الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة أبي بكر بلقايد– تلمسان –

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية في مقياس

الاحصاء 2

موجهة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية، تجارية و علوم التسيير

من إعداد الأستاذة:

بن ديمة نسرين

أستاذة محاضرة –ب–

السنة الجامعية: 2023–2024

الفــهـرس

مقدمة

ينحدر مصطلح الإحصاء statistics من اصل لاتيني status و يعني الدولة أو القوة السياسية، أو من اصل روماني statista تعني الدولة و ذلك لكونه مرتبط بالشؤون العسكرية، حيث يعتبر الإحصاء من العلوم القديمة و التي ظهرت مع ظهور الإنسان على وجه الأرض، و كلمة إحصاء من الناحية اللغوية تعني "عد" ، فأحصى الاشياء يعني عدها ،حيث في منتصف القرن السابع عشر كانت لعبة القمار منتشرة بشكل واسع في المجتمع الفرنسي و بالذات في إمارة مونتيكارلو Monte Carlou، مما ولد لدى اللاعبين الرغبة في استكشاف معلومات مسبقة تساعدهم على معرفة مدى إمكانية فوزهم وتقدير ربحهم في لعبة معينة. كانت هذه الحاجة هي منطلق أبحاث كل من باسكال Pascal (1623-1662)، فرمات Fermat (1601-1665)، و هيجنز Hygens (1629-1695)، فكانت بين هؤلاء الثلاثة مراسلات شكلت الميلاد الحقيقي لنظرية الإحتمالات بالمعنى الحديث للعبارة و التي تم صياغتها بصورة أوضح من طرف برنولي Bernoulli(1654-1705)،ويقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، و تستخدم الاحتمالات في كثير من المجالات الاقتصادية، التجارية، الزراعية،و الطبية، السلوكية، و غيرها،تم تقسيم هذه المطبوعة إلى ثلاثة فصول، حيث نخصص الفصل الأول إلى ماهية المجموعات و بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات ،أما الفصل الثاني فنخصصه الى ماهية الإحتمال و كيفية حسابه، و الفصل الثالث نتناول التوزيعات الإحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة و المستمرة مع محاولة إعطاء مفهوم شامل لهما، مع تخصيص بعض التمارين المحلولة لكل فصل.

الفصل الأول : مدخل للمجموعـات

نتناول من خلال هذا الفصل العناصر التالية:

I . ماهية المجموعات

I . 1. مفهوم المجموعة و أنواعها

I . 2.تطبيق قواعد الجبر على المجموعات

I . 3. خواص العمليات الجبرية على المجموعات

II . بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات

II.1. التجربة العشوائية

II.2 الحادث

II.3 قواعد الجبر على الحوادث

III . تمارين محلولة

I. ماهية المجموعات:

يستخدم الإنسان في حياته اليومية مفهوم المجموعة دون أن يقصد بالضرورة ذلك المفهوم الرياضي المحدد الذي أصبح أحد المفاهيم الرياضية الأساسية الحديثة مثل:أنهار الجزائر،فريق كرة القدم،طلاب السنة الأولى جامعي،أعضاء هيئة التدريس بقسم علوم التسيير بجامعة تلمسان، وعليه يتضح مما سبق وجود عدة وحدات بتسميات مختلفة و لهذا اتفق علميا على كلمة مجموعة كمصطلح علمي عام يقوم مقام أمثال التسميات السابقة كأن تقوم مثلا مجموعة طلاب السنة الأولى جامعي.

I . 1. مفهوم المجموعة و أنواعها

1. مفهوم المجموعة : هي "تجمع عدد من العناصر المحددة التي تشترك بصفة ما"، بحيث يمكنا أن نحدد من خلال تلك الصفة انتماء عنصر ما إلى تلك المجموعة أو عدم إنتمائه. و تمثل المجموعة بحرف كبير مثل A،B ، C، أما عناصر المجموعة فتمثل بحروف صغيرة a، b، c، و يستعمل الرمز $\in$ يعني ينتمي إلى و الرمز $\notin$ يعني لاينتمي إلى. مثال $x \in E$ نقول أن x ينتمي إلى المجموعة E، أما إذا لم يكن y ينتمي اي لا ينتمي للمجموعة E فنكتب $y \notin E$. وتوضع عناصر أي مجموعة في خاصيتين على النحو التالي:

$$A : \{1,3,5,7\} \quad و \quad B : \{a, b, c, d\}$$

2. أنواع المجموعات: توجد عدة أنواع نذكر منها ما يلي:

- ✓ **المجموعة الخالية**: هي المجموعة التي لا يوجد فيها عناصر مطلقا و يمرز لها بالرمز $\emptyset$.
- ✓ **تساوي المجموعات**: نقول أن المجموعة A و المجموعة B متساويتين إذا احتوت المجموعتان على نفس العناصر مثال: $A : \{1,2,3\}$، $B : \{1,2; 3\}$ و عليه فإن A=B.
- ✓ **المجموعة المحدودة**: هي المجموعة المكونة من عدد محدود من العناصر. مثل: لنرمز بالرمز Aلمجموعة أيام الأسبوع أي: $A : \{$الجمعة ; ... ;الإثنين ;الأحد ,السبت$\}$ و عليه فإن A في هذه الحالة مجموعة محددة.
- ✓ **المجموعة غير المحدودة**: هي المجموعة المكونة من عدد غير محدود من العناصر.مثل: مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{0,1,2, \dots \infty\}$
- ✓ **المجموعة الجزئية**: المجموعة A هي مجموعة جزئية من B يعني أن A محتواة في B و نرمز لها بالرمزB A C حيث إذا كان كل عنصر في المجموعة A هو عنصر في المجموعة B. مثل: مجموعة طلاب قسم

علوم التسيير بجامعة تلمسان يشكلون مجموعة جزئية من مجموعة طلاب كلية العلوم الاقتصادية ، التجارية وعلوم التسيير جامعة تلمسان.

- ✓ **المجموعة الكلية**: وهي المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر و هي فضاء العينة أو فراغ العينة و يرمز له بالرمز S أو Ω.

I . 2. تطبيق قواعد الجبر على المجموعات

لتكن A، B ، C ثلاث مجموعات ، و عليه نطبق قواعد الجبر التالية:

1.الإتحاد: هو حاصل جمع المجموعتين A و B و هي المجموعة التي تحتوي على مجموعة العناصر الموجودة في A أو B أو كليهما و يرمز للإتحاد بالرمز U، أي أن الحدث A U B يقع إذا وقع واحد على الأقل من الأحداث A، B، و هذا ما يدعى بجمع الأحداث.

مثال: لدينا المجموعات التالية : $A_1 : \{1,3; 5; 7\}$، $A_2 : \{7,6; 4; 2\}$ ،

المطلوب: أوجد $A_1 \cup A_2$. $A_1 \cup A_2 : : \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

2.**التقاطع**: تقاطع مجموعتين A و B هي المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين A و B و نرمز لها بالرمز التالي ($\cap$) أي أن الحدث يقع إذا و فقط إذا وقع كل من A و B معا وهذا ما يسمى بجداء الأحداث أي $A^* B \leftarrow C= A \cap B$

و إذا كانت A_1 محتواة في A_2 فإن $C=A_1 \cap B = A$.

مثال: لدينا المجموعات التالية:

$A : \{1,4; 5\}$ و $B : \{1,2; 3; 5\}$، المطلوب: أوجد $A \cap B$

$A \cap B : \{1,5\}$

3. متممة المجموعة A: و يرمز لها بالرمز $\bar{A}$ و تعرف على أنها مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الكلية و لا تنتمي إلى المجموعة A.

مثال: المجموعة الكلية (S) $S : \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $A : \{1,3,5,7,9\}$.

أوجد متممة المجموعة A أي $\bar{A}$. $\bar{A} : \{2,4,6,8,10\}$ أو A^b

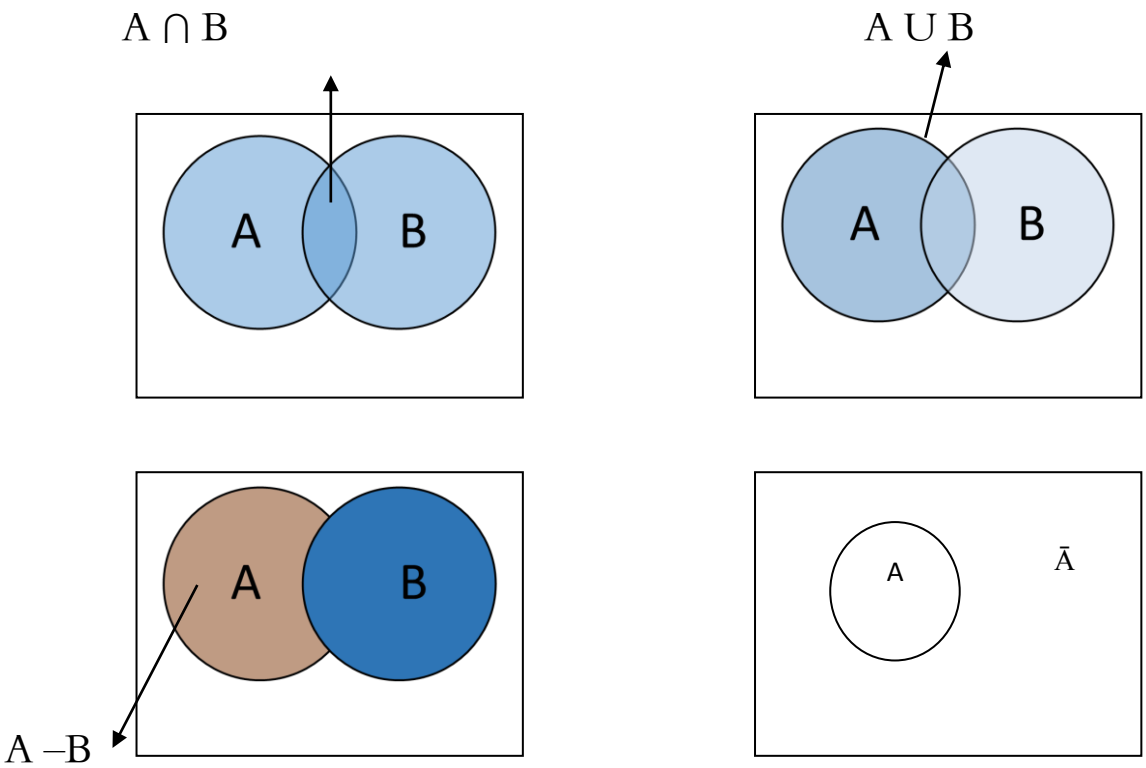
4. الفرق بين مجموعتين: الفرق بين A و B أي (A–B) هو المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B. و بالتالي فغن الفرق بين المجموعتين هو مجموعة العناصر المنتمية لأحدهما و غير المنتمية للآخر.

مثال: لدينا المجموعات التالية:

$A : \{2,4,6,8,10\}$ ، $B : \{2,3,4,5,6\}$ ، $A-B : \{8,10\}$

نلخص قواعد الجبر على المجموعات من خلال شكل فن، فهي عبارة عن طريقة لتسهيل إجراء العمليات الجبرية على المجموعات من خلال تمثيل المجموعات بالدوائر و تمثيل المجموعة الكلية بمربع أو مستطيل و هذا هو ما يعرف بأشكال فن Venn Diagrammes.

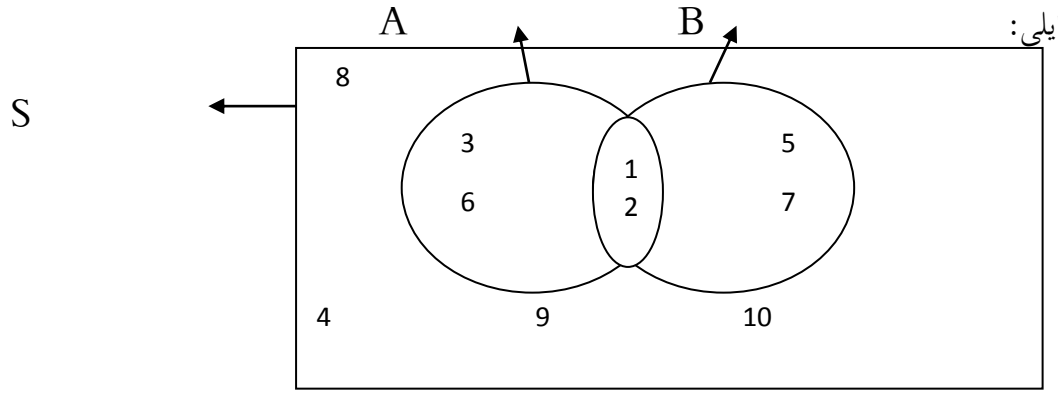
شكل رقم 01 : اشكال فن



5.**المجموعة المنفصلة (المتنافية):** نقول عن المجموعتين A وB متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما هو مجموعة خالية، أي هي المجموعات التي لا تشترك بأي عناصر و تكون العلاقة كمايلي: $A \cap B = \emptyset$.

مثال: لدينا مايلي: $A : \{1,2,3\}$ ، $B : \{4,5\}$، و بالتالي A وB مجموعتان متنافيتان أو منفصلتان $A \cap B = \emptyset$.

مثال: لدينا مايلي:



المطلوب: أوجد المجموعات التالية:

A، B، S، A U B، A ∩ B، $\bar{A}$، $\bar{B}$، $\bar{A}$ U $\bar{B}$، $\bar{A}$ ∩$\bar{B}$، A-B، B-A.

الحل:

S : {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

A : {1,2,3,6}

B : {1,2,5,7}

A U B: {1,2,3,6,5,7}

A ∩ B: {1,2}

$\bar{A}$: {4,5,7,8,9,10}

$\bar{B}$: {3,4,6,8,9,10}

$\bar{A}$ U $\bar{B}$: {3,4,5,6,7,8,9,10}

$\bar{A}$ ∩$\bar{B}$: {4,8,9,10}

A-B: {3,6}

B-A: {5,7}

I . 3. خواص العمليات الجبرية على المجموعات:

تتمثل خواص العمليات الجبرية في تطبيقاتها على المجموعات فيما يلي:

1- خاصية التبديل:

*خاصية التبديل للإتحاد: $A \cup B = B \cup A$

*خاصية التبديل للتقاطع: $A \cap B = B \cap A$

2- خاصية التجميع: تتمثل فيما يلي:

*خاصية التجميع للإتحاد: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

*خاصية التجميع للتقاطع: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3- خاصية التوزيع:

*خاصية توزيع التقاطع على الإتحاد: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

*خاصية توزيع الإتحاد على التقاطع: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4. قوانين دي مورغان De Morgan's Laws: تتمثل فيما يلي:

ليكن A، B مجموعتان فإن:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

هذه القوانين تعطينا العلاقة بين عمليات الإتحاد و التقاطع و أخذ المتممة، ويمكن تعميم القوانين السابقة إلى n من المجموعات بدلا من مجموعتين.

II. بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات

1.II التجربة العشوائية: هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها و لكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستحدث، و مثال على ذلك عند إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما ظهور الصورة H أو ظهور الكتابة T أي أن النتائج الممكنة هي $\{H, T\}$، و قبل إلقاء القطعة لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر، و يمكن تفسير التجارب من حيث نتائجها إلى قسمين أساسين يعتمد كل منها على مدى تكرار نتائج هذه التجارب كمايلي:

فراغ العينة: هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، و يرمز لها بالرمز S، و يرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز n (s)، ويمكن أن يكون فراغ العينة محدود أي منته أو غير محدود غير منته.

مثال 01: إلقاء قطعة نقدية مرة واحدة نجد أن $S: \{H, T\}$ و عدد النتائج $n(s)= 2$

مثال 02: عند رمي زهرة نرد غير متحيزة مرة واحدة فإن $n(s)= 6$ $S: \{1,2,3,4,5,6\}$

-**التجارب الثابتة (المحددة)**: هذا النوع من التجارب يعطي نفس النتيجة عند تكرار التجربة، و لكن تحت نفس الظروف

-**التجارب غير الثابتة و التي عادة ما تسمى بالتجارب العشوائية**: هذا النوع من التجارب الذي تتغير نتيجته من تجربة لأخرى مثل إلقاء قطعة نقدية، فإن الناتج يكون إما صورة أو كتابة و مع ذلك لا نستطيع تحديد نتيجة التجربة و هذه النتائج تسمى بفراغ أو فضاء العينة و يرمز لها بالرمز S.

2.II الحادث: إن النتيجة أو النتائج المحددة من النتائج الممكنة لتجربة ما تشكل حدثا أي مجموعة جزئية من فضاء العينة و نرمز له بالأحرف التالية A, B... وينقسم الحدث إلى عدة أقسام:

1- حادث بسيط: هو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.

2- حادث مركب: و يشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة و يرمز لعدد النتائج المكونة للحادث بالرمز n (A), n (B).... وهكذا.

3- حادث مستحيل: هو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر.

4- حادث أكيد: هو الحادث الذي يحتوي كل عناصر فراغ العينة.

مثال: نلقي قطعة النرد مرة واحدة و نعتبر الحوادث التالية:A: ظهور عدد يقبل القسمة على 5، B: ظهور عدد زوجي، C: ظهور عدد يزيد عن 9، D: ظهور عدد يقل عن 7.

المطلوب: ما هو نوع كل حادث. $S: \{1,2,3,4,5,6\}$

A: حادث بسيط $A : \{5\}$ B: حادث مركب $B : \{2,4,6\}$

C: حادث مستحيل $C : \{\ \} = \emptyset$ D: حادث أكيد $D : \{1,2,3,4,5,6\} = S$

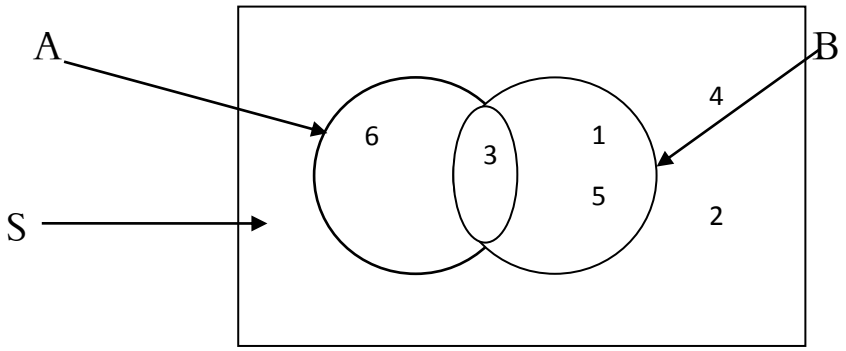
3.II قواعد الجبر على الحوادث: تتمثل قواعد الجبر على الحوادث فيما يلي:

1–الإتحاد U: يعبر اتحاد الحادثتان A, B عن وقوع احدهما على الأقل، و بمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما و يعبر عن ذلك رياضيا : (A U B)أو (A or B). **مثال**: نرمي زهرة نرد مرة واحدة و نعتبر الحوادث التالية:

A: ظهور عدد يقبل القسمة على 3.

