الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

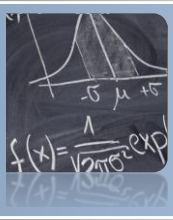
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة أبي بكر بلقايد- تلمسان-

كلية العلوم الإقتصادية، التجارية و علوم التسيير

2021

تمارين محلولة في حساب الإحتمالات



مطبوعة بيداغوجية موجهة لفائدة طلبة السنة الأولى جذع مشترك
ميدان العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير.

د. جمعـــة زكرياء

المحتويات:

التمرين 01 ----------01

التمرين 02 ----------02

التمرين 03 ----------04

التمرين 04 ----------05

التمرين 05 ----------07

التمرين 06 ----------09

التمرين 07 ----------10

التمرين 08 ----------13

التمرين 09 ----------14

التمرين 10 ----------15

التمرين 11 ----------18

التمرين 12 ----------20

التمرين 13 ----------22

التمرين 14 ----------23

التمرين 15 ----------25

التمرين 16 ----------26

التمرين 17 ----------27

التمرين 18 ----------30

التمرين 19 ----------32

التمرين 20 ----------33

التمرين 21 ----------35

التمرين 22 ----------40

التمرين 23 ----------42

التمرين 24 ---------- 44
التمرين 25 ---------- 45
التمرين 26 ---------- 46
التمرين 27 ---------- 47
التمرين 28 ---------- 48
التمرين 29 ---------- 49
التمرين 30 ---------- 50
التمرين 31 ---------- 52
التمرين 32 ---------- 53
التمرين 33 ---------- 54
التمرين 34 ---------- 55
التمرين 35 ---------- 57
التمرين 36 ---------- 57
التمرين 37 ---------- 58
التمرين 38 ---------- 62
التمرين 39 ---------- 63
التمرين 40 ---------- 65
التمرين 41 ---------- 67
التمرين 42 ---------- 69
التمرين 43 ---------- 70
التمرين 44 ---------- 72
التمرين 45 ---------- 73
التمرين 46 ---------- 73
التمرين 47 ---------- 76

التمرين 48 ---------- 77
التمرين 49 ---------- 79
التمرين 50 ---------- 80
التمرين 51 ---------- 83
التمرين 52 ---------- 85
التمرين 53 ---------- 86
التمرين 54 ---------- 88
التمرين 55 ---------- 89
التمرين 56 ---------- 90
التمرين 57 ---------- 92
التمرين 58 ---------- 93
التمرين 59 ---------- 95
التمرين 60 ---------- 96
التمرين 61 ---------- 98
التمرين 62 ---------- 99
التمرين 63 ---------- 101
التمرين 64 ---------- 103
التمرين 65 ---------- 104
التمرين 66 ---------- 105

مقدّمة:

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على خاتم النبيين و على آله وصحبه أجمعين، و بعد:

يُسعدني أن أضع بين يدي إخواني الطلبة هذه المطبوعة التي تتضمن مجموعة من التمارين الخاصة بحساب الإحتمالات، من نظرية الإحتمالات، المتغيرات العشوائية و التوزيعات الإحتمالية الشهيرة.

هذه التمارين المتبوعة بالحل النموذجي و التفصيلي لها هي في الواقع مستقاة من عدة مواضيع إمتحانات وسلاسل أعمال موجهة لسنوات سابقة في مادة الإحصاء الرياضي، من أجل وضعها و إفرادها في مطبوع شامل يُمكن طلبتنا الأعزاء من المراجعة و التحضير للإمتحانات الخاصة بهذه المادة، و هي موجهة لطلبة ميدان العلوم الإقتصادية، التجارية و علوم التسيير.

في الأخير نرجو من الله العلي القدير أن يجعل عملنا هذا خالصاً لوجهه الكريم و أن يجعله مُعينا للطلبة الكرماء في مسارهم الدراسي.

د. زكرياء جمعـــــة.

التمرين 1:

تتشكل كلمة سر من (03) أحرف مختلفة (مختارة من بين 26 حرف) متبوعة برقمين مختلفين.

