquad X=0,1.}$$

ونكتب **X ~ B(1, p)**

2- خصائص توزيع برنولي

$E(X) = \Sigma x_i p_i = 1.p + 0.q = p \Rightarrow \quad E(X) = p.$

$V(X) = E(X^2) – E(X)^2 = (1^2.p + 0^2.q) – p^2 = p – p^2 = p(1- p) = pq \Rightarrow \quad$ **$V(X) = qp.$**

IV. التوزيع الثنائي Distribution binomiale

1- استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي:

إذا كررنا تجربة برنولي n مرة فإن X (عدد مرات النجاح) تأخذ القيم: $X = 0, 1, 2, 3, \dots n$

لنفترض التجربة البرنولية رمي قطعة نقدية مكررة عدد n من المرات، وX عدد مرات الحصول على صورة (F):

حالة : n = 2 $\quad X = 0, 1, 2.$

$P(X = 0) = q*q = q^2, \quad P(X=1) = P(FP) + P(PF) = p*q + q*p = \mathbf{2p^1q^1}$

حالة : n = 3 $\quad X = 0, 1, 2, 3.$

$P(X=3) = P(FFF) = p*p*p = p^3, P(X=2) = P(FFP \text{ ou } PFF \text{ ou } FPF) = \mathbf{3p^2q^1}$

حالة : n = 4 $\quad X = 0, 1, 2, 3, 4.$

$P(X=3) = P(FFFP \text{ ou } PFFF \text{ ou } FPFF \text{ ou } FFPF) = \mathbf{4\, p^3q^1}$

في النتيجة الأخيرة نلاحظ العدد 3 هو x ، العدد 1 هو n-x ، والعدد 4 هو عدد الطرق الملائمة للحصول على ثلاث نجاحات من بين (n=4) تجارب، ويمكن حسابه كما يلي:

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

وبالتالي فاحتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية يحسب كما يلي:

$$\boxed{P(X=x) = C_n^x p^x q^{n-x}, \qquad x = 0,1,2,3,\dots,n \qquad , \qquad n = 1,2,3,\dots}$$

[1] بإسم Jacques Bernoulli الذي درس هذا التوزيع في أواخر القرن 17.

حيث x عدد مرات النجاح، p احتمال النجاح في التجربة الواحدة (يبقى ثابت عند تكرار التجربة)، $q = 1-p$ احتمال الفشل وn عدد التجارب. و هو تعريف " قانون التوزيع الثنائي" ويكتب قانون التوزيع الاحتمالي أيضا كما يلي:

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$$

أو $\mathbf{X \sim B(n, p)}$.

2- شروط استخدام التوزيع الثنائي

- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات
- احتمال النجاح في التجربة ثابت (التجارب مستقلة)

مثال : أحسب عند رمي قطعة نقدية متوازنة 4 مرات احتمال الحصول على:

ولا مرة صورة، مرة واحدة، مرتين، 3 مرات، 4 مرات.

$P(X = x) = C^x_n\ p^x q^{n-x} \Rightarrow P(X = 0) = C^0_4\ 0.5^0\ 0.5^4 = 1/16$

$P(X = 1) = C^1_4\ 0.5^1\ 0.5^3$ $\quad P(X = 2) = C^2_4\ 0.5^2\ 0.5^2$

مثال 2: نسحب بالإرجاع 3 كريات من صندوق يحتوي 5 كريات منها 3 حمراء.

أحسب احتمال الحصول على كريتين حمراء.

$P(X=2) = C^2_3\ (3/5)^2\ (2/5)^1$

3- خصائص التوزيع الثنائي

التوقع والتباين: يمكن اعتبار X مجموع متغيرات مستقلة برنولية $X = X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n$ لها نفس المعلم p وبالتالي نفس التوقع $(E(Xi) = p)$ أيضا. إذا باستخدام خصائص التوقع والتباين نجد:

$E(X) = E(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n) = \Sigma E(Xi) = \Sigma pi = n\,p \Rightarrow \mathbf{E(X) = np}$

$V(X) = V(X_1 + X_2 + \dots X_i + \dots + X_n)$,

Xi مستقلة إذن $V(X) = \Sigma V(Xi) = \Sigma pq \Rightarrow \mathbf{V(X) = npq}$

مثال: أحسب التوقع والتباين للمثال السابق :

4- قاعدة تقارب: العلاقة بين التوزيع الهندسي الزائد والتوزيع الثنائي

في حالة N كبير جدا (يؤول إلى ∞) فإن $(N-n) / (N-1)$ تؤول إلى 1 (n محدود). ومن جهة أخرى يعطي التوزيع الثنائي نتائج قريبة من التوزيع الهندسي الزائد ويصبح السحب بدون إرجاع مطابقا تقريبا للسحب بالإرجاع.