B: ظهور عدد فردي

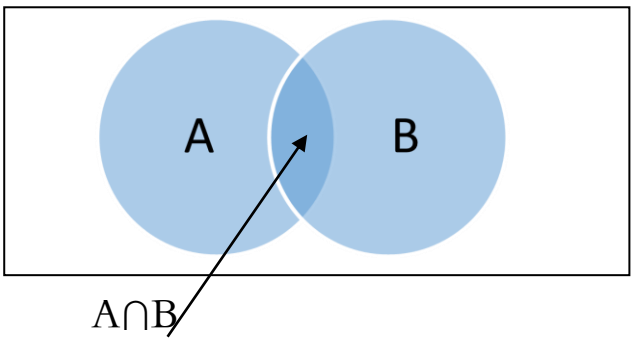
نمثل المجموعة الكلية S و المجموعة A و B وفق شكل فن كمايلي:



المطلوب: أوجد الحادث S، A، B، A U B

S: {1,2,3,4,5,6}، A : {3,6}، B : {1,3,5}، (A U B) : {1,3,5}

2–التقاطع ∩: يعبر تقاطع الحادثان A,B عن وقوع الاثنان في آن واحد و يشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين و يعبر رياضيا (A∩B) أو (A and B) و يظهر ذلك في شكل فن كما يلي:



مثال: نأخذ نفس المثال السابق، **المطلوب**: أوجد A∩B

الحل: A∩B : {3}

5-الحوادث المستقلة: نقول عن الحادثين Aو B أنهما مستقلان، إذا لم يكن لوقوع احدهما أي تأثير على حظوظ وقوع الثاني، (وفي الحالة العكسية نقوا أنهما غير مستقلين).

مثال: يحتوي صندوق على 10 كريات بيضاء و 7 زرقاء، نسحب منه كريتين الواحدة تلوى الأخرى و بدون ارجاع و نعتبر الحادثين:

A: الكرة المسحوبة الأولى بيضاء.

B: الكرة المسحوبة الثانية بيضاء.

لوقوع A تأثير على وقوع B لهذا فهما حادثان غير مستقلين.

إذا تم السحب بالإرجاع يتحقق استقلال الحوادث.

6-الحوادث المتنافية: نقول عن الحاثين Aو B أنهما متنافيان إذا استحالة وقوعهما معا

مثال: نرمي زهرة نرد بالصدفة في الهواء و نعتبر الحوادث التالية:

A: الحصول على عدد زوجي.

B: الحصول على عدد فردي.

C: الحصول على عدد مضاعف ل03

$S= \{1,2,3,4,5,6\}$ ،$A= \{2,4,6\}$ ،$B= \{1,3,5\}$ ،$C= \{3,6\}$

الحادثان AوB متنافيان لأن وقوعهما في نفس الووقت مستحيل أي $A \cap B = \emptyset$

الحادثان Aو Cغير متنافيين لأن وقوعهما في نفس الوقت ممكن وذلك إذا كانت نتيجة التجربة الرقم 6 أي $A \cap C$:{6}.

III . تمارين محلولة :

التمرين الاول : نرمي قطعة نقدية و زهرة نرد مرة واحدة . المطلوب:

- اكتب عناصر الفضاء العيني. ثم بين الحادث البسيط و الحادث المركب

الحل:

$$\Omega = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6),\}$$

الحادث $\{(H,1)\}$ حادث بسيط.

الحادث $\{(H,6),(T,2),(H,1)\}$ حادث مركب.

التمرين الثاني : في تجربة سحب بطاقتين على التوالي من صندوق يحتوي على أربع بطاقات كتبت عليها الأرقام: 1، 2، 3، 4 أكتب الفضاء العيني إذا كان: 1.السحب مع الإرجاع. 2.السحب دون إرجاع.

الحل:

1.

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

2.

$$S = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),\ (4,3),\}$$

التمرين الثالث: سحبت بطاقتان على التوالي من صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات كتبت عليها الأرقام 1،2،3 اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة في حالة السحب مع الإرجاع ، ثم في حالة السحب بدون إرجاع، ثم أوجد:

A – مجموع البطاقتين 4

B – مجموع البطاقتين أكبر من 3

C – مجموع البطاقتين أكبر من 3 أو أقل من 6

D – مجموع البطاقتين أكبر أو يساوي 3 أو أقل من أو يساوي 6

الحل:

مع الإرجاع: $S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3) \\ (3,1),(3,2),(3,3) \end{Bmatrix}$

فيكون:

A : $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ مركب

B : $\{(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ مركب

C : $\{(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),\}$

D : $\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

بدون إرجاع: $S = \begin{Bmatrix} (1,2),(1,3),(2,1),(2,3) \\ (3,1),(3,2) \end{Bmatrix}$

فيكون:

A : $\{(1,3),(3,1)\}$

B : $\{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

C : $\{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),\}$

D : $\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$

التمرين الرابع : بين فيما إذا كانت E1، E2 حوادث متباعدة و شاملة عند إلقاء حجر النرد مرتين:

E1: ظهور عددين مجموعهما 6. E2: ظهور عددين أحدهما مثل الآخر.

الحل:

$S = \{(1,1) \ldots\ldots (6.6)\}$

E1 = $\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,5)\}$

E2 = $\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(3,6),(6,3)\}$

E1 U E2 $\neq \phi = \{(2,4),(4,2)\}$

S $\neq E1\ U\ E2 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(1,2),(2,1),(3,6),(6,3)\}$

إذا ليست شاملة لأن E1 U E2 $\neq S$ وأيضا ليست منفصلة لأن E1 $\cap$ E2 $\neq \phi$.

نتاول من خلال هدا الفصل العناصر التالية:

I. ماهية الاحتمـال

I. 1. مفهوم الإحتمال

I. 2.خواص الاحتمال

I. 3.قوانين الاحتمال

I. 4.التحليل التوافقي

II. نظرية الاحتمالات الكلية و نظرية BAYS لحساب الاحتمالات.

II. 1. نظرية الاحتمالات الكلية

II. 1.نظرية BAYS لحساب الاحتمالات

III. تمارين محلولة

I. ماهية الاحتمال

I. 1. **مفهوم الإحتمال** : كثيرا ما نستخدم كلمة إحتمال في حياتنا اليومية فنقول مثلا إن إمكانية هطول المطر اليوم كبيرة جدا ، هذه الإمكانية يمكن التعبير عنها بكلمة آخرى ، فنقول مثلا " أنه من المحتمل جدا أن يهطل المطر اليوم ، إلا أن هذا الكلام يعبر عن تقديرات عامة غير دقيقة لوقوع الحادث ، مما جعل الإحصائيين يرون ضرورة قياسه بقيمة عددية لإضفاء طابع الدقة عليه ، هذه القيمة العددية هي التي تحدد لنا ما نسميه بإحتمال تحقق الحادث المذكور ، ويقاس الإحتمال بقياس نهايته الصغرى هي الصفر التي تعكس الإستحالة المطلقة لتحقيق الحادث ، ونهايته العليا هي الواحد و التي تعكس الحقيقة المطلقة لتحقيق الحادث ، وبالتالي فإن القيمة العددية للإحتمال هي عبارة عن كسر يقع بين الصفر الواحد، فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث A بالرمز P(A)، فإن طريقة حساب هذا الإحتمال تتحدد وفقا لنوع الإحتمال يوجد نوعان للإحتمال هما :

– **الإحتمال التجريبي** : ويعبر عنه بالتكرار النسبي و يأخذ الصيغة التالية : $P(A) = \frac{f(A)}{n}$

حيث أن :

n هو مجموع التكرارات (العدد الكلي للمشاهدات) . f(A): هو تكرار الحادث A،

مثال: تم إلقاء قطعة نقدية غير متحيزة 500 مرة ، وثم ملاحظة عدد مرات ظهور كل وجه ، ثم لخصت كالتالي :

الوجه(Face)	H	T	SUM
عدد مرات ظهور الوجه	200	300	500

المطلوب: حساب إحتمال ظهور الصورةH ، يمكن تطبيق المعادلة السابقة و التي تعتمد على التكرار النسبي ، أي أن : $P(H) = \frac{f(H)}{n} = \frac{200}{500} = 0.40$

الإحتمال النظري : هو الذي يعتمد في حسابه على أسس وقواعد الرياضيات ، و التي تستخدم في تحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة ، وعدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث ، و من ثم يحسب هذا النوع من الإحتمال ، بتطبيق الصيغة الرياضية التالية: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

حيث أن :

n(S) هو عدد النتائج الممكنة للتجربة .

n(A): هو عدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث A

مثال : عند إلقاء قطعة نقدية غير متحيزة مرة واحد ، نجد أن فراغ العينة هو : S : [H ,T] أي أن عدد النتائج الممكنة هي : n(s) =2، و إذا كان الحادث Aهو ظهور الصورة H، نجد أن A : [H] ، أي أن عدد النتائج المكونة Aهي : n (A)=1، ويكون إحتمال وقوع الحادث Aهو :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2} = 0.5$$

النتائج المتشابهة : إذا أجريت تجربة ، و كانت كل نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة لها نفس الفرصة في الظهور ، بمعنى أن كل نتيجة لها إحتمال هو (1/n(s)) ، تسمى هذه النتائج بالنتائج المتماثلة أو المتشابهة ، فعند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو S : [1,2,3,4,5,6] ، و إحتمال كل نتيجة هو (1/6) ، وعند إلقاء الزهرة مرتين نجد أن عدد نتائج فراغ العينة هو :

$n(s) = 6^2 = 36$ وهي :

	1	2	3	4	5	6
1	(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)
2	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(2.6)
3	(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(3.6)
4	(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)	(4.5)	(4.6)

5	(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	(5.5)	(5.6)
6	(6.1)	(6.2)	(6.3)	(6.4)	(6.5)	(6.6)

وهذه النتائج متماثلة ، و إحتمال كل نتيجة هو (1/36)

النتائج غير المتماثلة : هي النتائج التي تحدث عند تكرار محاولة ، بحيث أن إحتمالات نتائج كل محاولة غير متساوي ، ومن ثم لا تتساوى إحتمالات نتائج التجربة .

مثال 01 : نرمي زهرة نرد مرة واحدة ، فما هو إحتمال وقوع الحوادث التالية :

A: الحصول على عدد زوجي B:الحصول على عدد فردي C : الحصول على عدد مضاعف لـ 3

S : [1.2.3.4.5.6] A=[2.4.6] B=[1.3.5]

C=[3.6] n(S)=6

$$P(A) = \frac{n(a)}{n(s)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(b)}{n(s)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

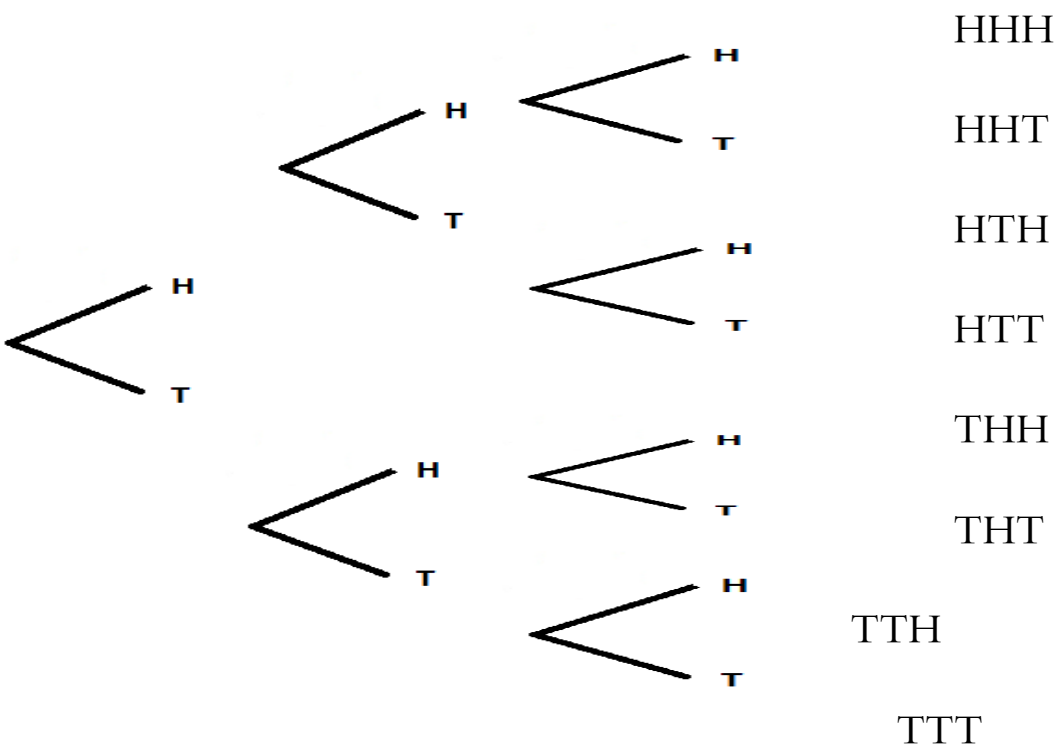
$$P(C) = \frac{n(c)}{n(s)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال 02 : نرمي قطعة نقدية 3 مرات بالصدفة في الهواء أحسب إحتمال وقوع الحوادث التالية :

A: ظهور الصورة Hمرتين فقط متتاليتين B: ظهور الصورة Hمرة واحدة على الأقل

C: ظهور الصورة H مرة واحدة على الأكثر D: ظهور الكتابة T ثلاث مرات.

الحل :



S={HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

$N_{(S)}=8$

A: ظهور الصورة Hمرتين فقط متتاليتين :

A :[HHT .THH] $n_{(A)}=2$

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

B : ظهور الصورة H مرة واحدة على الأقل

B :[HHH.HHT.HTH.HTT.THH.THT.TTH] $n_{(B)}=7$

$$p(B)=\frac{n(B)}{n(C)}=\frac{7}{8}$$

C : ظهور الصورة H مرة واحدة على الأكثر

C :[HTT.THT.TTH.TTT] n (C) =4

$$p(C) = \frac{n(C)}{n(C)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

D : ظهور الكتابة T ثلاث مرات :

D :[TTT] n(D)=1

$$p(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

I. 2.خواص الاحتمال: تتمثل خواص الاحتمال فيما يلي:

- الاحتمال هو عدد موجب تماما او معدوم (لا يكون سالبا).
- مجموع احتمالات احداث تجربة ما يساوي الواحد.

أما الخاصية الثالثة فنستنتجها من الخاصيتين السابقتين وفق الصبغة العامة للاحتمال: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

حيث :

n(A): عدد الحالات المواتية

n(S): عدد الحالات الكلية

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} n(A) \geq 0 \\ n(s) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{n(A)}{n(s)} \geq 0 \\ n(A) \leq n(s) \Longrightarrow \frac{n(A)}{n(s)} \leq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$$

هذا يعني ان الاحتمال محصور بين ادنى قيمة تساوي الصفر(0) و اكبر قيمة تساوي الواحد (1).

I. 3.قوانين الاحتمال:

نظرية 1: اذا رمزنا للحدث الخالي بالحرف Ø .و كان P الاحتمال المعرف على Sفإن:

$P(\emptyset)=0$ نلاحظ ان الحادث Ø يعني عدم حدوث اي نتيجة من النتائج الممكنة في التجربة الاحصائية، لذلك فان $p(\emptyset)=0$ باستعمال فرضيات تعريف الاحتمال.

مثال: نرمي قطعة نقدية مرة واحدة في الهواء،فما هو احتمال الحصول على H مرتين ؟

H

S :{H,T} n(s) =2

T

A=الحصول على H مرتين

A :{Ø} n(A)=0

$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{0}{2}=0$

نظرية 2: اذا كان A حادث في S ، $\bar{A}$ متممة ذلك الحدث فإن: $P(\bar{A})=1-p(A)$

هذا يعني انه اذا كان احتمال حدوث الحادث A هو $P(A)$فان احتمال عدم حدوث A هو $p(\bar{A})$ و هو ما يسمى باحتمال الحادث العكسي

مثال2: إذا كان احتمال وصول الطالب الى محاضراته في الوقت المحدد يساوي 0.70، فما هو احتمال وصول الطالب متأخرا أي عدم وصوله في الوقت المحدد.

A: الوصول في الوقت المحدد الى المحاضرة. $\bar{A}$: عدم الوصول في الوقت المحدد الى المحاضرة.

$P(A)=0.70$

$P(\bar{A})=1-p(A)=1-0.70=0.30$

اما بقية القوانين فنلخصها فيما يلي :

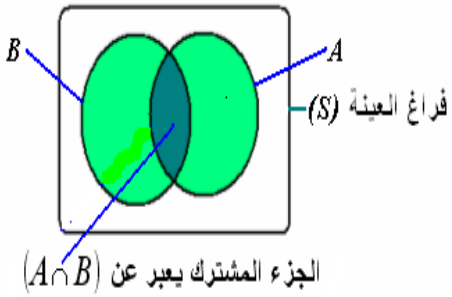
1- **قانون الجمع**: نعتبر فضاء عينة S عدد عناصره ، n(S)عدد الحوادث الكلية ، و حادثين A و B بحيث عدد عناصر A هو n(A) أي عدد الحالات المواتية لوقوع A ،و عدد عناصر B هو n(B) أي عدد الحالات المواتية لوقوع B ، فان اتحاد الحادثين اي الجمع بينهما يكون وفق الصيغة التالية :

$$P(A \cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}$$

$$=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$



في حالة ثلاثة أحداث A.B.C يمكن استنتاج معادلة الاتحاد P(AUBUC) كما يلي:

$$P(A\cup B\cup C)= p(A)+p(B)+ p(C)- p(A\cap B) - p(A\cap C)- p(B\cap C)+ P(A\cap B\cap C)$$

في حالة الاحداث المتنافية فان احتمالات التقاطعات تساوي أصفار أي:

$$A\cap B\neq\emptyset \Longrightarrow p(A\cap B)=0$$

$$A\cap C=\emptyset \Longrightarrow P(A\cap C)=0$$

$B \cap C = \emptyset \Longrightarrow P(B \cap C) = 0$

مما سبق يصبح قانون الجمع كما يلي:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C)$.