1. كم كلمة سر يمكننا تشكيلها بهذه الطريقة؟
2. أحسب احتمالات الحوادث التالية:

A"كلمة السر لا تحتوي على الحرف a"

B "الحرفان a,b يظهران متتابعان في كلمة السر"

C "كلمة السر تنتهي برقم زوجي"

D "كلمة السر تبدأ بحرف صوتي وتنتهي برقم زوجي"

حل التمرين 1:

كلمة سر من 03 أحرف مختلفة متبوعة برقمين مختلفين.

1) عدد الحالات الممكنة:

يمكن تشكيل إذن : $A_{26}^{3}A_{10}^{2} = \frac{26!}{23!} \times \frac{10!}{8!} = 1404000$ كلمة سر.

2) A: "كلمة السر لا تحتوي على الحرف a"

عدد الحالات الملائمة لـ A: $A_{25}^{3}A_{10}^{2} = 1242000$

Donc $P(A) = \frac{1242000}{1404000} = \mathbf{0,88}$

B: "الحرفان a,b يظهران متتابعان في كلمة السر"

عدد الحالات الملائمة لـB:

$$2! \times 2 \times A_1^1 A_1^1 A_{24}^1 A_{10}^2 = 4 \times 24 \times 90 = 8640$$

Donc $P(B) = \frac{8640}{1404000} = \mathbf{0,006}$

C: " كلمة السر تنتهي برقم زوجي"

عدد الحالات الملائمة لـ C: $A_{26}^3 \quad {}_9A_5^1 = 702000$

Donc $P(C) = \frac{702000}{1404000} = \mathbf{0,5}$

D: " كلمة السرّ تبدأ بحرف صوتي voyelle وتنتهي برقم زوجي"

الأحرف الصوتية ستة: a e y i o u.

عدد الحالات الملائمة لـ D: $A_6^1 \quad {}_{25}^2A_9^1A_5^1 = 162000$

Donc $P(D) = \frac{162000}{1404000} = \mathbf{0,11}$

التمرين 2:

وحدة إنتاج بها ثلاث (03) آلات، احتمال أن تتوقف الآلة الأولى عن العمل خلال يوم هو 0,02، واحتمال توقف الآلة الثانية هو 0,08؛ في حين أن احتمال توقف الآلة الثالثة عن العمل هو 0,12. نعلم أن الآلات الثلاث تعمل بصفة مستقلة عن بعضها البعض.

أحسب احتمال أن:

1- لا يكون هنا أي توقف عن العمل خلال يوم معين.

2- آلة واحدة وواحدة فقط تتوقف عن العمل.

3- آلتين فقط تتوقفان عن العمل.

4- آلة واحدة على الأقل تتوقف عن العمل.

حل التمرين 2:

نعتبر الحوادث التالية:

A_1: "توقف الآلة الأولى عن العمل" $P(A_1) = 0,02 \Rightarrow P(\overline{A_1}) = 0,98$

A_2: "توقف الآلة الثانية عن العمل" $P(A_2) = 0,08 \Rightarrow P(\overline{A_2}) = 0,92$

A_3: "توقف الآلة الثالثة عن العمل" $P(A_3) = 0,12 \Rightarrow P(\overline{A_3}) = 0,88$

نعلم أن الآلات تعمل بصفة مستقلة عن بعضها البعض.

1) احتمال أن لا يكون هناك أي توقف عن العمل:

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3})$$

$$= (0,98).(0,92).(0,88)$$

$$= 0,7934$$

2) آلة واحدة وواحدة فقط تتوقف عن العمل:

$$P[(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)]$$

$$= P(A_1).P(\overline{A_2}).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1}).P(\overline{A_2}).P(A_3)$$

$$= (0,02)(0,92)(0,88) + (0,98)(0,08)(0,88) + (0,98)(0,92)(0,12)$$

$$= 0,1933$$

3) آلتين فقط تتوقفان عن العمل:

$$P[(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)]$$

$$= P(A_1).P(A_2).P(\overline{A_3}) + P(A_1).P(\overline{A_2}).P(A_3) + P(\overline{A_1}).P(A_2).P(A_3)$$

$$= (0,02)(0,08)(0,88) + (0,02)(0,92)(0,12) + (0,98)(0,08)(0,12)$$

$$= 0,013$$

4 -آلة واحدة على الأقل تتوقف عن العمل:

ط1: آلة واحدة على الأقل يعني آلة واحدة (السؤال 2) أو آلتين (السؤال 3) أو الآلات الثلاث تتوقف، أي:

$$0{,}1933 + 0{,}013 + \mathrm{P}[(A_1 \cap A_2 \cap A_3)] = 0{,}1933 + 0{,}013 + \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2)\mathrm{P}(A_3)$$

$$= 0{,}1933 + 0{,}013 + [(0{,}02)(0{,}08)(0{,}12)]$$

$$= 0{,}1933 + 0{,}013 + 0{,}000192$$

$$= 0{,}2064$$

ط2: الحادث العكسي هو: "ولا آلة تتوقف" وهو المطلوب في السؤال (1) وبالتالي الاحتمال المطلوب هو: $1 - 0{,}7934 = 0{,}2064$

التمرين 03:

ليكن حادثان A وB حيث: $\mathrm{P}(A) = {}^{1}/_{2}$، $\mathrm{P}(B) = {}^{1}/_{3}$، $\mathrm{P}(A \cap B) = {}^{1}/_{4}$.

1- أحسب $\mathrm{P}(A/B)$، $\mathrm{P}(B/A)$، $\mathrm{P}(A \cup B)$، $\mathrm{P}(\overline{A}/B)$، $\mathrm{P}(\overline{B}/A)$؟

2- ماذا يساوي $\mathrm{P}(A/B) + \mathrm{P}(\overline{A}/B)$ و $\mathrm{P}(B/A) + \mathrm{P}(\overline{B}/A)$؟

حل التمرين 03:

1)

$$\mathbf{P(A/B)} = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{{}^{1}/_{4}}{{}^{1}/_{3}} = \mathbf{{}^{3}/_{4}}\ ;$$

$$\mathbf{P(B/A)} = \frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{{}^{1}/_{4}}{{}^{1}/_{2}} = {}^{2}/_{4} = \mathbf{{}^{1}/_{2}}\ ;$$

$$\mathbf{P(A \cup B)} = \mathrm{P}(A) + [\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)] = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{3} - {}^{1}/_{4} = \mathbf{{}^{7}/_{12}}$$

$$\mathrm{P}(\overline{A}/B) = \frac{\mathrm{P}(\overline{A} \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

Car : $\overline{A} \cap B = B - (A \cap B)$

$$\mathbf{P(\overline{A}/B)} = 1 - P(A/B) = 1 - {}^{3}/_{4} = \mathbf{{}^{1}/_{4}}$$

$$\mathbf{P(\overline{B}/A)} = 1 - P(B/A) = 1 - {}^{1}/_{2} = \mathbf{{}^{1}/_{2}}$$

2)

$$P(\overline{A}/B) + P(A/B) = {}^{1}/_{4} + {}^{3}/_{4} = \mathbf{1}$$

$$P(B/A) + P(\overline{B}/A) = {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{2} = \mathbf{1}$$

Donc :

$$\mathbf{P(\overline{A}/B)} + \mathbf{P(A/B)} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{P(\overline{B}/A)} + \mathbf{P(B/A)} = \mathbf{1}$$

Car :$P(\overline{B}/A) + P(B/A) = 1 - P(B/A) + P(B/A) = \mathbf{1}$

التمرين04:

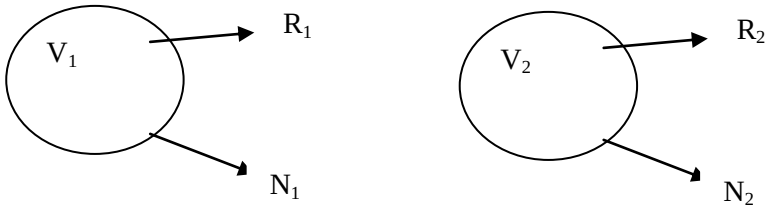
لتكن قُرعتان V_1 وV_2 تحتوي القُرعة V_1 على R_1 كرة حمراء وN_1 كرة سوداء. تحتوي القُرعة V_2 على R_2 كرة حمراء وN_2 كرة سوداء.