V. التوزيع الثنائي السالب (باسكال) Distribution binomiale négative

1- استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي السالب:

مثال: نرمي قطعة نقود إلى غاية الحصول على 3 مرات صورة (متتالية أو لا). أحسب احتمال أن نحصل على ذلك بعد 5 رميات، 4 رميات، 3 رميات، توقع عدد الرميات اللازمة وأحسب التباين.

من جديد ليكن لدينا تجربة برنولية (نتيجتين نجاح وفشل) مكررة، لكن هذه المرة **إلى غاية الحصول على عدد معين (r) من النجاحات**. X في هذه الحالة هي **عدد مرات تكرار التجربة** إلى غاية الحصول على r نجاح.

كيف يحسب الاحتمال ؟ نعلم أن تحقق النجاح r مرة احتماله p^r واحتمال الفشل x-r مرة يساوي q^{x-r} . إذا الاحتمال المطلوب يتضمن جداء هذين الاحتمالين $p^r q^{x-r}$. لكن هناك عددا من الطرق الملائمة لتحقيق r نجاح من بين X تجربة مع العلم أن آخر تجربة هي نجاح. هذا العدد يساوي إذا عدد الطرق الملائمة لاختيار r-1 نجاح من بين x-1 تجربة C^{r-1}_{x-1} (التجربة الأخيرة معلومة النتيجة).

$$\boxed{P(X=x)=C^{r-1}_{x-1}p^r q^{x-r}, \qquad X=r, r+1, r+2, \dots +\infty, \qquad r=1,2,3,\dots,+\infty}$$

يسمى هذا التوزيع توزيع باسكال أو الثنائي السالب ونكتب: **X~B (N, r, p)**

يمكن إذا الإجابة على أسئلة المثال السابق بما يلي:

$P(X = 5) = C^{3-1}_{5-1}\ p^3 q^{5-3} = C^2_4\ (½)^3 (½)^2 = 6\ (1/8)\ (1/4) =$ **9/32**

$\mu = r/p = 3/(1/2) =$ **6** , $\sigma^2 = rq/p^2 = 3\ (1/2) / (1/2)^2 = 12/2 =$ **6**

2– خصائص التوزيع الثنائي السالب

$$\mu=\frac{r}{p}, \qquad \sigma^2=\frac{rq}{p^2}, \qquad M(t)=p\frac{e^t}{\left(1-qe^t\right)^r}$$

$$\alpha_3=\frac{q+1}{\sqrt{q}}\ , \quad \alpha_4=3+\frac{(q+2)^2+3(nq-1)}{nq}$$

VI. التوزيع الهندسي Distribution géométrique

1– استنتاج صيغة قانون التوزيع الهندسي

نرمي قطعة نقدية إلى أن نحصل على صورة. احتمال أن يتطلب ذلك 4 رميات هو: P(X= 4) = P(PPPF)

نعود من جديد إلى التجربة البرنولية وهذه المرة نكرر التجربة إلى غاية الحصول على النتيجة أو الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة). المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات تكرار التجربة (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح) تتبع التوزيع الهندسي.

إذا رمزنا لاحتمال النجاح ب p ولاحتمال الفشل ب q فإن الاحتمال يمكن كتابته كما يلي: $P(X= 4) = q^3p$

وبصفة عامة فإن احتمال أي قيمة لX يعبر عنه كما يلي :

$$\boxed{P(X=x)=q^{x-1}p \qquad , \qquad X=1,2,3,\dots}$$

2– خصائص التوزيع الهندسي

$$\mu=\frac{1}{p}, \qquad \sigma^2=\frac{q}{p^2}, \qquad M(t)=p\frac{e^t}{\left(1-qe^t\right)} \qquad \alpha_3=\frac{q+1}{\sqrt{q}}\ , \qquad \alpha_4=12+\frac{p^2}{q}$$

ملاحظة: التوزيع الهندسي ما هو إلا حالة خاصة من توزيع باسكال حيث r = 1

VII. التوزيع المتعدد Distribution multinomiale

1– استنتاج صيغة قانون التوزيع الثنائي المتعدد

مثال. نرمي قطعة نرد 4 مرات. أوجد احتمال الحصول على مرتين الرقم 6 ومرتين الرقم 1.

التوزيع المتعدد هو تعميم للتوزيع الثنائي، فبينما الأول يستعمل في حالة تجربة تقبل نتيجتين فقط، يستعمل التوزيع المتعدد للحالة العامة حيث يكون للتجربة عدد k من النتائج الممكنة. مع استقلالية التجارب عن بعضها. نرمز لهذه النتائج ب $A_1, A_2, \ldots$ A_k ولاحتمالاتها ب $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$. بما إن الأحداث (النتائج) Ai متنافية فإن:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_k = 1$$

إذا كررنا هذه التجربة **متعددة** النتائج عدد n من المرات فسيكون لدينا لكل حدث (نتيجة) متغيرة عشوائية تمثل عدد مرات وقوعه.