مثال:اذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الاولى يساي 0.20 و احتمال غيابه عن المحاضرة الثانية يساي 0.15 و احتمال غيابه عن المحاضرتين الاولى و الثانية يساي 0.05.

المطلوب:

1. ما هو احتمال غياب الطالب عن واحدة من هاتين المحاضرتين على الاقل؟
2. ما هو احتمال عدم غياب الطالب عن أي من المحاضرتين؟

الحل:

A:غياب الطالب عن المحاضرة الاولى.

B: غياب الطالب عن المحاضرة الثانية.

$A \cap B$: غياب الطالب عن المحاضرتين معا.

1. $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
   $= 0.20 + 0.15 - 0.05 = 0.30$.
2. $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.30 = 0.70$.

2 – قانون الاحتمال الشرطي:conditional probability

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث،اذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الاحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد ،

فإذا كان الحدث B حادث معلوم، و الحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه،بمعلومية الحادث B ، فان هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

و يعرف الاحتمال $p(A/B)$ بقانون الاحتمال الشرطي ، و يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B "، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B " كما يمكن حساب احتمال وقوع الحادث B بمعلومية الحادث A، ذلك بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

مثال: نرمي قطعة نقدية ثلاثة مرات .

المطلوب: اذا علمت اننا حصلنا في الرمية الاولى على الصورة H فما احتمال ان نحصل على الصورة H في الرمية الثانية الثالثة.

الحل:

S :{HHH.HHT.HTH.HTT.THH.THT.TTH.TTT}

A :الصورة H في الرمية الاولى.

B: الوجهان في الرمية الثانية الثالثة أي الصورة H في الرمية الاولى و الثانية.

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

A :{HHH.HHT.HTH.HTT} $n(A)=4$

$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

B :{HHH.THH} $n(B)=2$ $p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$A\cap B:\{HHH\}$ $n(A\cap B)=1$

$p(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(s)}=\frac{1}{8}$

$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1/8}{4/8}=\frac{1}{4}$

3 – قانون الضرب: بالرجوع الى التعريف السابق للاحتمال الشرطي ، و بعد اجراء الضرب التبادلي نحصل على مايلي [1]:

اذا كان $p(A)>0$ $p(A\cap B)=p(A).p(B/A)$

اذا كان $p(B)>0$ $p(A\cap B)=p(B).p(A/B)$

هذه النظرية تعطي قاعدة الضرب في حالة الاحداث المشروطة.

مثال: لدينا ما يلي:

$p(A)=0.60$ $p(B)=0.30$ $p(A/B)=0.40$

المطلوب :أوجد ما يلي :

1. $p(A\cap B)$
2. $p(B/A)$

الحل:

1. من قاعدة الضرب:

$p(A\cap B)=p(B).p(A/B)$

$=0.30\ .0.40=0.12$

[1] Brigitte tribout , op.cit , p 243 .

.2

$$p(B/A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0.12}{0.60}=0.20$$

I. 4.التحليل التوافقي

1– المبدأ الأساسي للعد : إذا كان لدينا مجموعتين A_1و A_2 عدد عناصرها n_1و n_2، فإن الطرق الممكنة لإختيار عنصر واحد من المجموعة الأولى و عنصر آخر من المجموعة الثانية هو n_1* n_2و يمكن تعميم هذه النتيجة إلى حالة K مجموعة ، فإذا كانت لدينا المجموعات $A_1,A_2,\ldots\ldots A_K$ عدد عناصرها $n_1,n_2\ldots\ldots,n_k$ ، فإن الطرق الممكنة لإختيار عنصر واحد من كل مجموعة هو n1*n2*….*nk .

مثال01: نريد تشكيل لجنة بيداغوجية مكونة من الرئيس و نائبه،يتقدم 08 أشخاص كمترشحين للرئاسة و 05 أشخاص كمترشحين للنيابة.كم لجنة يمكن تشكيلها؟

الحل: n1.n2=8.5=40

مثال 02: نرمي قطعة نقود و زهرة نرد، ما هي عدد النتائج الممكنة التي يمكن الحصول عليها في هذه التجربة؟

الحل:

القطعة تحمل وجهين (02) هما:{T.H}

زهرة النرد تحمل 6 أوجه و هي {1 ,2,3,4,5,6}

و منه و حسب ما سبق فان عدد النتائج الكلية الممكنة لهذه التجربة هي n1xn2=2x6=12

أو عن طريق التوفيقة $C_2^1 x C_6^1=\frac{2!}{1!1!}x\frac{6!}{1!5!}=2x6=12$

2.التوفيقات combainisan : تعتبر مجموعة أصلية ذات n عنصر تسمى توفيقة لk عنصر،كل مجموعة جزئية k عنصر مختارة من بين n عنصر عشوائيا و تأخذ الصيغة التالية: $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

مثال: لدينا 08 رجال 06 نساء يتقدمون للتوظيف لاربعة مناصب شغل.

1. ما هو عدد الامكانيات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة ؟
2. ما هو عدد الامكانيات المختلفة لتوظيف هذه المجموعة علما أننا أخذنا رجلين و امرأتين؟

- $c_{14}^{4} = \frac{14!}{4!10!} = 6006$
- $c_{8}^{2} x c_{6}^{2} = \frac{8!}{2!6:} x \frac{6!}{2!4!} = 420$

3.الترتيبات: الشرط الاساسي في هده الحالة هو ترتيب العناصر و تنقسم الى قسمين:

1.3.ترتيبة بدون تكرار:هي كل ترتيب على k عنصرا مختارة من بين n عنصر بحيث لايمكن لاي عنصر الظهور اكثر من مرة واحدة ،و نحصل عليها بسحب هذه العناصر الواحدة تلوى الاخرى و بدون ارجاع عددها هو:

- A_n^k =n(n-1)(n-2).....[(n-k+1)]

نسحبk الواحدة تلوى الاخرى بدون ارجاع $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

مثال 01: بكم كيفية يمكننا سحب ورقتين الواحدة تلوى الاخرى و بدون ارجاع لعبة تتضمن 52 ورقة ؟

$$A_{52}^{2} = \frac{52!}{(52-2)!} = \frac{52!}{50!} = 52x51$$

مثال 02:كم يوجد من علم مشكل من 3 أشرطة عمودية مختلفة اللون نختارها من بين 08 ألوان؟

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8x7x6x5!}{5!} = 8x7x6=336.$$

2.3.ترتيبة بتكرار: هي كل ترتيب على K عنصرا مختارا من nعنصرا ،بحيث يمكن لكل عنصر الظهور أكثر من مرة واحدة و نحصل عليها بسحب هذه العناصر الواحدة تلوى الأخرى و بارجاع عددها هو: $\tilde{A}_n^k$ =nxnx.....n=n^k

$\tilde{A}_n^k = n^k$

مثال 01:كم يوجد من خط هاتفي مكون من 08 أرقام؟

$\tilde{A}_n^K = \tilde{A}_{10}^8 = 10^8$

4.التبديلات: تنقسم الى قسمين كما يلي:

1.4. تبديلة بدون تكرار :هي حالة خاصة من الترتيبات بدون تكرار حيث n=k عددها $p_n = n!$

مثال01: بكم كيفية يمكن لـ 10 أشخاص الجلوس على 10 كراسي موجودة على استقامة واحدة؟

$p_n = n! = 10! = 10x9x8x7x6x5x4x3x2x1 = 362880$

مثال02:بكم طريقة يمكن تشكيل عددا من أربعة أرقام من الارقام التالية :1،2،3،4؟

يتم ذلك كما يلي: $p_n = n! = 4! = 24$.

2.4. تبديلة بتكرار: تعتبر مجموعة مكونة من n عنصرا مقسمة الى k فئة بحيث لا يمكن التفرقة بين عنصرين من نفس الفئة، عدد عناصرها على الترتيب هو $n_1, n_2 \ldots\ldots\ldots\ldots n_k$.

ان عدد التبديلات الممكنة على عناصر هذه المجموعة هو: $\tilde{p}_n = \frac{n!}{n1!n2!n3!\ldots\ldots nk!}$

مثال01:كم يوجد من كلمة مكونة من حروف كلمة STATISTICS؟

عدد الكلمات هو:

$$\tilde{p}_n = \frac{n!}{n1!n2!n3!} = \frac{10!}{3!3!2!}$$

II . نظرية الاحتمالات الكلية و نظرية BAYS لحساب الاحتمالات.

II . 1. نظرية الاحتمالات الكلية: اذا كانت E1،E2.....En حوادث متباعدة و شاملة في فضاء العينة S حيث $E \subset S$ فان:

$$P(E) = p(E/E1)p(E1) + p(E/E2)p(E2) + \ldots + p(E/En)p(En)$$

مثال : لدينا صندوقان U1و U2 بحيث يحتوي U1 على b1 كرة بيضاء n1 كرة سوداء،و يحتوي U2 على b2 كرة بيضاء و n2 كرة سوداء ،و نسحب كرة بالصدفة من احد الصندوقين و ذلك عبر مرحلتين:

1. اختيار احد الصندوقين U1 باحتمال P1 و U2 باحتمال P2 حيث P1+P2=1
2. نسحب كرة بالصدفة من الصندوق المختار في المرحلة 1

U1		U2	
h1	b 1	h 2	b 2
سوداء	بيضاء	سوداء	بيضاء
P(U1)=P1		P(U2) =P2	

A: الحصول على كرة بيضاء

$$p(A)=p(A/U1)p1+p(A/U2)p2$$

$$=\frac{b1}{b1+h1}p1+\frac{b2}{b2+h2}p2$$

II . 1.نظرية بيز bays

إذا كانت E1,E2,.....En حوادث متباعدة و شاملة في فضاء العينة s حيث E ⊂ S فان:

$$p(Em/E)=\frac{p(E/Em)p(Em)}{p(E)}$$

حيث m=1.2.....n

مثال : نأخذ نفس معطيات المثال السابق.

المطلوب:اذا حصلنا على كرة بيضاء فما هـ احتمال ان تكون عملية السحب في صندوق U1

$$p(U1/A) = \frac{p(A/U1)\,p1}{p(A)} = \frac{\frac{b1}{b1+h1}p1}{\frac{b1}{b1+h1}p1+\frac{b2}{b2+h2}p2}$$

تمرين: ينقسم مصنع الى 3 اقسام حيث يضمن القسم I 35 % من جملة المنتوج على المصنع و 10% من منتوجه فاسد/ اما القسم II فيضمن 40 % من جملة المنتوج الكلي و 11 % من منتوجه فاسد، اما القسم IIIفينتج 25 % من جملة المنتوج الكلي 7 % من منتوجه فاسد .

1. اشترى شخص قطعة من منتوج المصنع.احسب احتمال ان تكون فاسدة.
2. اشترى شخص قطعة من منتوج المصنع و ظهر انها فاسدة.احسب احتمال ان تكون قد انجزت في القسمII.

الأقسام	I	II	III
نسبة الإنتاج	35%	40%	25%
فاسد	10%	11%	7%

A:القطعة الفاسدة.

1. $p(A)=p(A/I)p(I)+p(A/II)p(II)+p(A/III)p(III)$

   $=0.10.0.35+0.11.0.40+0.07.0.25$

   $p(A)=0.0965$

2. $p(II/A)=\frac{p(A/II)p(II)}{p(A)}=\frac{0,11.0,40}{0,0965}$

   $p(II/A)=0,45.$

III . تمارين محلولة

التمرين 01: نعتبر ثلاثة حوادث A, B , C من فراغ عينة ، اوجد العبارة الرياضية لكل من الحوادث الآتية:

1 – يقع B فقط . 2 – حادثان فقط من بين الثلاثة يقعان .

3 – لا يقع أي حدث . 4 – حادث على الأقل من بين الثلاثة يقع .

التمرين 02: تحتوي علبة على(40)عنصرا منها (12) فاسد، نسحب(10)بالصدفة، احسب احتمال الحصول على:

1 – (03)عناصر صالحة. 2 – عنصرين صالحين على الأقل.

3 – (08)عناصر صالحة على الأكثر . 4 – عنصرين فاسدين على الأقل.

التمرين 03 : بالموازاة مع معرض تجاري توضع يوميا للبيع 30 تذكرة منها 10 تذاكر مربحة ، قرر شخص شراء 05 تذاكر خلال 05 أيام مختلفة بحيث يكون أول المشترين (أي يشتري كل يوم تذكرة من بين 30) نعتبر الحوادث :

A – يحصل الشخص على تذكرتين فقط مربحتين و تكونان خلال اليومين الأولين.

B– يحصل الشخص على 03 تذاكر مربحة فقط ، و تكون خلال 03 أيام متتابعة.

C– يحصل الشخص على تذكرتين مربحتين على الأقل.

التمرين 04: آلة للكتابة تضم 42 زرا منها 10 أرقام و 26 حرفا، نقوم بلمس 08 أزرار عشوائيا بحيث يمكننا لمس نفس الزر أكثر من مرة واحدة، احسب احتمال كتابة:

1 – متتالية من 08 حروف. 2– كلمة sciences مبعثرة.

3 – كلمة sciences 4– كلمة sciences مبعثرة بحيث i يأتي مباشرة وراء n.

التمرين 05: آلة معينة تتضمن عنصرين الكترونيين حيث تبقى تشتغل ببقاء العنصرين معا يشتغلان ، ادا كان احتمال توقف العنصر الأول على الاشتغال قبل عام هو 0.4و احتمال توقف العنصر الثاني عن الاشتغال هو قبل عام هو 0.5، فما هو احتمال توقف الآلة عن الاشتغال قبل عام (نفرض أن العنصرين يشتغلان مستقلين عن بعضهما البعض) .

التمرين 10: نرمي قطعة نقدية 06 مرات متتالية بالصدفة في الهواء و نعتبر الحوادث:

A – نحصل علىH 03 مرات. B – نحصل علىH مرتين على الأقل. C – نحصل علىT 03 مرات.

- ادرس استقلال الحوادث مثنى مثنى.

التمرين 06 : وضعت أمينة مكتب (A_1) بمكتب المحاسبة حيث تولت طبع 20% من الفواتير ، يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع 30% من الفواتير و الأخرى (A_3) 50% ، ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5 % من الفواتير ، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_3) 1% .

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء ، فاستعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20% من الفواتير ، وردت عليها العاملات الأخريات بان نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر 5% .

1. احسب احتمال ان تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات ، ان تكون بها اخطاء .
2. احسب احتمال ان تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة و قارن مع احتمال ان يكون مصدر الخطأ هو (A_2) و (A_3) .

الحلول

التمرين 01:

1) – يقع B فقط: $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$

2 – حادثان فقط يقعان من بين الثلاثة:

$$(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$$

3) – لا يقع أي حادث $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

4) – حادث على الأقل من بين الثلاثة يقع:

$$(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C)$$

الحادث العكسي: لا يقع أي حادث: $(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

التمرين 02:

- عدد الحالات الممكنة: $n(s) = C_n^k = C^{10}_{40} = \frac{40!}{(40-10)!10!}$

1)- الحصول على 03 عناصر مختلفة (A):

$$n(A) = C_n^k = C_{28}^3 \, C_{12}^7$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{C_{28}^3 \, C_{12}^7}{C_{40}^{10}}$$

2)- الحصول على عنصرين صالحين على الأقل(B):

$$n(B) = C_n^k = c_{28}^2 \, c_{12}^8 + c_{28}^3 \, c_{12}^7 + \cdots + c_{28}^{10} \, c_{12}^0$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{c_{28}^2 \, c_{12}^8 + c_{28}^3 \, c_{12}^7 + \cdots + c_{28}^{10} \, c_{12}^0}{c_{40}^{10}}$$

* الطريقة الثانية :

$\bar{B}$:الحصول على عنصر صالح على الأكثر

$$n(\bar{B}) = C_n^k = c_{28}^1 \, c_{12}^9 + c_{28}^0 \, c_{12}^{10}$$

$$P(\bar{B}) = \frac{n(\bar{B})}{n(s)} = \frac{c_{28}^1 \, c_{12}^9 + c_{28}^0 \, c_{12}^{10}}{c_{40}^{10}}$$

$$\Longrightarrow \quad P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{c_{28}^1 \, c_{12}^9 + c_{28}^0 \, c_{12}^{10}}{c_{40}^{10}}$$

3)- الحصول على 08 عناصر صالحة على الأكثر(C):

* الطريقة الأولى:

$$n(C) = C_n^k = c_{28}^8\, c_{12}^2 + c_{28}^7\, c_{12}^3 + \cdots + c_{28}^0\, c_{12}^{10}$$

$$P(c) = \frac{n(C)}{n(s)} = \frac{c_{28}^8\, c_{12}^2 + c_{28}^7\, c_{12}^3 + \cdots + c_{28}^0\, c_{12}^{10}}{c_{40}^{10}}$$

الطريقة الثانية:

- C : الحصول على 09 صالحة على الأقل:

$$n(\bar{c}) = C_n^k = c_{28}^9\, c_{12}^1 + c_{28}^{10}\, c_{12}^0$$

$$P(\bar{c}) = \frac{n(\bar{C})}{n(s)} = \frac{c_{28}^9\, c_{12}^1 + c_{28}^{10}\, c_{12}^0}{c_{40}^{10}}$$

$$P(c) = 1 - \frac{c_{28}^9\, c_{12}^1 + c_{28}^{10}\, c_{12}^0}{c_{40}^{10}}$$

4)- الحصول على عنصرين فاسدين على الأقل (D):

$$n(D) = C_n^k = c_{12}^2\, c_{28}^8 + c_{12}^3\, c_{28}^7 + \cdots + c_{12}^{10}\, c_{28}^0$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(s)} = \frac{c_{12}^2\, c_{28}^8 + c_{12}^3\, c_{28}^7 + \cdots + c_{12}^{10}\, c_{28}^0}{c_{40}^{10}}$$

- (D):الحصول على عنصر فاسد على الأكثر

$$n(\bar{D}) = C_n^k = c_{12}^1\, c_{28}^9 + c_{12}^0\, c_{28}^{10}$$

$$P(\bar{D}) = \frac{n(\bar{D})}{n(s)} = \frac{c_{12}^1\, c_{28}^9 + c_{12}^0\, c_{28}^{10}}{c_{40}^{10}}$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D})$$

التمرين 03:

عدد الحالات الكلية:

$$n(S) = \tilde{A}_n^k = \tilde{A}_{30}^5 = 30^5$$

A: الحصول على تذكرتين مربحتين فقط و تكونان خلال اليومين الأوليين

عدد الحالات المواتية:

$$n(A) = \tilde{A}_{20}^3 . \widetilde{A}_{10}^2 = 20^3 . 10^2$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\tilde{A}_{20}^3 . \widetilde{A}_{10}^2}{\tilde{A}_{30}^5} = \frac{20^3 . 10^2}{30^5}$$

B: الحصول على 3 تذاكر مربحة فقط و تكونان خلال 3 أيام متتابعة:

عدد الحالات المواتية:

$$n(B) = 3(\tilde{A}_{20}^2 . \widetilde{A}_{10}^3) = 3(20^2 . 10^3)$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{3(\tilde{A}_{20}^2 . \widetilde{A}_{10}^3)}{\tilde{A}_{30}^5} = \frac{3(20^2 . 10^3)}{30^5}$$

C:الحصول على تذكرتين مربحتين على الأقل:

- الطريقة الأولى:

$$n(C) = \tilde{A}_{20}^3 . \widetilde{A}_{10}^2 + \tilde{A}_{20}^2 . \widetilde{A}_{10}^3 + \tilde{A}_{20}^1 . \widetilde{A}_{10}^4 + \tilde{A}_{20}^0 . \widetilde{A}_{10}^5$$
$$= 20^3 . 10^2 + 20^2 . 10^3 + 20^1 . 10^4 + 20^0 . 10^5$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(s)} = \frac{\tilde{A}_{20}^{3}.\widetilde{A}_{10}^{2} + \tilde{A}_{20}^{2}.\widetilde{A}_{10}^{3} + \tilde{A}_{20}^{1}.\widetilde{A}_{10}^{4} + \tilde{A}_{20}^{0}.\widetilde{A}_{10}^{5}}{\tilde{A}_{30}^{5}}$$

$$= \frac{20^3.10^2 + 20^2.10^3 + 20^1.10^4 + 20^0.10^5}{30^5}$$

الطريقة الثانية :

$\bar{C}$: الحصول على تذكرة مربحة على الأكثر

$$n(\bar{C}) = 5(\widetilde{A}_{20}^{4}.\widetilde{A}_{10}^{1}) + \tilde{A}_{20}^{5}.\widetilde{A}_{10}^{0} \quad = 5(20^4.10^1) + 20^5.10^0$$

$$P(\bar{C}) = \frac{n(\bar{C})}{n(s)} = \frac{5(\widetilde{A}_{20}^{4}.\widetilde{A}_{10}^{1}) + \tilde{A}_{20}^{5}.\widetilde{A}_{10}^{0}}{\tilde{A}_{30}^{5}}$$

$$= \frac{5(20^4.10^1) + 20^5.10^0}{30^5}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{5(20^4.10^1) + 20^5.10^0}{30^5}$$

التمرين 04:

عدد الحالات الكلية:

$$n(S) = \tilde{A}_{n}^{k} = \tilde{A}_{42}^{8} = 42^8$$

A-1): متتالية من 8 حروف

$$n(A) = \tilde{A}_{26}^{8} \quad = 26^8$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{\tilde{A}_{26}^{8}}{\tilde{A}_{42}^{8}} = \frac{26^8}{42^8}$$

3)- B : كلمة SCIENCES مبعثرة:

$$n(B) = P_n = \frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!} = \frac{8!}{2!.2!.2!}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{\frac{8!}{2!.2!.2!}}{\tilde{A}_{42}^{8}} = \frac{\frac{8!}{2!.2!.2!}}{42^8}$$

3)- C: كلمة SCIENCES مرتبة :

$$n(C) = 1$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(s)} = \frac{1}{\tilde{A}_{42}^{8}} = \frac{1}{42^8}$$

4)- D كلمة : SCIENCES يأتي مباشرة وراء I مبعثرة بحيث n

$$n(D) = P_n = \frac{n!}{n_1!.n_2!.n_3!} = 7\frac{6!}{2!.2!.2!}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(s)} = \frac{7\frac{6!}{2!.2!.2!}}{\tilde{A}_{42}^{8}} = \frac{7\frac{6!}{2!.2!.2!}}{42^8}$$

التمرين 05:

A : توقف العنصر الأول عن الاشتغال قبل عام $P(A)=0.4$

B : توقف العنصر الثاني عن الاشتغال قبل عام $P(B)= 0.5$

C : توقف الآلة عن الاشتعال قبل عام

$$C = A \cup B \Longrightarrow P(C) = P(A \cup B)$$

$P(C) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A) . P(B)$

$=0.4 + 0.5 - 0.4 . 0.5$

$P(C) = 0.7$

الحادثتين A و B مستقلتين $P(A\cap B) = P(A) . P(B)$

التمرين 10:

عدد الحالات الكلية : $n(S) = 2^6$

A: نحصل على H 3 مرات

$$n(A) = C_n^k = C_6^3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{C_6^3}{2^6}$$

B: نحصل على A مرتين على الأقل نستعمل الحادث العكسي

$\bar{B}$: نحصل على H مرة على الأكثر $\left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ مرة } 1 \\ 1\text{مرة } 6= \ c_6^1 \end{array} \right.$

$$P(\overline{B}) = \frac{1+6}{2^6} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{7}{2^6}$$

C: نحصل على T 3 مرات

$$n(C) = C_n^k = C_6^3$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(s)} = \frac{C_6^3}{2^6}$$

استقلال A و B : التحقق من العلاقة :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

إذا تحققت A يتحقق B

A C B $\Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) = \frac{c_6^3}{2^6} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

ادن A وB غير مستقلين

استقلال AوC: التحقق من العلاقة :

$$P(A \cap C) = P(A).P(C)$$

$$A = C \Rightarrow A \cap C = A = C$$

$$P(A \cap C) = p(A) = \frac{c_6^3}{2^6} \Rightarrow P(A \cap C) \neq P(A).P(C)$$

إذن A و C غير مستقلين .

التمرين 06:

1- احتمال وجود خطأ في مراسلة ما :

A : المراسلة فيها خطأ.

$$P(A) = P(A/A_1)P(A_1) + P(A/A_2)P(A_2) + P(A/A_3)P(A_3)$$

$$= (0,2 * 0,05) + (0,3 * 0,02) + (0,5 * 0,01) = 0.021$$

2 - حساب احتمال ان تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة و مقارنتها مع احتمال ان يكون مصدر الخطأ هو (A_2) و (A_3) .

$$P\ (A_1/A) = \frac{\mathrm{P(A/A_1)P(A_1)}}{\mathrm{p(A)}}$$

$$= \frac{0{,}2 * 0{,}05}{(0{,}2 * 0{,}05) + (0{,}3 * 0{,}02) + (0{,}5 * 0{,}01)}$$

$$= 0{,}238$$

$$P\ (A_2/A) = \frac{\mathrm{P(A/A_2)P(A_2)}}{\mathrm{p(A)}}$$

$$= \frac{0{,}3 * 0{,}02}{(0{,}2 * 0{,}05) + (0{,}3 * 0{,}02) + (0{,}5 * 0{,}01)}$$

$$= 0{,}285$$

$$P\ (A_3/A) = \frac{\mathrm{P(A/A_3)P(A_3)}}{\mathrm{p(A)}}$$

$$= \frac{0{,}5 * 0{,}01}{(0{,}2 * 0{,}05) + (0{,}3 * 0{,}02) + (0{,}5 * 0{,}01)}$$

$$= 0{,}476$$

نتناول من خلال هذا الفصل العناصر التالية:

I. المتغير العشوائي المتقطع

I. 1. مفهوم المتغير العشوائي المتقطع

I. 2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

I. 3.دالة التوزيع المتجمع

II . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتقطع

II .1. توزيع ذو الحدين

II .2. التوزيع البواسوني

I. المتغير العشوائي المتقطع:

I. 1. مفهوم المتغير العشوائي المتقطع: هو المتغير الذي يأخذ قيم مختلفة بوحدات معينة قابلة للعد ،و بعبارة أخرى هو عبارة عن دالة مجالها s و مداها مجموعة جزئية من الاعداد الصحيحة.

I. 2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع : هو عبارة عن قانون رياضي يبين يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير و التي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، حيث إذا كان المتغير العشوائي المتقطع X يأخذ القيم $X:\{x_i = x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n\}$ و كان $f(xi)=p(x=xi)$ هو احتمال المتغير العشوائي يأخذ القيمة xi ،ونوضح جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x من خلال الجدول التالي:

X=xi	X1	X2	X3	.....	Xn	المجموع
$p(x=xi)=f(xi)$	$F(x_1)$	$F(x_2)$	$F(x_3)$		$F(x_n)$	1

و تسمى الدالة $f(xi)$ بدالة الاحتمال و من خصائصها مايلي:

1/ $0 \leq f(xi) \leq 1$

2/ $\sum_{i=1}^{n} f(xi) = 1$ أو $\sum_{i=1}^{n} p(x = xi) = 1$

مثال: نرمي زهرتي نرد و نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما:

X: مجموع الرقمين المحصل عليهما.

X1: الرقم الظاهر على زهرة النرد الأولى $1 \leq x1 \leq 6$

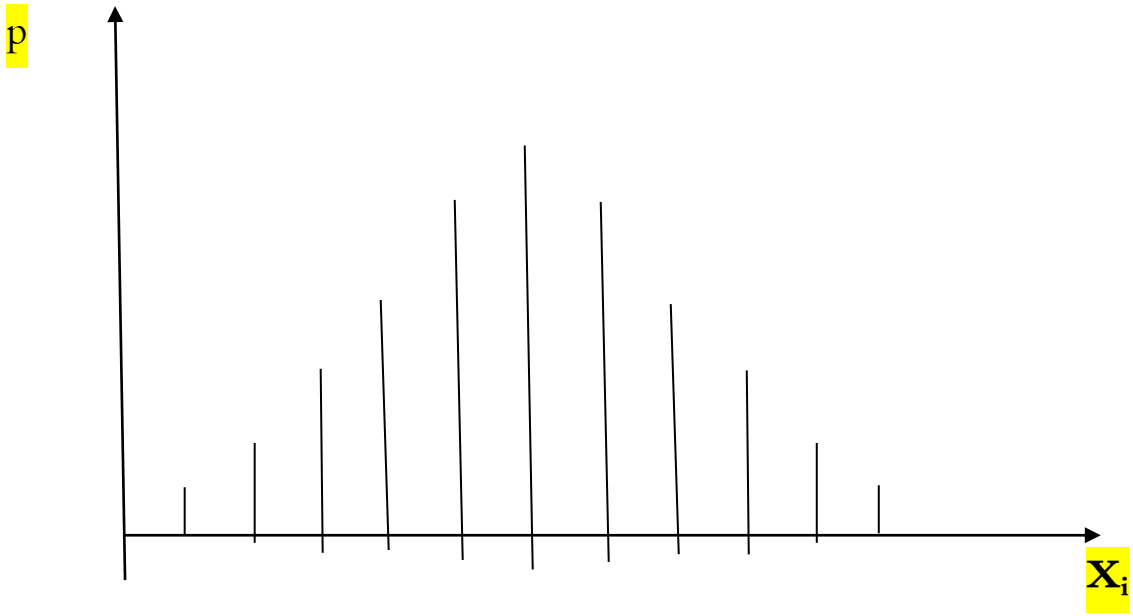
x2: الرقم الظاهر على زهرة النرد الثانية $1 \leq x1 \leq 6$

$X=x1+x2 \Longrightarrow 2 \leq x1+x2 \leq 12$

عدد الحالات الكلية $N(s) = 36$

X=xi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x=xi)=f(xi)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/39	3/36	2/36	1/36

التمثيل البياني لدالة الاحتمال $f(x_i)$:



I. 3. دالة التوزيع المتجمع:هو جدول يشمل الاحتمالات الناتجة من حساب احتمال وقوع الحدث $(x \leq xi)$ و يرمز له بالرمز $F(x)$ أي دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع و تأخذ الصورة الآتية:

$$F(x) = p(x \leq x_i) = \sum_{x_{i \leq X}}^{n} P(x = x_i) = \sum p_i$$

و من ثم يكون تكوين جدول التوزيع الاحتمالي المتجمع كما يلي:

Xi	$f(xi)=p(x=xi)$	$F(x)=p(x \leq xi)$
X1	$f(x1)$	$F(1)=p(x \leq 1)$
.	.	$F(2)=p(x \leq 2)$
.	.	.
.	.	.
Xn	$f(xn)$	$F(n)=p(x \leq n)$

مثال:اذا كان من المعلوم ان نسبة مبيعات احد المراكز التجارية من التفاح الجزائري 0.60،بينما يكون نسبة مبيعاته من الانواع الاخرى للتفاح 0.40 ،اشترى احد العملاء عبوتين، و المطلوب:

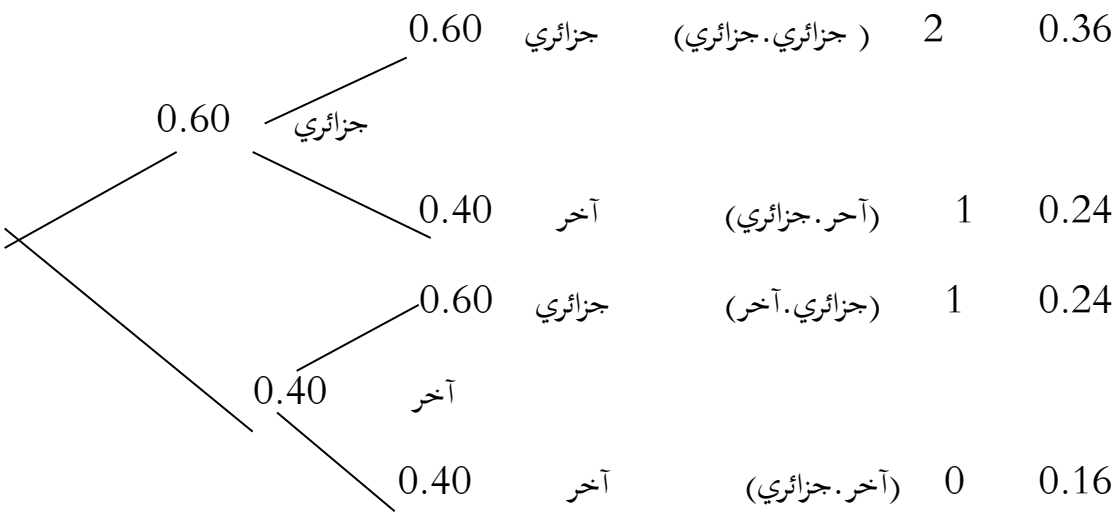
1- كون فراغ العينة.

2- اذ عرف المتغير العشوائي x بانه عدد العبوات المشتراة من التفاح الجزائري ،فاجد الآتي:

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x.
- كون التوزيع الاحتمالي التجميعي.
- ما هو احتمال $p(x\leq 1.5), p(x=1.5), p(x\leq 1)$

الحل:

التجربة هنا شراء وحدتين من عبوات التفاح، و من ثم فراغ العينة يتكون من اربع نتائج حيث X $p(x=xi)=f(x)$



التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات الشتراة من التفاح الجزائري x

من المعلوم ان العميل اشترى عبوتين ،و ان المتغير العشائي هو عدد العبوات المشتراة من التفاح الجزائري لذا تكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي:

- $x=0$ اذا كانت العبوتين من النوع الآخر ، اي اذا كانت نتيجة التجربة (آخر،آخر).
- $x=1$ اذا كان احد العبوتين من النوع الجزائري ،اي اذا كانت نتيجة التجربة (آخر،جزائري) أو (جزائري،آخر)
- $x=2$ اذا كان العبوتين من النوع الجزائري،اي اذا كانت نتيجة التجربة (جزائري،جزائري) و من ثم يأخذ المتغير القيم $x:\{x=0,1,2\}$ و ترتبط احتمالات هذه القيم باحتمالات نتائج التجربة المناظرة لها كما هو مبين اعلاه،و من ثم يكون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيx هو :

جدول التوزيع الاحتمالي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الجزائري

Xi	F(xi)
0	0.16
1	0.48
2	0.36
$\sum$ xi	1

تكوين التوزيع الاحتمالي المتجمع:

جدول التوزيع الاحتمالي ،و التوزيع التجميعي لعدد العبوات المشتراة من التفاح الامريكي

Xi	F(xi)	F(xi)
0	0.16	F(0)=p(x≤0)=0.16
1	0.48	F(1)=p(x≤1)=0.16+0.48=0.64
2	0.36	F(2)=p(x≤2)=0.64+0.36=1.00
$\sum$ Xi	1	

حساب الاحتمالات: p(x=1), p(x≤1), p(x=1.5), p(x)≤1.5)

p(x=1)=f(1)=0.48

p(x≤1)=F(1)0.64

p(x=1.5)=f(1.5)=0

p(x≤1.5)=F(1.5)= f(1)=0.64.

II . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتقطع

و من اهم التوزيعات التي سيتم دراستها وفق المقرر توزيع ثنائي الحدين (ذو الحدين)و التوزيع البواسوني.

II .1. توزيع ذو الحدين

II .1.1. تعريف: هو احد التوزيعات الاحتمالية المتقطعة و يسمى ايضا بتوزيع برنولي، و يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان،حيث النتيجة محل الاهتمام تسمى بحالة النجاح و الاخرى تسمى بحالة الفشل مثل نتيجة الطالب في الامتحان نجاح او رسوب (فشل)،إعطاء الدواء للمريض فإما يستجيب للدواء (نجاح) أو لا يستجيب (فشل).[1]

II .2.1.شكل التوزيع الاحتمالي ذو الحدين

اذا حققت كل تجربة الشروط التالية تسمى بتوزيع ذو الحدين و هي[2]:

- كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

*النتيجة محل الاهتمام تسمى حالة النجاح و تتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p.

*النتيجة الثانية تسمى حالة الفشل و تتم باحتمال ثابت ايضا هو q حيث q=1-p

- نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى، أي كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الاخرى.

- اذا كان المتغير العشوائي x يعبر عن عدد حالات النجاح في n محاولة، فان مدى المتغير العشوائي هو $x:\{x=0,1,2.....n\}$ ، و عليه فان التوزيع الاحتمالي ذو الحدين يأخذ الشكل التالي[3]:

$$f(x) = p(x=x_i) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

و يرمز له بالرمز $x \quad B(n,p)$ ،حيث n و p هما معلمات التوزيع.

II .3.1.خواص توزيع ذو الحدين: تتمثل خواص التوزيع ذو الحدين فيما يلي[4]:

1- مجموع الاحتمالات تساوي 1.

2- التوقع الرياضي يأخذ الصيغة التالية: $E(x)=n.p$

3- التباين $V(x)$ يأخذ الصيغة التالية: $V(x)=n.p.q$

---

[1] محمد صبيحي أبو صالح ،مرجع سبق ذكره ، ص 179.

[2]-محمد صبيحي أبو صالح ،مرجع سبق ذكره ، ص 179.

[3]Christophe Hurlin, op.cit, p 189.

[4]-جيلالي جلاطو، مرجع سبق دكره ،ص161.

مثال 01 :اذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو 0.9 ،فإذا أجريت العملية لعشرة مرضى أحسب مايلي:

1. احتمال نجاح العملية لسبعة مرضى.
2. احتمال نجاح العملية لجميع المرضى.
3. احتمال نجاح العملية لثمانية مرضى على الاقل.
4. احتمال نجاح العملية لثمانية مرضى على الاكثر.
5. التوقع الرياضي لعدد المرضى الذين سيجرون العملية بنجاح.
6. تباين عدد المرضى الذين سيجرون العملية بنجاح.

الحل:

x: عدد المرضى الذين سيجرون العملية بنجاح.

نوع المتغير: متقطع(منفصل).

نوع التوزيع:توزيع ذو الحدين

$n=10$ $\quad p=0.9$ $\quad q=1-p=1-0.9=0.1$

الرمز: $x \sim B(10;0.9) \Longrightarrow x \sim B(n,p)$

- شكل التوزيع:

$$f(x) = p(x=x_i) = c_n^x p^x q^{n-x} = c_{10}^x (0.9)^x (0.1)^{10-x}$$

1. $p(x=7) = c_{10}^7 (0.9)^7 (0.1)^3$
2. $p(x=10) = c_{10}^{10} (0.9)^{10} (0.1)^0$
3. $p(x\geq 8) = p(x=8)+p(x=9)+p(=10)$

$$= c_{10}^8 (0.9)^8 (0.1)^2 + c_{10}^9 (0.9)^9 (0.1)^1 + c_{10}^{10} (0.9)^{10} (0.1)^0$$

4. $p(x\leq 8)= ?$

الطريقة الاولى:

$$p(x\leq 8)=P(x=8)+p(x=7)+\ldots\ldots\ldots\ldots+p(x=0)$$

$$=c_{10}^{8}(0.9)^{8}(0.1)^{2}+c_{10}^{7}(0.9)^{7}(0.1)^{3}+\ldots\ldots\ldots+c_{10}^{0}(0.9)^{0}(0.1)^{10}$$

الطريقة الثانية :

$$p(x\leq 8)=1-p(x\geq 9)$$

$$=1-[p(x=9)+p(x=10)]$$

$$=1-[c_{10}^{9}(0.9)^{9}(0.1)^{1}+c_{10}^{10}(0.9)^{10}(0.1)^{0}]$$

5. $E(x) = n * p = 10 * 0,9 = 9$
6. $v(x) = n * p * q = 10 * 0,9 * 0,1 = 0.9$

II .2. التوزيع البواسوني

II .1.2. مفهوم التوزيع البواسوني:عندما تكون n كبيرة و p صغيرة في توزيع ذو الحدين فان هذا التوزيع يؤول الى توزيع آخر يدعى بتوزيع بواسوني[1]،حيث يهتم التوزيع البواسوني بالتجارب التي تحدث خلال فترة زمنية او مكانية محددة كدراسة عدد المكالمات التي تصل قسم ما خلال ساعات الدوام، أي يدرس عدد تكرارات حادث في مدة زمنية معينة أو حجم معين[2] و ذلك بفرض ما يلي:

1- معرفة القيمة المتوسطة لعدد تكرارات الحادث في مدة زمنية أو حجم معين مثل معدل حوادث السيارات في اليوم، معدل الوفيات في الشهر.

2- عدد تكرارات الحادث يتناسب مع طول المدة أو الحجم اذا كان ضغيرين.

3- احتمال وقوع الحادث أكثر من مرة واحدة يؤول الى الصفر اذا كانت المدة الزمنية او الحجم صغير جدا يؤول الى الصفر يأخذ هذا المتغير قيمة في مجموعة الاعداد الطبيعية x $\in\{0,1,2,\ldots\ldots n\}$ و يرمز له بالرمز التالي: $p(\lambda)$ x

[1]-محمد يوسف أشقر ، مرجع سبق ذكره ،ص 170.

[2] Gregory denglos, op cit, p 182.

4- **شكل التوزيع الاحتمالي**: يأخذ التوزيع البواسوني الشكل التالي[1]:

$$f(x) = p(x=xi) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{xi}}{xi!}$$

حيث:

λ: القيمة المتوسطة.

e: عدد نيبري يساوي 2.718.

II .2.2.خواص التوزيع البواسوني: تتمثل فيما يلي[2]:

1- مجموع الاحتمالات تساوي 1 أي:

$$\sum_{x=0}^{+\infty} p(x = xi) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{e^{-x}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda}e^{+\lambda} = 1$$

2- التوقع الرياضي يساوي القيمة المتوسطة ($\boldsymbol{\lambda}$) أي: $E(x) = \boldsymbol{\lambda}$

3- التباين يساوي القيمة المتوسطة ($\boldsymbol{\lambda}$) اي: $v(x) = \boldsymbol{\lambda}$

ملاحظة: يمكن تقريب توزيع ذو الحدين الى التوزيع البواسوني حيث $\boldsymbol{\lambda} = n.p$ اذا كانت n كبيرة جدا و p صغيرة جدا.

مثال 1: يستقبل احد موزع المكالمات الهاتفية لإحدى المؤسسات في المتوسط مكالمتين في الدقيقة.

المطلوب:

1. ما هو نوع المتغير العشوائي؟
2. ما نوع التوزيع الاحتمالي؟
3. ما هو احتمال ان يستقبل 03 مكالمات.
4. ما هو احتمال ان يستقبل 03 مكالمات على الاقل
5. ما هو احتمال ان يستقبل 03 مكالمات على الاكثر.

[1] Gilbert saporta, op cit , p33 .
[2] Gilbert saporta ,op cit , p 34 .

6. ما هو احتمال ان يستقبل مكالمتين خلال 05 دقائق.
7. ما هو احتمال ان يستقبل و لا مكالمة خلال 05 دقائق.
8. أحسب توقع احد عدد المكالمات المستقبلة في الدقيقة.
9. احسب تباين عدد المكالمات في الدقيقة.

الحل:

xi: عدد المكالمات الهاتفية خلال الدقيقة.

1- نوع المتغير العشوائي:متغير منفصل (متقطع).

2- نوع التوزيع:التوزيع البواسوني

$\lambda = 02 \quad x \backsim p(\lambda) \quad x \backsim p(2)$

شكل الدالة:

$$f(x)=p(x=xi)= e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$f(x)=p(x=xi)= e^{-2} \frac{2^x}{x!}$$

3- $p(x=3)= e^{-2} \frac{2^3}{3!}$

4- $p(x\geq 3)=1-p(x\leq 2)$

$$=1-[p(x=2)+p(x=1)+p(x=0)]$$

$$=1-[e^{-2} \frac{2^2}{2!} + e^{-2} \frac{2^1}{1!} + e^{-2} \frac{2^0}{0!}$$

5- $p(x)\leq 3) =p(x=3)+p(x=2)+p(x=1)+p(x=0)$

$$= e^{-2} \frac{2^3}{3!} + e^{-2} \frac{2^2}{2!} + e^{-2} \frac{2^1}{1\,!} + e^{-2} \frac{2^0}{0!}$$

6- x:عدد المكالمات الهاتفية خلال 05 دقائق.

$$p(x=2)= e^{-10} \frac{10^2}{2!}$$

7- $p(x=0)= e^{-10}\frac{2^0}{0!}$

8- $E(x)=\boldsymbol{\lambda}=02$

9- $V(x)=\boldsymbol{\lambda}=02$

نتطرق من خلال هذا الفصل إلى العناصر التالية:

I . المتغير العشوائي المستمر

I.1. مفهوم المتغير العشوائي المستمر

I.2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

I.3.دالة التوزيع المتجمع

II . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتصل(المستمر)

II .1.التوزيع المنتظم

II .2.التوزيع الاسي السالب

II .3.التوزيع الطبيعي

III. القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية

III .1. التوقع الرياضي (الامل الرياضي)

III .2.التباين:

III .3.خواص التوقع و التباين

IV – تمارين محلولة

I.المتغير العشوائي المستمر:

I. 1. مفهوم المتغير العشوائي المستمر: هو المتغير الذي يأخذ عدد لا نهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله فاذا كان x متغير عشوائي مستمر و يقع في المدى (a.b) اي $a<x<b$ $X=xi$ فان للمتغير x عدد لا نهائي من القيم تقع بين الحدين الادنى و الاعلى (a.b) مثل الزمن، المساحة ، الوزن الخ، و بالتالي المتغير العشوائي المستمر يأخذ شكل دالة مستمرة في مجال تعريفها وتكون على الشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{دون ذلك} \\ f(x) & a\leq x\leq b \end{cases}$$

I. 2.التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر:

بعد تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي يتضح انه اقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر حيث المساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية و تساوي هذه المساحة 1و تسمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال و من خصائصها مايلي:

1- $f(x)\geq 0$

2- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3- $p(a < x \leq b) = \int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b)-g(a)$

I. 3.دالة التوزيع المتجمع : يرمز لها بالرمز $F(x)$ ، حيث اذا كانت قابلة للاشتقاق نقول ان المتغير مستمر تماما وتسمى مشتقة دالة التوزيع المجتمع كثافة الاحتمال، حيث العلاقة بين دالة التوزيع المجتمع وكثافة الاحتمال هي: $F'(x)=f(x)$

وعليه فان $F(x)$ هي الدالة الاصلية ل $f(x)$ اي : $F(x)=p(x\leq xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

ومن خصائصها ما يلي :

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- F دالة مستمرة على اليمين
- $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$
- F دالة متزايدة $x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq f(y)$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

مثال: مدة اشتغال (بالأيام) نوع من المصابيح متغير عشوائي كثافة احتماله

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x^2} & \text{si} \quad x \leq 100 \\ 0 & \text{si} \quad x < 100 \end{cases}$$

حيث k ثابت

المطلوب:

1-عين قيمة الثابت k

2-احسب احتمال ان لا تفوق مدة اشتغال المصباح من النوع السابق 200 يوم

3-ادا علمت ان مصباحا من النوع السابق فاقت مدة اشتغاله 150 يوم فما هو احتمال ان لا تفوق 300 يوم

4-احسب احتمال ان لا تفوق مدة انشغال 3 مصابيح من النوع السابق 200 يوم.

الحل

1-ايجاد قيمة k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{100} f(x)dx + \int_{100}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{100} 0dx + \int_{100}^{+\infty} \frac{k}{x^2}dx = 1$$

$$\Longrightarrow 0 + k[-\frac{1}{x}]_{100}^{+\infty} = 1$$

$$\Longrightarrow k(0-(\frac{-1}{100}) = 1 \Longrightarrow k = 100$$

2-مدة الاشتغال لا تفوق 200 يوم :

$p(x\leq 200)=p(x\in]-\infty,200[)$

$$= \int_{-\infty}^{200} f(x)dx=\int_{-\infty}^{100} f(x)dx +\int_{100}^{200} f(x)dx$$

$$=\int_{100}^{200} \frac{k}{x^2}dx=k[\frac{-1}{x}]_{100}^{200}$$

$$=100(\frac{-1}{200}-(\frac{-1}{100})]$$

$$=\frac{-1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

3- $p(x\leq 300/x\geq 150)=$?

$$p(x\leq 300/x\geq 150)=\frac{p(150\leq x\leq 300)}{p(x\geq 150)}$$

$$p(x\geq 150)=\int_{150}^{+\infty} f(x)dx = \int_{150}^{+\infty} \frac{k}{x^2}dx=k[\frac{-1}{x}]_{150}^{+\infty}$$

$$=(\frac{-100}{+\infty})-(-\frac{100}{150})=\frac{2}{3}$$

$$p(150\leq x\leq 300)=\int_{150}^{300} f(x)dx = \int_{150}^{300} \frac{k}{x^2}dx=\frac{-100}{300}+\frac{100}{150}$$

$$=\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$p(x\leq 300/x\geq 150) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

4- A مدة اشتغال 03 مصابيح لا تفوق 200 يوم

A1:المصباح 1 لا تفوق مدة اشتغاله 200 يوم.

A2:المصباح 2 لا تفوق مدة اشتغاله 200 يوم.

A3:المصباح 3 لا تفوق مدة اشتغاله 200 يوم.

$A=A1\cap A2\cap A3$

المصابيح مختلفة اذن A1.A2.A3 حوادث مستقلة

$p(A)=p(A1\cap A2\cap A3)=p(A1).p(A2).p(A3)$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

IV – تمارين محلولة

التمرين الأول : ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد حوادث السير اليومية في مدينة ما، يتبع التوزيع المبين في الجدول التالي:

X = xi	0	1	2	3	4	5
P (X = xi)	1/B	2/B	3/B	4/B	3/2B	1/2B

1- ما نوع المتغير العشوائي X .

2- أوجد قيمة β حتى يكون الجدول السابق جدول توزيع إحتمالي.

3 - نفرض أن $\beta=12$:

أ- أوجد دالة التوزيع الاحتمالية F(x)

ب- أحسب التوقع الرياضي، التباين و الانحراف المعياريل عدد حوادث السير اليومية في هذه المدينة

ج- أحسب الاحتمالات التالية $P(X\leq 1)$ - :، $P(X\geq 4)$ ،$F(3)$

التمرين الثاني : تعرض شركة تجارية يوميا 03 سيارات من ثلاثة أنواع مختلفة a, b, c للبيع خلال معرض تجاري تشير الخبرة السابقة إلى أن احتمال بيع السيارة من النوع a هو 0.5 و من النوع b هو 0.7 و من النوع c هو 0.8 ، حيث يعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات التي تبيعها الشركة يوميا .

1 – اوجد التوزيع الاحتمالي ل X .

2 – ما هي القيمة المتوقعة لعدد مبيعات الشركة اليومي من السيارات .

نفرض أن ربح الشركة يقدر ب 20000 دج من كل سيارة مباعة، نعرف المتغير العشوائي Y الذي يمثل ربح الشركة اليومي.

1 – اوجد التوزيع الاحتمالي ل Y .

2 – ما هي القيمة المتوسطة لربح الشركة اليومي .

التمرين الثالث: الطلب السنوي على مادة معينة (ملايين القناطير) متغير عشوائي كثافة احتماله هي:

$$f(x)=\begin{cases} Kx & si \quad 0 \le x < 2 \\ Ke^{-\frac{1}{2}x} & si \quad x \ge 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

1- عين قيمة الثابت k .

2 – احسب احتمال أن تفوق الطلب في سنة ما على المادة 01 مليون قنطار.

3 – احسب احتمال أن تفوق الطلب في سنة واحدة على الأقل من بين 05 سنوات على المادة 01 مليون قنطار.

التمرين الرابع:

اذا كان الانفاق الشهري للأسرة بالألف دينار على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخد الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) \; 0 < x < 10 \\ 0 \; otherwise \end{cases}$$

المطلوب:

1. حساب قيمة الثابت C .
2. أحب احتمال أن انفاق الأسرة يتراوح ما بين (5 و 8) ألف دينار خلال الشهر.
3. اذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر؟
4. أحسب التوقع الرياضي و التباين و الانحراف المعياري

الحلول

التمرين الأول :

1- نوع المتغير العشوائي : متغير متقطع

2- ايجاد قيمةB

$\sum p(x=xi)=1$

$$\Rightarrow \frac{1}{B} + \frac{2}{B} + \frac{3}{B} + \frac{4}{B} + \frac{3}{2B} + \frac{1}{2B} = \mathbf{1} \quad \Rightarrow \mathbf{B=12}$$

3- نفرض ان B=12

–ايجاد دالة التوزيع الاحتمالي المتجمع F(x)

$$F(x)=\begin{cases} P(x\leq 0)=p(x<0)+p(x=0)=0+\frac{1}{12}=\mathbf{\frac{1}{12}} \\ P(x\leq 1)=p(x=0)+p(x=1)=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}=\mathbf{\frac{3}{12}} \\ P(x\leq 2)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\mathbf{\frac{6}{12}} \\ P(x\leq 3)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)=\mathbf{\frac{10}{12}} \\ P(x\leq 4)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4)=\mathbf{\frac{23}{24}} \\ p(x\leq 5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)+p(x=4) \\ +p(x=5)=\frac{24}{24}=\mathbf{1} \end{cases}$$

X=xi	0	1	2	3	4	5
P(x=xi)	1/12	2/12	3/12	4/12	3/24	1/24
X^2	0	1	4	9	16	25

حساب التوقع الرياضي :

$$E(x)=\sum_{i=1}^{6} xi\ p(x=xi)$$

$$=(0*1/12)+(1*2/12)+(2*3/12)+(3*4/12)+(4*3/24)+(5*1/24)$$

$$=0+2/12+6/12+12/12+12/24+5/24$$

$$\mathbf{E(x)=2.37}$$

حساب التباين و الانحراف المعياري :

$$v(x)=\sum_{i=1}^{6} x_i^2\ p(x=xi)$$

$$=(0*1/12)+(1*2/12)+(4*3/12)+(9*4/12)+(16*3/24)+(25*1/24)$$

=0+2/12+12/12+36/12+48/24+25/24

v(x)=7.20

$$S(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{7.20} = 2.68$$

3- حساب الاحتمالات التالية:

1) $P(x\leq 1)=F(1)=\frac{3}{12}$

2) $p(x\geq 4)= 1 - p(x\leq 3) = 1- F(3)=1- F(3)=1-\frac{10}{12}=\frac{2}{12}$

3) $F(3)= p(x\leq 3)= \frac{10}{12}$

التمرين الثاني :

$P(a)=0.5$ $p(b)=0.7$ $p(c)=0.8$

$P(\bar{a})=0.5$ $p(\bar{b})=0.3$ $p(\bar{c}) = 0.2$

X: عدد السيارات التي تبيعها الشركة يوميا

1.ايجاد التوزيع الاحتمالي لـ X :

X=xi	**0**	**1**	**2**	**3**
P(x=xi)=f(xi)	**0.03**	**0.23**	**0.47**	**0.28**

- ✓ $P(x=0)=p(\bar{a} \cap \bar{b} \cap \bar{c})=p(\bar{a})*p(\bar{b})*p(\bar{c})$

$=0.5*0.3*0.2=\mathbf{0.03}$

- ✓ $P(x=1)=p(a\cap \bar{b} \cap \bar{c}) + p(\bar{a} \cap b \cap \bar{c}) + p(\bar{a} \cap \bar{b} \cap c)$

$=p(a).\ p(\bar{b})p(\bar{c}) + p(\bar{a}).p(b).p(\bar{c}) + p(\bar{a}).p(\bar{b}).p(c)$

$0.5*0.3*0.2+0.5*0.7*0.2+0.5*0.3*0.8=$.