نرمز لهذه المتغيرات ب $X_1, X_2, \ldots X_k$ حيث $X_1 + X_2 + \ldots + X_k = n$.

يحسب احتمال الحدث المركب: $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k$ كما يلي :

$$\boxed{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}}$$

2- خصائص التوزيع المتعدد

$E(X_1) = np_1, E(X_2) = np_2, \ldots,$ $\mathbf{E(X_k) = np_k}$

$V(X_1) = np_1q_1, V(X_2) = np_2q_2, \ldots$ $\mathbf{V(X_k) = np_kq_k}$

3- العلاقة مع التوزيع الهندسي الزائد المتعدد

في التوزيع الهندسي الزائد المتعدد، عندما $N \to \infty, Ni \to \infty, Ni/N \to pi$ ؛ يستخدم التوزيع المتعدد لحساب الاحتمالات.

مثال: إذا رمينا قطعة نرد 42 مرة، أحسب احتمال أن يظهر كل رقم عدد من المرات يتناسب مع الرقم ذاته (الرقم 1 يظهر مرتين، الرقم 2 يظهر 4 مرات، الرقم 3 يظهر 6 مرات وهكذا).

$$P(X_1 = 2,\ X_2 = 4, \ldots X_6 = 12) = \frac{42!}{2!\ 4!\ 6!\ \ldots\ 12!}(1/6)^2 (1/6)^4\ \ldots (1/6)^{12}$$

مثال3. نسحب من صندوق به 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 سبع مرات على التوالي كرية ثم نرجعها إلى الصندوق. أوجد احتمال: 3 كريات ذات رقم 1، كريتين ذات رقم 2 وكريتين ذات رقم 4.

VIII. توزيع بواسون[2] Distribution de Poisson

1- استنتاج صيغة قانون توزيع بواسن

لتكن لدينا تجربة برنولية مكررة عدد كبير جدا أو لانهائي من المرات. مبدئيا المتغيرة X التي تمثل عدد النجاحات تتبع التوزيع الثنائي، لكن قد يصعب حساب الاحتمال باستعمال صيغة هذا التوزيع عندما تكون n كبيرة. مثلا إحتمال 20 نجاح إذا كانت n = 100 هو: $P(20) = C_{100}^{20} \cdot 0.001^{20} \cdot 0.999^{80}$.

عندما تتكرر التجربة باستمرار؛ يصبح عدد مرات تكرار التجربة مقاسا بالزمن، ويكون احتمال تحقق الحدث في لحظة زمن صغيرا جدا. نحتاج في هذه الحالة إلى إيجاد صيغة عامة تعادل صيغة التوزيع الثنائي عندما n يؤول إلى ∞ .

نضع λ ثابت بحيث $p = \lambda/n$:

[2] باسم سيميون دونيز بواسون (1840-1781) Siméon-Denis Poisson الفيزيائي و الرياضي الفرنسي الذي استخدم هذا لقانون سنة 1837 في كتابه بحث في احتمال الأحكام في مجال الجريمة و في المجال المدني (Recherche sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile) حيث أدخل كنهاية لقانون باسكال والقانون الثنائي. إلا أن أول استعمال له للقانون الذي يحمل اسمه يعود إلى 1830. تجدر الإشارة إلى أن بواسون صاحب الفضل في نظرية مهمة أخرى هي نظرية الأعداد الكبيرة التي تنسب لشيبيشيف. أنظر ج ج دراوزبيك [1997].

$$p(x)=C_n^x\cdot p^x\cdot q^{n-x}=\frac{n!}{(n-x)!x!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$p(x)=\frac{n(n-1)(n-2).....(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$p(x)=\frac{\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}.....\frac{(n-x+1)}{n}}{x!}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$=\frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}).....(1-\frac{x-1}{n})}{x!}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$n\to\infty\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{2}{n}=...=0\Rightarrow p(x)=\frac{1}{x!}\lambda^x(1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}=\frac{\lambda^x}{x!}(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$$

لكن : $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n=e^{-\lambda}$ وبما أن $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}=(1-0)^{-x}=1$ فإن:

$$\boxed{p(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\qquad x=0,1,2,...}$$

و هو احتمال x نجاح في وحدة زمن واحدة حسب توزيع بواسون حيث **$\lambda>0$**. ونكتب **$X\sim P(\lambda)$**

ملاحظة: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828...$

2- خصائص توزيع بواسون

$$E(X)=V(X)=\lambda\quad,\quad M(t)=\exp\left[\lambda(e^t-1)\right],\quad\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{\lambda}},\quad\alpha_4=3+\frac{1}{\lambda}$$

- حساب احتمال عدد من الأحداث في t وحدة زمن.