- ✓ $p(x=2) = p(a \cap b \cap \bar{c}) + p(a \cap \bar{b} \cap c) + p(\bar{a} \cap b \cap c)$

$= p(a).p(b).p(\bar{c}) + p(a).p(\bar{b}).p(c) + p(\bar{a}).p(b).p(c)$

$=0.5*0.7*0.2+0.5*0.3*0.8+0.5*0.7*0.8$ **=0.47**

✓ $P_{(x=3)} = p_{(a \cap b \cap c)} = p(a).p(b).p(c)$

$= 0.5*0.7*0.8=\mathbf{0.28}$

2.القيمة المتوقعة لعدد مبيعات الشركة

$E_{(x)}= \sum_{i=1}^{3} xi\ p(x = xi)=0*0.03+1*0.23+2*0.47+3*0.28=\mathbf{2}$

3.التوزيع الاحتمالي لـــ Y: $Y= \{0,20000,40000,60000\}$

$X = 0 \rightarrow Y = 0$ $\qquad$ $x = 2 \rightarrow Y = 40000$

$X = 1 \rightarrow Y = 20000$ $\qquad$ $x = 3 \rightarrow Y = 60000$

Y=yi	0	20000	40000	60000
$P_{(y=yi)}=f_{(yi)}$	0.03	0.23	0.47	0.28

- حساب القيمة المتوسطة لربح الشركة:

الطريقة الاولى : $E_{(y)}=\sum yip_{(y=yi)}=0*0.03+20000*0.23+40000*0.47+60000*0.28$

$=\mathbf{40000}$

الطريقة الثانية: $\mathbf{E}_{(y)}=E_{(20000x)} =20000\ E_{(x)} =20000*2 \quad \mathbf{=40000}$

التمرين الثالث :

$$F_{(x)}= \begin{cases} kx & si\ 0 \leq x < 2 \\ ke^{-\frac{1}{2}x} & si\ x \geq 2 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

1. تعيين قيمة الثابت K

$$1/ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} kx\,dx + \int_{2}^{+\infty} k\,e^{\frac{-1}{2}x} \quad dx = 1$$

$$\Longrightarrow \quad 0 + [\frac{kx^2}{2}]_0^2 + \left[-2ke^{\frac{-1}{2}x}\right]_2^{+\infty} =1$$

$$\Longrightarrow \quad [2k + 2ke^{-1}]=1$$

$$\Longrightarrow \quad k[2 + 2e^{-1}]=1 \qquad \Longrightarrow k = \frac{1}{2+e^{-1}} = \mathbf{0.36}$$

2.حساب احتمال ان يفوق الطلب في سنة ما على المادة 01 مليون قنطار

$P(x \geq 1)=\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^2 kx\,dx + \int_2^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x} = [\frac{kx^2}{2}]_1^2 + \left[-2ke^{\frac{-1}{2}x}\right]_1^{+\infty} = k\,[2-\frac{1}{2}] + 2k[0+e^{-1}] = 0.54+0.26=\mathbf{0.86}$

3.حساب احتمال ان يفوق الطلب في السنة الواحدة على الاقل من بين 05 سنوات على المادة (1 قنطار)

A= يفوق الطلب في سنة واحدة على الاقل من بين 5 سنوات على المادة 1 مليون قنطار .

$\bar{A}$ =لا يفوق الطلب في 5 سنوات 1 مليون قنطار.

A1: لا يفوق الطلب في السنة(1) مليون قنطار

A2: لا يفوق الطلب في السنة(2) مليون قنطار

A3: لا يفوق الطلب في السنة(3) مليون قنطار

A4لا يفوق الطلب في السنة(4) مليون قنطار.

A5: لا يفوق الطلب في السنة(5) مليون قنطار

$P(\bar{A}) = p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = p(A_1).\,p(A_2).\,p(A_3).\,p(A_4).\,p(A_5)$

$p(A<1)=1-p(x\geq 1)=1-0.86=\mathbf{0.14}$

$\Longrightarrow P(\bar{A})=0.14*0.14*0.14*0.14*0.14=(\mathbf{0.14})^5$

$\Longrightarrow P(A)=1-P(\bar{A})=1-(0.14)^5=\mathbf{0.99}$

التمرين الرابع :

1. حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = 1$$

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)dx = 1$$

$$c\int_{x=0}^{x=10}(10\,x-x^2)dx=1$$

$$c\left[10\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=1$$

$$c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=1$$

$$c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3}\right]-0=1$$

$$\frac{500}{3}\,c=1$$

$$c=3/500=0.006$$

2. حساب أن انفاق الأسرة يتراوح بين (5،8) ألف دينار خلال الشهر هو.

$$p(5<x<8=\int_{x=5}^{x=8}0.006x(10-x)dx=0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$=0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right]$$

$$=0.006[(149.3333)-(83.3333)]=0.006(66)=0.396$$

3. اذا كان لدينا 600اسرة، فان عدد الأسر المتوقع أن يقل انفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر هو:

$$nf=600\ p(x<3)\quad=600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$=3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3=3.6[45-9]-0$$

$$=129.6\approx 130$$

4 – حساب التوقع الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري

1. التوقع الرياضي

$$E(x)=xf(x)dx=$$
$$\int_0^{10}x\big(0.006x(10-x)\big)=\qquad 0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)dx$$

$$=0.006\left[10\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=0.006\left[\left(\frac{1000}{3}-\frac{1000}{4}\right)-(0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

2. التباين : $S^2(x) = E(x^2) - E^2(x) = E(x^2) - (5)^2$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

و من ثم يأخذ التباين القيمة التالية : $30 - 25 = 5$

اذا الانحراف المعياري هو: $\sqrt{5} = 2.236$

II . التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتصل(المستمر)

من اهم التوزيعات الاحتمالية الشهيرة الخاصة بالمتغير المتصل(المستمر) التوزيع الطبيعي، التوزيع المنتظم، التوزيع الاسي السالب التي سيتم دراستها وفق هذا المقترر كما يعتبر التوزيع الطبيعي أحد اهم التوزيعات الاحتمالية في علم الاحصاء، حيث ان اغلب القياسات الفيزيائية و الظواهر الطبيعية تخضع أو تتقارب توزيعاتها التكرارية من هذا التوزيع.

II .1.التوزيع المنتظم: نقول عن متغير عشوائي يخضع للتوزيع المنتظم على المجال اذا كانت دالة كثافته ثابتة و نوضح ذلك من خلال ما يلي[1]:

II .1.1. شكل دالة كثافة الاحتمال: هو توزيع له دالة كثافة احتمال ثابتة، و يستخدم في حالة الظواهر التي يمكن ان تحدث بشكل منتظم[2]،فإذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع منتظم uniforme مداه a<x<b فان دالة كثافة احتمالية هي:

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad a<x<b$$

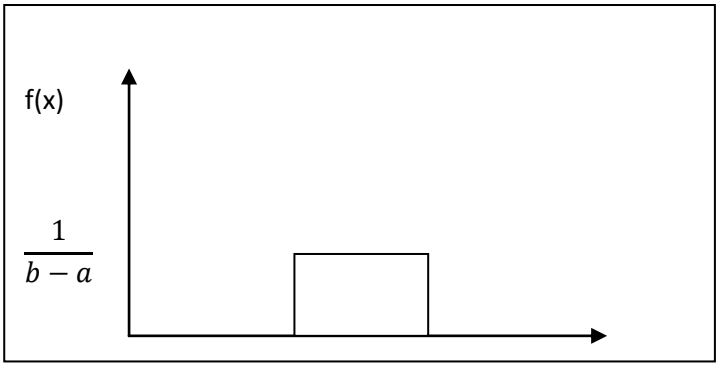
حيث :a،b مجال تعريف المتغير العشوائي المنتظم،

[1] جيلالي جلاطو ، مرجع سبق دكره ، ص 212

[2] Christophe Hurlin, op cit , p199.

و يمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي[1]:

شكل رقم 01: دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المنتضم.



المصدر : جيلالي جلاطو ،مرجع سبق ذكره ، ص 213.

II .2.1. معالم هذا التوزيع:توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (a,b) ،و لذا يكتب رمز هذا التوزيع كما يلي: $x \hookrightarrow U(a,b)$.

II .3.1. خصائص التوزيع المنتظم : تتمثل الصيغة الرياضية لدالة التوزيع المتجمع F(x) ، التوقع الرياضي E(x) ، التباين V (x) لهذا المتغير فيما يلي[2]:

$$F(x)=p(x\leq xi)=\int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a}$$

[1] جيلالي جلاطو، مرجع سبق ذكره ، ص 213

[2] Christophe Hurlin, op cit , p 200.

$E(x) = \frac{a+b}{2}$, $V(x)=\frac{(b-a)^2}{2}$

مثال: استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن من السكر، ووضعها في مخزن،و قام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة،اذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم ،فأوجد ما يلي:

1- ما هو نوع المتغير العشوائي؟
2- ما نوع التوزيع الاحتمالي؟
3- أوجد دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع؟
4- ما هي الكمية المباعة خلال 05 أشهر الاولى.
5- بعد مرور سبعة أشهر من بداية بيع ،ماهي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل:

x: الفترة الزمنية للبيع (بالأشهر)

1. نوع المتغير:متغير مستمر (متصل).
2. نوع التوزيع:توزيع منتظم.
3. دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع المتجمع.

$$f(x)=\frac{1}{b-a} = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12}$$

$$F(x)=p(x\leq xi) =\frac{x-a}{b-a} = \frac{x-0}{12-0} = \frac{x}{12}$$

1- الكمية المباعة خلال 05 أشهر الاولى:

$$Qp(x=5)=Q\frac{5}{12} = 1500.\frac{5}{12} = 625.$$

2- حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

نفرض أن Q كمية السكر المستورد ،تكون الكمية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي:

$$Qp(x>7)=Q(1-F(7)=1500(1-\frac{7-0}{12-0})$$

=625 Ton

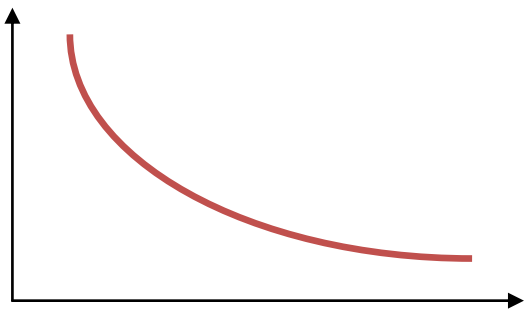
II . 2.التوزيع الاسي السالب:

II .1.2.مفهومه: اذا كان المتغير X متغير عشوائي له توزيع اسي سالب ،مداه هو $0<X<\infty$ فان دالة كثافة احتماله هي[1]:

$$f(x)=\theta e^{-\theta x} \qquad \theta>0 \qquad 0<x<\infty$$

و يمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:

شكل رقم 02 : التمثيل البياني لدالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاسي السالب



Source : Grégory denglos , op.cit , p 194.

II .2.2. معالم هذا التوزيع معلمة واحدة هي θ

II .3.2.خصائص التوزيع الاسي السالب: تتمثل الصيغة الرياضية لدالة التوزيع المتجمع F(x)، التوقع الرياضي E(x)و التباين V(x) لهذا المتغير كما يلي[2]:

[1] Grégory denglos , op.cit , p 194.
[2] Op.cit , p 195.

$F(x)=p(x\leq xi)=\int_0^x f(x)dx = (1-e^{-\theta x})$

$F(x)= (1-e^{-\theta x})$

$E(x) =\frac{1}{\theta}$ $\qquad$ $V(x)=\frac{1}{\theta^2}$

مثال: إذا كانت الفترة الزمنية لانهاء خدمة الزبون في البنك تتبع توزيع اسي سالب بمتوسط 2 دقيقة فأوجد مايلي:

- أوجد دالة كثافة الاحتمال المتغيرة عن الفترة الزمنية لانهاء خدمة الزبون.
- ما احتمال انهاء خدمة الزبون في اقل أو يساوي دقيقة.

الحل:

1- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

x: يمثل الفترة الزمنية لانهاء خدمة الزبون بالدقيقة أي $0<x<\infty$

$E(x) =\frac{1}{\theta} =2 \Longrightarrow \theta=0.5$

$f(x)=0.5\ e^{-0.5x}$ $\qquad$ $0<x<\infty$

1- حساب احتمال انهاء خدمة الزبون في اقل أو يساوي من دقيقة:

$P(x\leq 1) = F(1) = (1-e^{-0.5x})=1-e^{-0.5(1)} = 0.3935.$

III .3. التوزيع الطبيعي:

III .1.3. تعريف: يعتبر التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائية المستمرة لان اغلب المتغيرات العشوائية تقترب أشكالها البيانية الى الشكل البياني الطبيعي،و هو دالة احتمال مستمرة و يأخذ شكله شكل الجرس ،متناظر و متماثل حول القيمة المركزية (التوقع،المنوال،الوسيط)[1]، لان قيمهم متساوية في حالة التوزيع الطبيعي.كما ان للاشكال المتناظرة أو المنحنيات المتناظرة تابع كثافة احتمالي يكتب بشكل عام حسب الصيغة التالية: $f(x)=ae^{-bx2}$ و هو تابع اسي حيث قيمة a و b هي التي تحدد الشكل النهائي للتوزيع الاحتمالي ،أما في حالة الشكل الطبيعي (جرسي) فان هاتين القيمتين تساوي مايلي:

$$b=\frac{1}{2} \qquad a=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$$

III .2.3.شكل دالة كثافة الاحتمال: يكون x متغيرا عشوائيا مستمرا في المجال $]-\infty,+\infty[$ خاضعا لقانون التوزيع الطبيعي،اذا كانت دالة كثافة احتماله تأخذ الصيغة التالية[2]:

$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{xi-\bar{x}}{\delta}\right)^2}$$

و يكتب بالشكل التالي $x\backsim N(\bar{x}\ ,v(x))$ اي ان المتغير يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\bar{x}$ (توقع E (x))و تباين v(x).

ملاحظة:

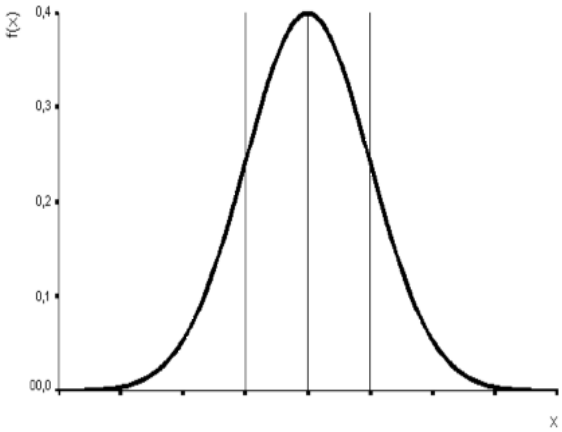
$$\bar{x}=E(x) \qquad v(x)=\boldsymbol{\delta}^2(x)$$

[1] جيلالي جلاطو ، مرجع سبق دكره ، ص

[2] Christophe hurlin, op.cit , p 203.

III .3.3.التمثيل البياني: هو منحنى متماثل اي الوسط الحسابي يساوي الوسيط يساوي المنوال و يأخذ الشكل التالي:

شكل رقم 03 : منحنى التوزيع الطبيعي



ان قيمة كل من المتوسط (التوقع) و الانحراف المعياري هي التي تحدد علو او انبساط شكل المنحنى،فكلما كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة كلما كان شكل المنحنى متطاولا و العكس صحيح .ففي حالة تساوي قيمة المتغير العشوائي مع المتوسط (التوقع) فإن دالة كثافة الاحتمال تكون كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}$$

يقسم منحنى التوزيع الطبيعي الى قسمين متناظرين و متساويين حيث كل منهما يساوي 0.50 اي احتماله يساوي 0.50 و هذا حسب الشكل التالي

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{+\infty}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

أي أنه يتمركز في النقطة $x=E(x)$ ثم ينتشر بشكل منتظم و متناظر على جانبي هذه القيمة المركزية.

III .4.3.معالم التوزيع الطبيعي: توجد معلمتان لهذا التوزيع هما $E(x)=\bar{x}$ ، $v(x)=s^2$ الانحراف المعياري $\boldsymbol{\delta}$ و يرمز له بالرمز $x \hookrightarrow (N(\bar{x}, \boldsymbol{\delta}^2)$ **و يعني ذلك ان المتغير العشوائي x** يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\bar{x}$ و تباين s^2 أو $v(x)$ او انحراف معياري $\boldsymbol{\delta}$[1].

[1] بوعبد الله صالح، محاضرات في الاحصاء الرياضي ، ص 52 .

III .5.3.حساب الاحتمالات: نفرض ان الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x1,\leq x\leq x2)$ و هذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية.

لحساب هذا الاحتمال نقوم بحساب المساحة و بالتالي ايجاد التكامل التالي:

$$p(x1<x<x2)=\int_{x1}^{x2} f(x)dx = \int_{x1}^{x2} \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2} (\frac{xi-\bar{x}}{\delta})^2]$$

و بالتالي ننتقل من التوزيع الطبيعي الى التوزيع الطبيعي القياسي، و هو توزيع له نفس خصائص التوزيع الطبيعي بمتوسط مساوي الى الصفر و انحراف معياري مساوي الى الواحد اي: $E(x)=\bar{x}=0$ ، $\boldsymbol{\delta}=1$.

يستعمل التوزيع الطبيعي القياسي لحساب قيم الاحتمالات لمجالات معينة بحيث ننتقل من التوزيع الطبيعي العادي الى التوزيع الطبيعي القياسي باجراء تحويل في المتغيرات و ذلك بالانتقال من المتغير x الى المتغير z علما ان قيمة z تعطى وفق العلاقة التالية: $z=\frac{xi-\bar{x}}{\delta(x)}$

و في بعض المراجع يستعمل المتغير القياسي t بدلا من z كما أعدت جداول خاصة للتوزيع الطبيعي القياسي تستخدم لايجاد قيم الاحتمالات المقابلة لمجالات معينة،حيث بعض المجالات معروفة من خلال التجربة مثلا.