من أجل عدد أو مقدار t من وحدات الزمن نعوض λ ب λt فنجد:

$$P_t(X=x)=\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!},\qquad X=0,1,2,3,...$$

مثال. بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda=5$ في الثانية. أحسب احتمال وصول 7 مكالمات في ثانية ونصف.

$$t\lambda=1.5(5)\qquad P(X=7)=\frac{(1.5(5))^7 e^{-1.5(7)}}{7!}$$

- حساب احتمال عدد من الأحداث من فئة معينة.

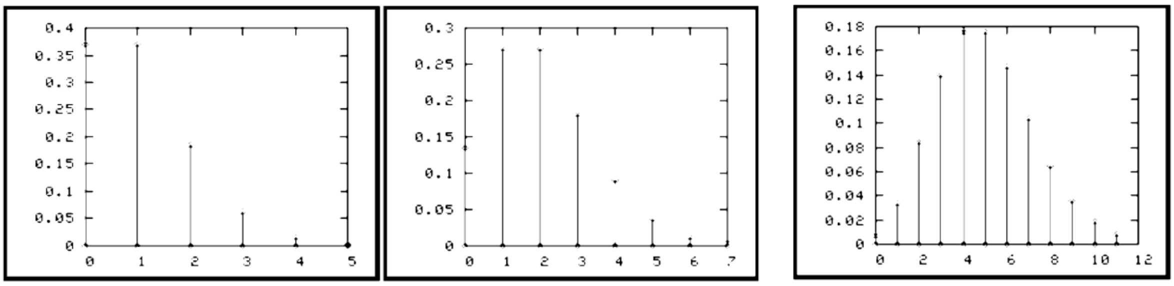
إذا كان X يتبع توزيع بواسون بمعدل λ، فإن $Y=aX$ هو الآخر يتبع توزيع بواسون بمعدل $a\lambda$.

مثال. بفرض أن عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda=5$ في ثانية، وأن 6% من هذه المكالمات هي مكالمات دولية. أحسب احتمال أن تصل 9 مكالمات دولية في ثانية.

$$P(X=9)=\frac{(0.05(5))^{9}e^{-0.05(5)}}{9!}$$

3- التمثيل البياني لتوزيع بواسون

دالة توزيع بواسون هي دالة متناقصة لكون قوة e سالبة (وهي أقوى من قوة λ)، لكونه توزيعا متقطعا، يرسم توزيع بواسون من خلال مدرج أعمدة (Diagramme en bâtons). هذا قد يصعب ملاحظة سلوك التوزيع إلا باستخدام عدة أمثلة بمعالم متصاعدة بالتدريج، حيث يظهر أن التوزيع يقترب شيئا فشيئا من التوزيع الطبيعي لما λ كبير بما فيه الكفاية. الرسوم البيانية التالية تبين ذلك.



رسم 1 سلوك توزيع بواسون عند زيادة المعلمة من 1 إلى 2 إلى 5 (من اليسار إلى اليمين)

4- استخدام توزيع بواسون بدلا من التوزيع الثنائي.

عندما $n\rightarrow\infty$ والمتوسط ثابت يؤول التوزيع الثنائي إلى التوزيع بواسون. عمليا يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما:

$$\boxed{nq<5 \text{ أو } np<5 \quad \text{و} \quad n\geq 30}$$

ويستخدم بعض من الإحصائيين أيضا كشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي القاعدة التالية[3]:

$$p\leq 0{,}1 \text{ و } n\geq 25$$

مثال : نأخذ عشوائيا 10 وحدات من انتاج آلة نسبة إنتاجها التالف 10 % . أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان.

$$P(X=2)=C^{2}_{10}\,(0{,}1^2)\,(0.9^8)=\mathbf{0.1937}$$

ط2. باستعمال توزيع بواسون: نحسب أولا قيمة المعلمة λ (معلمة قانون بواسون):

$\lambda=\mu=np=10*0{,}1=1$

$P(2)=\lambda^x * e^{-\lambda}/x! = (1^2 * e^{-1})/2! = 1/(2e) = \mathbf{1{,}1839}$

5- الاستخدام العملي لتوزيع بواسون

ظل توزيع بواسون لفترة طويلة يستعمل فقط لتمثيل الأحداث النادرة، لكنه اليوم يستعمل في مجالات متعددة. فمن الدراسة الشهيرة ل (Ladislaus Bortkiewics) عن حوادث إصابات الجنود بصكات الجياد في الجيوش أصبح اليوم توزيع بواسون يستعمل في شتى المجالات؛ منها مراقبة الجودة إحصائيا، تسيير ظواهر الانتظار، الاتصالات (عدد المكالمات في وحدة زمن)، كما

[3] أنظر دروزبيك 1997، ص 262.

يستخدم في الفيزياء النووية لدراسة عدد الجزيئات المنبعثة من مادة مشعة وفي البيولوجيا الدقيقة (microbiologie) لمراقبة تكاثر البكتيريا في حقل تجارب، كما يستخدم في البيولوجيا وحتى في علم الأحوال الجوي.

في مجال التسيير، يستخدم توزيع بواسون بشكل خاص عند دراسة مسائل متعلقة "بظواهر الانتظار"؛ ففي هذا النوع من المسائل، كثيرا ما يفترض أن وصول الزبائن إلى مكان الخدمة يتبع توزيع بواسون. من أمثلة ذلك: عدد الطائرات التي تصل إلى المطار في وحدة زمن، عدد البواخر التي تصل إلى ميناء في وحدة زمن، عدد الزبائن الذين يصلون إلى مكتب بريدي في وحدة زمن، عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مركز هاتفي، عدد الحالات الاستعجالية التي تصل إلى مستشفى، ... تسمى هذه الظواهر في نظرية صفوف الانتظار "بظواهر الوصول".

مثال1. بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في معمل معين يتبع توزيع بواسون بمعدل حادثتين يوميا.

أوجد احتمال أن لا يسجل أي حادث في يوم معين. أوجد احتمال حادث على الأقل في يوم:

$$P(X = 0) = \lambda^x * e^{-\lambda}/x! = \lambda^0 * e^{-\lambda}/0! \Rightarrow \mathbf{P(X = 0) = e^{-\lambda}} = e^{-2}$$

$$P(X \geq 1) = 1- P(0) = 1- [\lambda^0 * e^{-\lambda}/0!] \Rightarrow \mathbf{P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}} = 1 - e^{-2}$$

مثال2. بينت دراسة إحصائية سابقة أن عدد السيارات التي تصل إلى محطة بنزين معينة بين الساعة 12:00 و12:05 هو في المتوسط 3 سيارات، كما بينت الدراسة أن عدد السيارات التي تصل إلى المحطة يتبع توزيع بواسون. أوجد احتمال أن تصل 4 سيارات بين 12:00 و12:05.

متوسط عدد السيارات في الساعة = 2 * 3 = 6 ومنه:

$$P(X=4) = 6^4 * e^{-6}/4\,! = 1296 * e^{-6}/24 = 54 * e^{-6}$$

في الأخير، ينبغي الإشارة إلى أن لتوزيع بواسون وأيضا للتوزيع الثنائي خصائص مهمة لا يتسع المقام لذكرها في إطار هذا الدرس، ولكن سنتعرض لبعضها في التطبيقات، لذلك نحيل الطالب إلى مطالعتها في المراجع المتخصصة؛ كما توجد توزيعات أخرى مهمة نظرا لتعدد استخداماتها مثل التوزيع المتماثل (distribution uniforme)، لم نتطرق لها في هذا الدرس، ندعو الطالب لاستكمالها من خلال بحثه الخاص.

خلاصة

الجدول الملحق يلخص أهم النقاط حول التوزيعات المتقطعة الشهيرة.

التوزيع	متى يستخدم	القيم الممكنة للمتغير	الاحتمال	التوقع والتباين
الهندسي الزائد **X~ H(N, b,p)**	سحب بدون إرجاع. كريات من صنفين.	$X=\{0,1,2,\ldots,b\}$, $b\leq b+r=N$	$P(X=x)=\dfrac{C_b^x\cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}$	$\mu=np,$ $\sigma^2=npq\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$ $q=r/N$ و $p=b/N$ n عدد الكريات المسحوبة N العدد الكلي للكريات b عدد الكريات البيضاء r ع الكريات الحمراء
الهندسي الزائد المتعدد	نفس شروط ت الهندسي الزائد مع وجود أكثر من صنفين من الكريات.	$X_i=\{0,1,2,\ldots,N_i\}$, $\Sigma x_i=n,\ \Sigma N_i=N$	$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots X_k=x_k)=$ $=\dfrac{C_{N1}^{x1}C_{N2}^{x2}C_{N3}^{x3}\cdots C_{Nk}^{xk}}{C_N^n}$	$E[X_i]=n\,(N_i/N)=np_i$
برنولي X~B(1, p)	تجربة واحدة (غير مكررة) تقبل نتيجتين.	$X=\{0,1\}$	$P(X=1)=p,$ $P(X=0)=1-p=q$	$\mu=p,\quad \sigma^2=pq$
الثنائي **X~B(n, p)**	تجارب ثنائية النتيجة، مكررة ومستقلة (p ثابت).	$X=\{0,1,2\ldots,n\}$	$P(X=x)=C^x_n\,p^x\,q^{n-x}$ $C_n^x=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$	$\mu=np,\ \sigma^2=npq$
باسكال (الثنائي السالب)	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على عدد r من النجاحات في تجارب برنولية مكررة.	$X=\{r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots,+\infty\}$	$P(X=x)=C^{r-1}_{x-1}\,p^r\,q^{x-r}$	$\mu=r/p$, $\sigma^2=rq/p^2$
الهندسي	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على النجاح الأول في تجارب برنولية مكررة.	$X=\{1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X=x)=q^{x-1}p$	$\mu=1/p,$ $\sigma^2=q/p^2$
التوزيع المتعدد	هو تعميم للتوزيع الثنائي على تجربة مكررة متعددة النتائج.	$\forall i, 0\leq x_i\leq N_i,$ $\sum_{i=1}^{k} x_i=n,$ $\sum_{i=1}^{k} N_i=N$	$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\ldots,X_k=x_k)=$ $\dfrac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!}p_1^{x_1}p_2^{x_2}\ldots p_k^{x_k}$	$E(X_k)=np_k$ $V(X_k)=np_kq_k$
بواسون X~P(λ) **λ > 0**	X عدد النجاحات في عدد كبير جدا من التجارب البرنولية (عدد الوحدات التالفة في شحنة). أو أيضا عدد من الأحداث في فترة زمن.	$X=\{0,1,2,\ldots,+\infty\}$	$P(X=x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $P(X=0)=e^{-\lambda}$ $P(X\geq 1)=1-e^{-\lambda}$	$E(x)=V(x)=\lambda$