- يحتوي المجال $[\bar{x} \pm \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})]$ على 68.26% من العينة او المجتمع.
- يحتوي المجال $[\bar{x} \pm 2\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})]$ على 95.54% من العينة او المجتمع.
- يحتوي المجال $[\bar{x} \pm 3\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})]$ على 99.74% من العينة او المجتمع.

و بالتالي دالة الكثافة تصبح على الشكل التالي:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-1}{2} z^2)$$

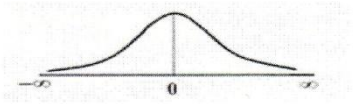
و من خصائصه مايلي:

$E(z)=0=\bar{z}$ $\quad$ $v(z)=1$

1- المتوسط الحسابي أو التوقع الرياضي =0

2- التباين و الانحراف المعياري =1

و من ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرمز $z \hookrightarrow (0,1)$ و يعني ذلك ان المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) و تباين 1، و يأخذ المنحنى الشكل التالي:



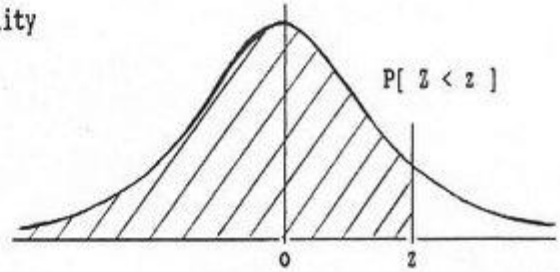
صمم الاحصائيون جداول احصائية لحساب دالة التوزيع التجمعي $F(z)= p(z \leq z_i)$ كما هي مبينة بالرسم التالي:

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[\ Z < z\ ] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}Z^2)\, dZ$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

خطوات حساب الاحتمال $p(x1 \leq x \leq x2)$ باستخدام الدرجة القياسية z_i

$$z_i=\frac{xi-\bar{x}}{s}$$

1- يتم تحويل القيم الطبيعية $(x1,x2)$ الى قيمة طبيعية قياسية:

$$Z_1=\frac{x1-\bar{x}}{\delta}، \quad z_2=\frac{x2-\bar{x}}{\delta}$$

2- يصبح $p\ (x1\leq x\leq x2)$ كما يلي: $p(x_1\leq x\leq x_2)=p(z_1\leq z\leq z_2)$

3- نستخدم جدول التوزيع الطبيعي القياسي و الذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال

$$F(z)=p(z\leq z_i).$$

4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات:

مثال:أوجد الاحتمالات التالية:

$p(z\geq 1.96)$ $\quad p(z\leq -2.33)$ $\quad p(z\leq 1.57)$ $\quad p(-2.02\leq z\leq 1.28)$.

الحل:

1- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $p(z\leq 1.57)=F(1.57)$ اسفل المنحنى و يتم استخدام الجدول كما يلي:

Z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
.										
.										
.										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
.										

.	
.	
.	

و عليه $p(z\leq 1.57)=F(1.57)=0.9418$

2- المساحة أسفل المنحنى المعتبرة عن الاحتمال $f(z\leq -2.33)=F(-2.33)$

Z	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
.										
.										
.										
2.70										
2.6										
2.5										
2.4										
2.3				0.0099						
.										
.										
.										
.										
.										

و من ثم يكون $p(z\leq -2.33)=0.0099$.

3- $p(z>1.96)$

و هذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع المتجمع حيث ان:

$$P(z>1.96)=1-p(z\leq 1.96)=1-F(1.96)$$

$=1-0.9750 \quad = 0.0250$

$\Longrightarrow F(1.96)= \quad 0.9750$: حيث

4- $p(-2.01<z\leq 1.28)$

باستخدام خصائص الدالة التوزيع المتجمع يحسب الاحتمال كما يلي:

$$p(-2.01<z\leq 1.28)=p(z\leq 1.28)-p(z\leq -2.01)$$

$$=F(1.28)-F(-2.01)$$

$$= \quad 0,8997-0,0222$$

$$=0,8775.$$

مثال1: يخضع عمر نوع البطاريات الى توازيع طبيعي وسطه الحسابي 1000ساعة و انحرافه المعياري 50 ساعة .

أحسب احتمال ان لا تفوق عمر بطارية من هذا النوع 1100 ساعة.

مثال2:اذا كان التدخل السنوي للاسر في ولاية عين تموشنت متوسطه الحسابي 80.000 دج و تباينه 900.

المطلوب ما يلي:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

3- ماهي نسبة الاسر التي يقل دخلها عن 60 الف دينار؟

4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من المداخيل؟

الحل:

x= عمر البطارية

$\bar{x}$ =1000 $\delta(x) = 50$

الرمز $x \hookrightarrow N(1000,50)$

$p(x \leq 1100) = ?$

$z = \frac{xi - \bar{x}}{\delta} = \frac{x - 1000}{50} \Rightarrow x = 50z + 1000$

$p(x \leq 1000) = p(50z + 1000 \leq 1100)$

$= p(z \leq \frac{1100 - 1000}{50})$

$= p(z \leq 2)) = F(2) = 0.9772$

حل المثال 2:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للتدخل السنوي:

xمتغير عشوائي يعبر عن التدخل السنوي بآلالف دينارجزائري، يتبع التوزيع الطبيعي

$E(x) = \bar{x} = 80$

$v(x) = s^2 = 900 \Rightarrow s = 30.$

$x \hookrightarrow N(80,30)$

2- كتابة دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2} (\frac{xi - \bar{x}}{\delta})^2]$$

$$= \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2} (\frac{xi - 80}{30})^2]$$

3- نسبة الاسر التي يقل دخلها عن 60 الف دينار هي :

$p(x<60)= ?$

$zi=\frac{xi-\bar{x}}{\delta} \Longrightarrow zi=\frac{xi-80}{30} \Longrightarrow xi=30z+80.$

$p(x<60)=p(30z+80<60)$

$=p(z<\frac{60-80}{30})$

$=p(z<-0.67)$

$=f(-0.67)$

$=0.2514$ من جدول التوزيع الطبيعي القياسي

4- الدخل الذي أقل من 0.975 من المداخيل:

في هذه الحالة نبحث عن قيمة المتغير x الذي أقا من 0.975 نفرض هذا المتغير هو x_1 فان:

$p(x\leq x_1)=p(z(\leq\frac{xi-80}{30}) = 0.975$

و بالكشف بطريقة عكسية،حيث نبحث عن المساحة 0.975 نجدها تقع عند تقاطع الصف 1.9 و العمود 0.06 اي ان قيمة z=1.96 و بالتالي :

$1.96=\frac{xi-80}{30}$

$\Longrightarrow x_1=30(1.96)+80$

$\Longrightarrow x_1=138.8$

الدخل الذي اقل من 0.975 من المداخيل هو 138.8 الف دينار في السنة.

III . القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية:

III. 1.التوقع الرياضي (الامل الرياضي):تختلف صيغته الرياضية باختلاف المتغير العشوائي و دلك كما يلي:

III. 1.1.متغير متقطع: اذا كان X متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي :

X=xi	x1 x2.....xn
P(x=xi)	p1 p2.....pn

فان توقعه الرياضي معرفة بالعلاقة: $E(x)=\sum_{i=1}^{n} xi\, p(x=xi)=\sum_{i=1}^{n} xipi$

III. 2.1.متغير مستمر:اذا كان x متغير عشوائي مستمر كثافة احتماله f(x) فان توقعه الرياضي معرف بالعلاقة : $E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

III. 2.التباين: هو التوقع الرياضي لمربع انحراف المتغير العشوائي عن وسطه الحسابي (توقعه الرياضي)، و ياخد الصيغ التالية :

$$v(x) = E[x-E(x)]^2 = E(x^2)-E^2(x) = E(x^2)-E(x)$$

- **حالة متغير متقطع** : $v(x)=\sum_{i=1}^{n} xi2p(x=xi)-E^2(x)$
- **حالة متغير مستمر** : $v(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-E^2(x)$

III. 3.خواص التوقع و التباين: نفرض أن a ثابت ، x,y متغيران عشوائيان، وعليه نلخص خواص التوقع الرياضي و التاين فيما يلي:

1/ $E(ax)=aE(x)$

2/ $E(x+y)=E(x)+E(y)$

3/ $v(x) \geq 0$

4/ $v(ax)=a^2v(x)$

اذاكان x و yمتغيرين مستقلين 5/ $v(x+y)=v(x)+v(y)$

مثال 01 :تنتج شركة معينة 20 قطعة في اليوم من منتوج معين ،من بينها قطعتان فاسدتان ،قمنا بسحب اربعة (04) قطع من هذا المنتوج بطريقة عشوائية،اوجد القيمة المتوقعة لعدد القطع الفاسدة.

الحل:

X: عدد القطع الفاسدة.

X=xi	0	1	2	المجموع
P(x=xi)=f(xi)	0.63	0.33	0.04	1

$n(s)= c_{20}^{4}= 4845$

$p(x=0) = \frac{c_2^0 c_{18}^4}{c_{20}^4} = 0.63$

$p(x=1) = \frac{c_2^1 c_{19}^3}{c_{20}^4} = 0.33$

$p(x=2) = \frac{c_2^2 c_{18}^2}{c_{20}^4} = 0.04$

$E(x)=\sum_{i=1}^{3} p(x = xi)$

$=(0.0,63)+(1.0,33)+(2.0,04)$

$E(x)=0.41.$

حساب التباين:

$v(x)=\sum_{i=1}^{3} xi^2 p(x=xi)-E^2(x)$

$[(0^2*0.63)+(1^2*0.33)+(2^2*0.04)]-(0.41)^2$

$v(x)=0,3219$

مثال02 : اذا كان الانفاق الشهري بالألف دينار جزائري على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصيغة التالية:

$$f(x)= \begin{cases} 0.006x(10-x) & 0<x<10 \\ & \end{cases}$$

$0 \qquad 0 \geq x \geq 10$

المطلوب:أحسب التوقع الرياضي و التباين:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{10} x[0.006x(10-x)]\,dx$$

$$=0.006\int_0^{10}(10x^2-x^3)$$

$$0.006[10\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}]_0^{10}=0.006[(\frac{10000}{3}-\frac{10000}{4})-(0)]$$

$$=60(\frac{1}{12})=5$$

2–التباين:

$$v(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-E^2(x)$$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f(x)dx=0.006\int_0^{10}(10x^3-x^4)dx$$

$$=0.006[10(\frac{x^4}{4})-(\frac{x^5}{5})]_0^{10}$$

$$=0.006[\frac{100\,000}{4}-\frac{100\,000}{5}]-0$$

$$=600(\frac{1}{20})=30$$

و بالتالي:

$$v(x)=30-(5)^2=30-25$$

$$v(x)=5.$$

IV. تمارين محلولة

التمرين 01 : متوسط الجرائد المباعة يوميا في كشك معين هو 80 جريدة .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال f(x) لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان يكون عدد الجرائد المباعة في هدا الكشك خلال يوم ما :

أ – 100 جريدة . **ب** – 10 جرائد على الأقل . **ج** – 2 جرائد على الأكثر .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 02 : يتوافد الاشخاص على مصلحة ادارية بقيمة متوسطة قدرها 180 شخص في الساعة ، نعرف المتغير العشوائي x الدي يمثل عدد الاشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي ، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال f(x) لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان لا يقل عدد المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة عن شخصين .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 03 : في معهد معين احتمال تخرج طالب ما بعد 05 سنوات من الدراسة هو 0،5،ليكن x المتغير العشوائي الدي يمثل عدد المتخرجين بعد 05 سنوات في فوج من 40 طالب .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي ، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال f(x) لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان : أ – عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات هو 30 .

ب – عدد الطلبة المتخرجين بعد 05 سنوات لا يقل عن 5 .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 04 : لاحظ تاجر انه من بين كل 20 شخصا يدخلون محله 04 منهم يشترون ، دات يوم دخل 30 شخص الى محل التاجر ، ليكن x المتغير العشوائي الدي يمثل عدد المشترين في هدا اليوم .

1 – ما هو نوع المتغير العشوائي، ثم اكتب شكل دالة الاحتمال f(x) لهدا المتغير .

2 – احسب احتمال ان عدد المشترين:

أ – 03 مشترين . **ب** – لا يقل عن 02 مشترين . **ج** – لا يزيد عن 27 مشتري .

3 – احسب المتوسط ، التباين ، الانحراف المعياري.

التمرين 05 :استورد أحد التجار 6000 طن من السكر، ووضعها في مخزن و ذلك ليقوم ببيعها بكميات متساوية على مدار سنتين، إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم فأوجد مايلي:

1–دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.

2–بعد مرور سنة من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

3-ما هي الكمية المباعة بعد 05 أشهر؟

التمرين 06 : إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة زبون في شباك البريد تتبع توزيع بمتوسط 4 دقائق أوجد مايلي:

1-دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية.

2-ما هو احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يزيد عن 03 دقائق؟

3 - احسب التوقع الرياضي و التباين .

التمرين 07 : اوجد الاحتمالات التالية :

A/ $P(-1.7 \leq Z \leq 2.58)$

B/ $P(1 \leq Z \leq 3.3)$

C/ $P(-1.23 < Z < -0.68)$

ليكن x متغير عشوائي خاضع لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 20 و تباينه 09، أحسب مايلي:

1- $p(x \leq 21)$، $p(x \leq 17)$، $p(x \geq 19)$ ، $p(18 \leq x \leq 21)$

2-عين قيم a .b.c بحيث:

$P(x \leq a)$ ، $p(x \geq b)$ ، $p(b \leq x \leq c)$

التمرين 08 : كانت علامات 300 طالب في امتحان معين تخضع إلى توزيع طبيعي وسطه الحسابي 10 وتباينه 04.

1-ماهي نسبة الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13.

2-ماهو عدد الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13.

3-ماهي أقل علامة حصل عليها طالب من بين 25% الأوائل.

التمرين 09 : تتخذ أطوال (1000) طالب توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي (160cm) و انحرافه المعياري (10cm) ، أوجد مايلي:

1-نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن 170 cm.

2-النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن180 cm.

3-النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أطوالهم بين 175 cm،165 cm.

4-عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 cm.

الحلول

التمرين 01 :

x :عدد الجرائد المباعة λ=100

1) نوع المتغير : عشوائي متقطع

- نوع التوزيع = توزيع بواسوني

$$X \circlearrowleft p(\lambda) \Rightarrow x \circlearrowleft p(100)$$

- شكل دالة الاحتمال :

$$f(x) = \mathrm{p}(\mathrm{x} = \mathrm{xi}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} = \mathrm{e}^{-100}\,\frac{100^x}{x!}$$

2) حساب الاحتمالات التالية:

أ- بيع 90 جريدة

$$P(x = 90) = \mathrm{e}^{-100}\,\frac{100^{90}}{90!}$$

ب- 4 جرائد على الأقل :

$$P(x \geq 4) = 1 - P(x < 4) = 1 - P(x \leq 3)$$

$$= 1 - [P(x = 3) + P(x = 2) + P(x = 1) + P(x = 0)]$$

$$= 1-\left[e^{-100}\ \frac{100^3}{3!}\right] + e^{-100}\ \frac{100^2}{2!} + e^{-100}\ \frac{100^1}{1!} + e^{-100}\ \frac{100^0}{0!}$$

ج- 3 جرائد على الأكثر :

$$P(x\leq 3) = (x=3) + P(x=2) + P(x=1) + P(x=0)$$

$$=\left[e^{-100}\ \frac{100^3}{3!}\right] + e^{-100}\ \frac{100^2}{2!} + e^{-100}\ \frac{100^1}{1!} + e^{-100}\ \frac{100^0}{0!}$$

3) حساب $S(x),\ V(x),E(x)$

$E(x)=V(x)=\lambda \qquad \lambda=100$

$S(x)=\sqrt{V(x)} = \sqrt{100} = 100$

التمرين 02 :

X: عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة

$180 \leftarrow 60$

$X \leftarrow 1$د

$\Rightarrow X=\frac{180}{60}=3 \qquad \Rightarrow \lambda=3$

متوسط الأشخاص المتوافدين في الدقيقة :

1- نوع المتغير = عشوائي متقطع

نوع التوزيع = بواسوني $X \backsim p(\lambda) \Rightarrow x \backsim p(3)$

- دالة الإحتمال :

$$f(x) = p(x = xi) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-3}\ \frac{3^x}{x!}$$

2- حساب إحتمال أن لا يقل عدد المتوافدين على المصلحة في دقيقة معينة عن شخصين :

$$\mathbf{P(x\geq 2)= 1- P(x\leq 1) =1- [P(x=1)+P(x=0)]}$$

$$= \mathbf{1-\left[e^{-3}\ \frac{3^1}{1!}\ +\ e^{-3}\ \frac{3^0}{0!}\right]}$$

3) حساب المتوسط ،التباين ، الانحراف المعياري

$E(x)=V(x)=\lambda \qquad \lambda=3$

$S(x)=\sqrt{V(x)} = \sqrt{3}$

التمرين 03 :

$P=0,4 \qquad q= 0,6 \qquad n =40$ E

X: عدد المتخرجين بعد 05 سنوات

1 – نوع المتغير : عشوائي متقطع

- نوع التوزيع = توزيع ذي الحدين

$$\mathbf{X\backsim B(n-p) \Rightarrow x \backsim B(40,0,4)}$$

- كتابة شكل دالة الاحتمال $f(x)$

$$f(x) = p(x = xi) = C_n^x \quad p^x(1-P)^{n-x}$$

$$\mathbf{=C_{40}^x \quad (0.4^x)(0.6)^{40-x}}$$

1- حساب الاحتمالات التالية :

$$\Rightarrow P\ (x=10)= C_{40}^{10} \quad (0.4^{10})\ (0.6^{40-10})$$

$$= \mathbf{C_{40}^{10} \quad (0.4)^{10}(0.6)^{30}}$$

$$\Rightarrow P(x\geq 3)= 1-P(x\leq 2) =1-[P(x=2)+P(x=1)+P(x=0)]$$

$= 1-[C_{40}^{2}$

$(0.4)^{2}(0.6)^{38} + C_{40}^{1}\ (0.4)^{1}\ (0.6)^{39} + C_{40}^{0}\ (0.4)^{0}\ (0.6)^{40}$

3) حساب $S(x)$, $V(x)$,$E(x)$

$E(x)=n.\ p=40.(0,4)=16$

$V(x) = n.p.q = 40(0,4)(0,6)=9,6$

$S(x)=\sqrt{V(x)} = \sqrt{9,6}$

التمرين 04 :

$P=\frac{4}{20}=0,2 \qquad q=0,8 \quad n=30$

x = نوع المشترين في اليوم :

1) – نوع المتغير : عشوائي متقطع

- نوع التوزيع = ذي الحدين

$X \backsim B(n-p) \Rightarrow x \backsim B(30,0,2)$

- كتابة شكل دالة الاحتمال $f(x)$

$$f(x) = C_{n}^{x}\ \ P^{x}\ q^{n-x} = C_{30}^{x}\ \ (0,2)^{x}(0,8)^{30-x}$$

2) حساب الاحتمالات التالية :

$\Rightarrow P\ (x=3)= C_{30}^{3}\ \ (0,2)^{3}(0,8)^{30-3}$

$\Rightarrow\ P(x\geq 2)= 1-P(x\leq 1) =1-[P(x=1)+P(x=0)]$

$= 1-[C_{30}^{1}\ (0,2)^{1}+(0,8)^{29} + C_{30}^{0}\ (0,2)^{0}+(0,8)^{30}$

$\Rightarrow P(x\leq 27)= 1-P(x\geq 28) =1-[P(x=28)+P(x=29)+P(x=30)]$

$$= 1-[C_{30}^{28}\ (0,2)^{28}+(0,6)^{02}+C_{30}^{29}\ (0,2)^{29}+(0,8)^{1}+C_{30}^{30}\ (0,2)^{30}+(0,8)^{0}$$

3) حساب $S_{(x)}, V_{(x)}, E_{(x)}$

$E_{(x)}=n.\ p=30.(0,2)=6$

$V_{(x)} = n.p.q = 30(0,2)(0,8)=4,8$

$S_{(x)}=\sqrt{V(x)} = \sqrt{4,8}$

التمرين 05 :

$0< X<24 \qquad a= 0 \qquad b= 24 \qquad Q= 6000$

X : المدة الزمنية للبيع (بالاشهر)

نوع المتغير العشوائي :متغير عشوائي مستمر (متصل)

نوع التوزيع الاحتمالي : توزيع منتظم

$X \rightsquigarrow U_{(a-b)} \Rightarrow X \rightsquigarrow U_{(0\ .\ 24)}$

1- دالة كثافة الاحتمال

$f_{(x)} = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{24-0} = \frac{1}{24}$

2- الكمية الموجودة بالمخزن بعد مرور سنة من بداية البيع .