التوزيعات الاحتمالية

*تمرين1:

عدد حوادث العمل اليومية في مصنع معين متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي معطى في الجدول التالي:

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(X=x_i)$	2k	0.15	0.2	0.25	0.1	k

1- عين قيمة الثابت k:

2- أكتب دالة التوزيع المتجمع و مثلها بيانياً.

3- أحسب احتمال: - عدد حوادث العمل في المصنع في يوم ما **لا** يقل عن 2.

- عدد حوادث العمل في المصنع في يوم ما **لا** يزيد عن 4.

4- أحسب العدد اليومي المتوسط لحوادث العمل في المصنع. (القيمة المتوقعة، أو التوقع الرياضي).

*تمرين2:

مدة المكالمات الهاتفية (بالدقائق) التي تصل إلى مكتب معين متغير عشوائي كثافة احتماله: $f(x) = e^{-3\alpha . x}$, $X \geq 0$

1- عين قيمة الثابت α، ثم أكتب دالة التوزيع المتجمع.

2- أحسب احتمال أن لا تفوق مدة مكالمة واحدة وصلت إلى هذا المكتب دقيقتين.

3- أحسب احتمال أن لا تفوق مدة مكالمة واحدة وصلت إلى هذا المكتب [03] دقائق.

4- أحسب احتمال أن لا تفوق مدة مكالمة واحدة على **الأقل** من بين ثلاث مكالمات تصل إلى هذا المكتب دقيقتين.

5- أحسب المدة المتوسطة و تباين مدة المكالمة التي تصل إلى هذا المكتب.

6- أحسب احتمال أن تفوق مدة [04] مكالمات من بين [06] مكالمات دقيقتين.

*تمرين3:

مدة اشتغال نوع من العناصر الإلكترونية (بالسنوات) متغير عشوائي كثافة احتماله: $f(x) = k^2 e^{-k.x}$, $x \geq 0$

1- عين قيمة الثابت k، ثم أكتب دالة التوزيع المتجمع.

2- أحسب احتمال أن لا تزيد مدة إشتغال عنصر من هذا النوع عن سنتين.

3- أحسب احتمال أن لا تزيد مدة إشتغال [04] عناصر من بين [07] عناصر من هذا النوع عن سنتين.

*تمرين4:

تعرض شركة تجارية يومياً [03] سيارات (a, b, c) للبيع في معرض تجاري. تشير الخبرة السابقة إلى أن احتمالات بيع هذه السيارات في يوم ما هي على الترتيب: (0.5)، (0.7)، (0.8).

1- نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات التي تبيعها الشركة يومياً

1.1- أوجد التوزيع الاحتمالي لـــ X.

2.1- ما هي القيمة المتوقعة لعدد مبيعات الشركة اليومية من السيارات ؟

2- نفرض أن ربح الشركة يقدر بـــ (50000 ون).

1.2- أوجد التوزيع الاحتمالي لـــ Y.

2.2- أحسب القيمة المتوسطة للربح اليومي للشركة. (باستعمال طريقتين)

***تمرين5:**

تريد مصلحة تجارية لشركة إعلامية تصدر جريدة أسبوعية معينة القيام بحملة دعائية لجلب منخرطين جدد يطالعون الجريدة، و ذلك من خلال توزيع عدد من الجرائد مجانا على (10000) شخص. تشير التقديرات إلى أن نسبة المنخرطين الجدد (من بين الأشخاص الذين مستهم الحملة) متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي:

f=fi	20%	25%	30%
P(f=fi)	0.2	0.3	0.5

إذا كانت تكلفة العملية الدعائية هي (1.2 ون) للنسخة الواحدة من الجريدة و الربح الصافي هو (5 ون) عن كل نسخة مباعة، فما هي الفائدة المتوقعة أسبوعياً جراء هذه الحملة ؟

***تمرين6:**

تنتج آلة معينة شحنة من (800) قطعة خلال كل عملية إنتاج. قرر رئيس ورشة إجراء عملية تصليح دقيق على آلة كلفتها (600 ون) لتخفيض نسبة القطع الفاسدة [f] في كل شحنة من المنتوج. تشير التقديرات إلى أن النسبة [f] جراء عملية التصليح متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي:

f=fi	7%	10%	15%
P(f=fi)	0.5	0.3	0.2

إذا كانت الفائدة هي (3 ون) عن كل قطعة و تكلفة القطعة الواحدة هي (8 ون)، فما هي الفائدة المتوقعة عن كل شحنة من المنتوج جراء عملية التصليح ؟

***تمرين7:**

لدى شخص مبلغ قدره (10000 ون) يريد إستثماره ففكر في طريقتين:

الطريقة الأولى: الإستثمار في أسهم مجمع صناعي تحقق له مردودية قدرها (14%) إذا لم يحصل ركود إقتصادي، و قد تنخفض هذه المردودية إلى (04%) في حال حدوث الركود الإقتصادي.

الطريقة الثانية: شراء سندات بضمان مردودية قدرها (08%).

تشير التقديرات إلى أن احتمال وقوع الركود الإقتصادي هو (0.4). **اعتماداً على الفائدة المتوقعة، ما هي أحسن طريقة يختارها الشخص.**

***تمرين8:**

تصل مكالمات إلى مجمع هاتفي بمعدل مكالمتين في الدقيقة. إذا كان X متغير عشوائي يعبر عن عدد المكالمات التي تصل إلى المكتب خلال ساعة.

1- ما هو توزيعه الاحتمالي ؟ أحسب توقعه و تباينه.

2- أحسب احتمال أن تكون عدد المكالمات التي تصل إلى المكتب **لا تقل** عن [03].

3- أحسب احتمال أن تكون عدد المكالمات التي تصل إلى المكتب **لا تزيد** عن [04].

***تمرين09:**

تدخل السيارات إلى المرآب بمعدل [04] سيارات كل ساعة. X متغير عشوائي الذي يعبر عن عدد السيارات التي دخلت المرآب كل ساعة.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي لـــ X، ثم أحسب إنحرافه المعياري.

2- أحسب احتمال أن **لا يقل** عدد السيارات التي تدخل المرآب عن [01] و **لا يزيد** عن [05].

***تمرين10:**

يحتوي صندوق على [10] عناصر صالحة و [05] فاسدة، نسحب منهم بالصدفة [07] عناصر. نعرف X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد العناصر الصالحة المحصل عليها.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي لـــ X، ثم أحسب توقعه و تباينه.

2- أحسب احتمال أن **لا يقل** عدد العناصر الصالحة المحصل عليها عن [02].

3- أحسب احتمال أن **لا يزيد** عدد العناصر الصالحة المحصل عليها عن [04].

4- أحسب احتمال أن **لا يقل** عدد العناصر الغير صالحة المحصل عليها عن [03].

*تمرين11:

أعلنت شركة ثلاث [03] وظائف شاغرة. تقدم لهذه الشركة [08] أشخاص بطلباتهم للإنظمام إليها من بينهم [05] يحملون شهادات جامعية. اختارت هذه الشركة [03] أشخاص بالصدفة لتوظيفهم. نعرف X المتغير العشوائي للمترشحين ذوي الشهادات الجامعية.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي لـــ X، ثم أحسب إنحرافه المعياري.

2- أحسب إحتمال أن **يقل** عدد المترشحين المختارين لملئ الوظائف ذوي الشهادات الجامعية عن [04].

*تمرين12:

احتمال إصابة شخص بالزكام في شهر معين بمدينة معينة هو (0.6). نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المصابين بالزكام بهذه المدينة و في هذا الشهر من بين [50] شخص.

1- ما هو التوزيع الاحتمالي لـــ X.

2- ما هي القيمة المتوسطة لعدد الأشخاص المصابين بالزكام من بين [50] شخص.