$Q\ P_{(X>12)} = Q\ [\ 1- P_{(X\leq 12)}]$

$= Q\ [\ 1- F_{(12)}]$

$= 6000\ [\ 1- \frac{12}{24}\ ]$

$= 3000T$

3- الكمية المباعة بعد 05 أشهر

$$Q\ P(X \leq 5) = Q\ f(5)$$

$$= 6000\ (\frac{5}{24})$$

$$= 1250T$$

التمرين 06 :

التوقع الرياضي: $E(X) = 4$

X : الفترة الزمنية لإنهاء خدمة الزبون

نوع المتغير العشوائي : متغير مستمر (متصل)

نوع التوزيع الاحتمالي : التوزيع الاسي السالب

$$E(X) = \frac{1}{\theta} = 4 \Rightarrow \theta = \frac{1}{4} = 0.25$$

1- دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \theta\, e^{-\theta x} = 0.25\, e^{-0.25x}$$

دالة توزيع المجتمع:

$$F(x) = 1 - e^{-\theta x} = 1 - e^{-0.25x}$$

2- حساب احتمال إنهاء خدمة الزبون في زمن لا يزيد عن 03 دقائق :

$$P(x \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-0.25(3)}$$

3- حساب $E(X)$ ، $V(X)$

$$E(x) = \frac{1}{\theta} = \frac{1}{0.25} = 4$$

$$V(x) = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{(0.25)^2} = 16$$

التمرين 07 :

- حساب الاحتمالات التالية :

A/ $P(-1.7 \leq Z \leq 2.58) = P(Z \leq 2.58) - P(Z < -1.7)$

$= 0.9951 - 0.0446$

$= 0.9505$

B/ $P(1 \leq Z \leq 3.3) = P(Z \leq 3.3) - P(Z < 1)$

$= 0.9995 - 0.8413$

$= 0.1582$

C/ $P(-1.23 < Z < -0.68) = P(Z < -068) - P(Z \leq -1.23)$

$= 0.2483 - 0.1093$

$= 0.1390$

لدينا ما يلي :

$V(x) = 9 \Rightarrow \quad S(x) = 3 \qquad \bar{x} = 20$

1- حساب ما يلي :

$$z = \frac{x_i - \bar{x}}{s(x)}$$

- $P(x \leq 21) = P\left(z \leq \frac{21-20}{3}\right) = P(z \leq 0.33) = 0.6293$
- $P(x \leq 17) = P\left(z \leq \frac{17-20}{3}\right) = P(z \leq 1)$

$= 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.8413$

$= 0.1587$

- $P(x \geq 19) = P\left(z \geq \frac{19-20}{3}\right) = P(z \geq -0.33)$
$= P(z \leq 0.33) = 0.6293$
- $P(18 \leq x \leq 21) = P\left(\frac{18-20}{3} \leq z \leq \frac{21-20}{3}\right)$
$= P(-0.66 \leq z \leq 0.33)$
$= P(z \leq 0.33) - P(z \leq -0.66)$
$= P(z \leq 0.33 - [1 - P(z \leq 0.66)]$
$= 0.6293 - 1 + 0.7454 = 0.3747$

2- تعيين قيم a ,b,c حيث :

- $P(x \leq a) = 0.85 \Rightarrow P\left(z \leq \frac{a-20}{3}\right) = 0.85$

$\frac{a-20}{3} = 1.04$

$\Rightarrow a = (1.04)3 + 20 = 23.12$

- $P(x \geq b) = 0.7 \Rightarrow P\left(z \geq \frac{b-20}{3}\right) = 0.7$

$\frac{b-20}{3} = -0.53 \Rightarrow b = 18.41$

- $P(b \leq x \leq c) = 0.65 \Rightarrow P(x \leq c) - P(x \leq b) = 0.65$
$\Rightarrow P(x \leq c) = 0.95$
$\Rightarrow P\left(z \leq \frac{c-20}{3}\right) = 0.95$
$\Rightarrow \frac{c-20}{3} = 1.56 \Rightarrow c = 1.56 *$

$3 + 20$

$\Rightarrow c = 24.68$

التمرين 08 :

N = 300 E $\quad \overline{X} = 10 \quad V(x) = 04 \quad S(x) = 0.2$

X : علامات الطلبة

نوع المتغير العشوائي : متغير مستمر (متصل)

نوع التوزيع الاحتمالي : توزيع طبيعي $X \sim N(10,2)$

1- نسبة الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13

$$P(13 \leq x \leq 10) = P\left(\frac{13-10}{2} \leq z \leq \frac{10-10}{2}\right)$$

$$= P(\frac{3}{2} \leq z \leq 0)$$

$$= P(z \leq 1.5) - P(z \leq 0)$$

$$= 0.9332 - 0.5 = 0.4332 \approx 043$$

1- عدد الطلبة الذين وقعت علاماتهم بين 10 و 13

$$N = n * 0.43 = 300 * 0.43 = 129$$

2- ما هي اقل علامة حصل عليها طالب من بين 25 % الاوائل.

a : اقل علامة

$$P(x \geq a) = 0.25$$

$$P\left(z \geq \frac{a-10}{2}\right) = 0.25$$

$$P\left(z \leq \frac{a-10}{2}\right) = 0.75$$

$$\Rightarrow \frac{a-10}{2} = 0.68 \Rightarrow a = 0.68 * 20 + 10 = 11.36$$

التمرين 09 :

n =100 $\bar{x}$= 160cm S(x)=10cm s

$$zi=\frac{xi-\bar{x}}{\delta(x)}$$

1-نسبة الطلبة الذين تقل او تساوي أطوالهم عن170 cm.

لكن = $P(x \leq 170)$ $\quad p\left(Z \leq \frac{170-\bar{x}}{\delta(x)}\right)$

$$= P\left(Z \leq \frac{170-160}{10}\right)$$

$$= p(z \leq 1)$$

$$= \mathbf{0.8413}$$

إذا: نسبة الطلبة الذين تقل أطوالهم عن 170 cm تساوي 0.8413

2- نسبة الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 cm هي:

$$p(x > 180)$$

$$= p\left(z > \frac{180-160}{10}\right)$$

$$= P(z > 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772 = \mathbf{0.0228}$$

إذا: فالنسبة المئوية للطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 180 cm تساوي:

$$0.0228 * 100\% = \mathbf{2.28\%}$$

3- نسبة الطلبة الذين تتراوح أعمارهم بين 175 cm و 165 cm هي:

$$P(165 < x < 175) = p\left(\frac{165-160}{10} < z < \frac{175-160}{10}\right)$$

$$= p(0.5 < z < 1.5)$$

$$= p(0.5 < z < 1.5) - p(0 < z < 0.5)$$

$$= 0.4332 - 0.1915$$

$$= \mathbf{0.2417}$$

إذن النسبة المئوية للطلبة الذين تتراوح أعمارهم بين 175 cm، 105 cm تساوي 24.17%.

4- لإيجاد عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 cm، نجد نسبتهم و نضربها في عدد الطلبة الكلي، أي أن عدد الطلبة المطلوب = نسبتهم x عدد الطلبة الكلي.

$$p(x > 175) = p\left(z > \frac{175-160}{10}\right)$$

$$= p(z > 1.5)$$

$$= 0.5 - p(0 < z < 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332$$

$$= \mathbf{0.0668}$$

إذن فعدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن 175 cm يساوي:

$$0.668 * 1000$$

$$= 66.8$$

$$\approx \mathbf{67}$$

الفصل الخامس: العزوم و الدالة المتجددة للعزوم

نتناول من خلال هذا الفصل العناصر التالية:

I. العزوم

1.I العزوم المركزية

2.I العزوم المرتبطة بالأصل

II. الدالة المتجددة للعزوم

I. العزوم:

تعتبر العزوم من تطبيقات توقع الدالة، و يوجد نوعين من العزوم العزوم المركزية و العزوم المرتبطة بالأصل. تستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس كمعامل التماثل coefficient d'asymétrie و معامل التفلطح coefficient d'aplatissement.

1.I العزوم المركزية:

أ- بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع $_r = \sum_{+\infty}^{-\infty} p_i\,[x_i - E\,(x)]^r$

ب- بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر $_r = \int_{+\infty}^{-\infty} [x_i - E(x)] \quad f(x)dx_i$

ملاحظات:

- ✓ $M_2 = V(X)$, $r = 2$
- ✓ $M_1 = 0$, $r = 1$
- ✓ $M_0 = 1$, $r = 0$

2.I العزوم المرتبطة بالأصل:

العزم المرتبط بالأصل من الدرجة r لأي متغير عشوائي مستمرا أو متقطعا يحسب كالتالي:

$$M_r = E(x)^r$$

حيث: $r = 0, 1, 2\ldots$

أ- بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع: $M_r = \sum_{i=0}^{1} x_i \quad p_i$

ب- بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر: $M_r = \int_{+\infty}^{-\infty} X_i^r\, f(x)dx_i$

ملاحظات:

- ✓ $M_1 = E(x)$, $r = 1$
- ✓ $M_0 = 1$, $r = 0$

II. الدالة المتجددة للعزوم:

تعرف الدالة المولدة للعزوم $Mx\ (t)$ كالتالي:

$$Mx(t) = E\ (e^{tx})$$

أ- بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع: $Mx(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, p(x)$

ب- بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر: $Mx(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{tx}\, f(x) dx_i$

مما سبق نستنتج أن Mr هي المشتقة من الدرجة r لهذه الدالة بالنسبة إلى " t" مع وضع t=0 في المشتقة المتحصل عليها و هذا ما يجعلها دالة مولدة للعزوم.

مثال:

إذا كانت الدالة الاحتمالية للمتغير العشوائيX، معطاة على الشكل التالي:

$$P(X) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x\ (1-p)^{n-x} & \text{X= 0, 1, 2,...n} \\ 0 & \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الدالة المولدة للعزم للمتغير العشوائي X؟

$$Mx\ (t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, p(x)$$

$$Mx(t) = \sum_{0=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-X} = \sum_{0=0}^{n} \binom{n}{x} (e^t p)^X (1-p)^{n-X}$$

الفصل السادس: نظرية شبيشيف و نظرية الأعداد الكبيرة

نتناول من خلال هذا الفصل العناصر التالية:

I. متراجحة شبيشيف **Chebyshev's inequality**

II. نظرية الأعداد الكبيرة

I. متراجحة شبيشيف Chebyshev's inequality

ترجع متراجحة شبيشيف إلى عالم الرياضيات الروسي بافونتي تشيبيشيف، و تلعب دورا مهما في نظرية الاحتمالات و الإحصاء. من خلالها يمكن أن نفهم كيفية أن التباين يقيس التغير حول المتوسط للمتغير العشوائي. إذا علمنا التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي X فإنه يمكننا تحديد تباينه و متوسطه، و لكن في الحالة العكسية لا يمكن ذلك. حيث لا يمكننا تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي بمجرد معرفة تباينه و متوسطهو بالتالي لا يمكن حساب الاحتمالات. و لكن باستخدام متباينة شبيشيف يمكننا حساب الحد الأعلى أو الحد الأدنى لهذه الاحتمالات.

إذا كان X متغيرا عشوائيا وسطه μ و تباينه V(x) فإنه لاي عدد موجب k تكون:

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

مثال:

إذا كانت أطوال مجموعة من المراهقين تتبع توزيعا طبيعيا متوسطها 170 سم و انحرافها المعياري 8 سم. أوجد الحد الأعلى لاحتمال أن يكون أحد المراهقين أطول أو أقصر ب 12 سم من المتوسط باستعمال متباينة شيبيشف؟

الحل:

نعلم أن متراجحة شيبيشف في كالتالي:

$$\Pr(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\Pr(|X-170| \geq 12) \leq \frac{1}{1{,}5^2}$$

$$\Pr(|X-170| \geq 12) \leq 0{,}44$$

باستعمال جدول التوزيع الطبيعي نجد أنها تساوي 0,13

ملاحظات:

- ✓ استعمال متراجحة شيبيشف لا يستدعي بالضرورة معرفة طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي، إذ نعد معرفة المتوسط و التباين كافية لذلك؛
- ✓ باستخدام هذه المتراجحة، نجد الحد الأعلى للاحتمال فقط و ليس قيمة الاحتمال؛
- ✓ إذا كان K كبير نسبيا تكون هذه المتراجحة مفيدة.

II. نظرية الأعداد الكبيرة

تعتبر نظرية الأعداد الكبيرة من النظريات المهمة في الاحصاء، حيث تصف نتيجة تكرار نفس التجربة عددا كبيرا من المرات. بحيث تنص هذه النظرية على أنه في حالة تكرار نفس التجربة يجب أن يكون متوسط نتائج التجارب قريبا من القيمة المتوقعة، و التي تعبر عن متوسط قيمة المدى الطويل للمتغيرات العشوائية. و تصبح النتيجة أقرب إلى هذه القيمة المتوقعة مع زيادة عدد المحاولات.

حسب قانون الأعداد الكبيرة فإن التردد النسبي لحادثة عشوائية يقترب أكثر فأكثر من احتمالها النظري مع ازدياد عدد مرات إعاجة التجربة العشوائية.

مثال: عند رمي زهرة النرد، لدينا سنة أحداث مختلفة باحتمالات متساوية. القيمة المتوقعة لهذه الأحداث هي:

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6	المجموع
$P(X=x_i)$	1 /6	1 /6	1 /6	1 /6	1 /6	1 /6	1

إذا رمينا النرد مرتين فقط، فقد يكون متوسط النتائج التي تم الحصول عليها بعيدا عن القيمة المتوقعة. فباتباع نظرية الأعداد الكبيرة، كلما رمينا النرد عددا كبيرا من المرات كلما كانت متوسط النتيجة أقرب إلى القيمة المتوقعة.

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

1 – جيلالي جلاطو ، "**نظرية الاحتمالات و التوزيعات الاحتمالية**"، دار هومة للنشر و التوزيع ،الجزائر ،2014.

2 – محمد صبحي ابو صالح "**الطرق الإحصائية**" ،دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع ، عمان ،الاردن، 2009.

3 – محمد صبحي أبو صالح، "**مبادئ الإحصاء**"، داراليازوري العلمية للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، 2007.

4 – معتوق أمحمد،"**الإحصاء الرياضي والنماذج الإحصائية**"،ديوان المطبوعات الجامعية بن عكنون،الجزائر، 2007.

5 – عبد الناصر رويسات ،"**الاحصاء الوصفي ومدخل للاحتمالات دروس و تمارين**"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006 .

6 – السعدي رجال، "**نظرية الإحتمالات مبادئ الحساب الاحتمالي دروس وتمارين**"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، الجزائر، 2005.

7 – عبد الحفيظ مصطفى ، "**نظرية الاحتمالات مبادئ و تطبيقات** "، الجزء الاول ، ديوان المطبوعات الجامعية ، الطبعة الثانية، الجزائر ، 2004.

8 – محمد يوسف اشقر،عبد اللطيف يوسف الصديقي،"**اساسيات الاحصاء والاحتمالات** "،دار الراتب الجامعية ، الطبعة الاولى ،بيروت ،لبنان ، 2001 .

المطبوعات البيداغوجية:

بن عزة هناء، "الإحصاء 2 – دروس و أعمال موجهة"، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية و التجارية و علوم التسيير، جامعة تلمسان، 2022-2023.

المراجع باللغة الفرنسية

1 - Grégory denglos, **« statistiques et probabilités apliquées »**, presses universitaires de France , 2eédition , France , 2016.

2 - Christophe hurlin , openbook licence / bachelor , **« statistique et probabilité en économie – gestion »** , dunod , paris , France , 2015

3 - Stéphane mussard, françois seyte, **« inférence statistique et probabilités »** , de boeck supérieur, 1reédition , paris , France, 2014.

4 - Gilbert saporta, **« probabilités analyse des données et statistique »** ,3eédition , éditions technip , paris , France , 2011