3- أحسب احتمال أن لا يصاب أي شخص بالزكام من بين [50] ؟

4- أحسب احتمال أن يصاب شخصان **على الأقل** بالزكام من بين [50] ؟

*تمرين13:

يحتوي موضوع إمتحان على [10] أسئلة، لكل واحدة منها أربعة أجوبة مقترحة، من بينها إجابة واحدة صحيحة. نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأجوبة الصحيحة لطالب ما في هذا الإمتحان (أجاب على كل الأسئلة باختيار إجابة واحدة بالصدفة لكل سؤال).

1- أوجد التوزيع الاحتمالي لـــ X، ثم أحسب توقعه و تباينه.

2- أحسب احتمال أن **لا تقل** عدد الإجابات الصحيحة للطالب عن [07].

3- أحسب احتمال أن **لا تزيد** عدد الإجابات الصحيحة للطالب عن [08].

*تمرين14:

لاحظ تاجر أنه من بين كل [15] شخصاً يدخلون محله، [03] منهم يشترون. ذات يوم دخل [20] شخص لمحل هذا التاجر. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المشترين في ذلك اليوم.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي لـــ X.

2- ما هي القيمة المتوسطة لعدد المشترين في ذلك اليوم ؟

3- أحسب إحتمال أن يكون عدد المشترين في ذلك اليوم:

- A - [18] على الأكثر.
- B- [03] على الأقل.
- C- [10].

*تمرين15:

ليكن **X** متغير عشوائياً خاضعاً لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (10) و إنحرافه المعياري (03).

1- أحسب كلا من: $P(09 \leq x \leq 13),\ P(x \leq 12),\ P(x \leq 08),\ P(x \geq 09),\ P(x \geq 13)$

2- عين قيم $[a, b, c]$ بحيث: $P(b \leq x \leq c)=0.15\ ,\ P(x \geq b)=0.8\ ,\ P(x \leq a)=0.86$

*تمرين16:

كانت علامات [200] طالب في امتحان معين تخضع لتوزيع طبيعي، وسطه الحسابي يساوي (12)، و إنحرافه المعياري (02).

1- ما هي نسبة الطلبة الذين تواجدت علامتهم ما بين [10] و [15] ؟ ثم أحسب عددهم.

2- ما هي **أقل** علامة حصل عليها طالب من بين [20%] الطلبة الأوائل ؟

باللغة العربية:

1- أمحمد معتوق،2007، الاحصاء الرياضي و النماذج الاحصائية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.

2- البطانية ابراهيم محمد، 2011،مبادئ الاحصاء، دار الميسرة للنشر و التوزيع و الطباعة، الطبعة الأولى، عمان.

3- الماحي محمد،عوض خير الله، 2012، مبادئ الاحصاء ،مكتبة بستان المعرفة للطباعة و النشر و توزيع الكتب.

4- بوهزة أحمد،2011، محاضرات في الاحصاء الوصفي، لطلبة العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير ، طلبة السنة الأولى LMD، دار المحمدية العامة، الجزائر.

5- بوعبد الله صالح، 2006، محاضرات الاحصاء الرياضي، لطلبة العلوم الاقتصادية.

6- جاك لوكيون، لابروس كريستيان، 1985،الاحصاء الوصفي ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.

7- جلاطو جيلالي،2002، الاحصاء مع تمارين و مسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية.

8- رويسات عبد الناصر،2006، الاحصاء الوصفي و مدخل الاحتمالات، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر .

9- عوض مراد كمال،2010، أساسيات الاحصاء، دار البداية، الطبعة الأولى ، عمان.

10- موساوي عبد النور، بركان يوسف ،2010، الاحصاء 2، دار العلوم للنشر و التوزيع ، الطبعة الثانية، عنابة.

باللغة الأجنبية:

1- Chamoun Chamoun, 2010, Elément de statistiques et de probabilités, office des publications universitaires 1ére Edition, Alger
2- Chibat Ahmed, 2000, Notions sur le calcul des probabilités, Fascicule 2, imprimerie Top Colors, Constantine
3- Khaldi Khaled,2000, Méthodes Statistiques et probabilités, Casbah Editions, Alger.
4- Khaldi khaled,2005, Méthodes statistiques, rappels de cours exercices corrigés, office des publications universitaires ,5 éme édition, Alger.
5- Lecoutre Jean.Pierre, 2012, Cours et exercices corrigés, Dunod, 5éme Edition, Paris.
6- Moussedek Boussebona, 2004, Eléments de la théorie des probabilités , office des publications universitaires, Tome 02, Alger.
7- Oukacha.B, Benmessaoud .M, 2008, Statistiques Descriptives et calculs des probabilités , pages Bleues internationales , Alger
8- Redjdal.k, 2005,Cours de probabilités , office des publications universitaires, Alger.
9- Spiegel Murray.R,2002, Statistique, Mini Shaum's , Edi Science , Belgique.
10- Tribout Brigitte,2007, Statistique pour économistes et Gestionnaires, Pearson Education, Strasbourg.