1- نسحب بصفة مستقلة كرة من V_1 وكرة من V_2 ، ما هو الاحتمال أن نحصل على:

- كرتين حمراوتين؛
- كرتين سوداوتين؛
- كرة حمراء وكرة سوداء؛
- كرتين من نفس اللون.

2- نسحب أولا كرة من V_1 ، إذا كان لونها أحمر، نسحب كرة ثانية من V_2؛ أمّا إذا كان لونها أسود نرجعها في قرعتها ونسحب الكرة الثانية من V_1. ما هو الاحتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء؟

حل التمرين 04:



1- ليكن:

A حادث سحب كرة حمراء من V_1؛

B حادث سحب كرة حمراء من V_2؛

$(A \cap B)$ نسحب كرتين حمراوتين من V_1 وV_2 .

وحيث أن الحادثان A و B مستقلان فإن:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

إذن:

❖ $P(A \cap B) = \frac{R_1}{R_1+N_1}.\frac{R_2}{R_2+N_2}$

❖ $P(2BN) = P(1BN \text{ de } V_1 \text{ et } 1BN \text{ de } V_2)$

$$= P(1BN \text{ de} V_1).P(1BNV_2)$$

$$= \frac{N_1}{R_1+N_1}.\frac{N_2}{R_2+N_2}$$

*$P(1BN \text{ de } V_1 \text{ et } 1BR \text{ de } V_2 \text{ ou } 1BR \text{ de } V_1 \text{ et } 1BN\text{de } V_2) \times [P(1BN \text{ de} V_1) \times P(1BR \text{ de } V_2)] + [P(1BN \text{ de} V_2) \times P(1BR \text{ de } V_1)]$

$$P(1BN \text{ et } 1BR) = \frac{N_1}{N_1 + R_1} \times \frac{R_2}{N_2 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + N_1} \times \frac{N_2}{N_2 + R_2}$$

*$P(1BR \text{ de } V_1 \text{ et } 1BR \text{ de } V_2)$ ou $P(1BN \text{ de } V_1 \text{ et } 1BN \text{ de} V_2)$

$$= P(1BR \text{ de } V_1) \times P(1BR \text{ de } V_2) + P(1BN \text{ de } V_1 \times P(1BN \text{ de} V_2)$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + N_1} \times \frac{R_2}{R_2 + N_2} + \frac{N_1}{N_1 + R_1} \times \frac{N_2}{N_2 + R_2}$$

2- نسحب كرة من V_1:

إذا كانت حمراء نسحب كرة ثانية من V_2.

إذا كانت سوداء نسحب كرة ثانية من V_1.

$$P(2^{\text{ème}} \text{ BR}) = P(2^{\text{ème}} \text{ BR et tirage du } V_1 \text{ ou } 2^{\text{ème}} \text{ BR et tirage de } V_2)$$

$$= P(2^{\text{ème}} \text{ BR et tirage du } V_1) + P(2^{\text{ème}} \text{ BR et tirage de } V_2)$$

$$= P(2^{\text{ème}} \text{ BR / tirage du } V_1) \times P(\text{tirage de } V_1) + P(2^{\text{ème}} \text{ BR / tirage de } V_2) + P(\text{tirage de } V_2)$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + N_1} \times \frac{N_1}{R_1 + N_1} + \frac{R_2}{R_2 + N_2} \times \frac{R_1}{R_1 + N_1}$$

التمرين 05:

يوجد في مخزن 4 مجموعات من القطع. المجموعة الأولى مركبة من 200 قطعة والثانية من 400، الثالثة من 300 والأخيرة من 100قطعة.

نسبة القطع الفاسدة في كل مجموعة هي على التوالي:5%، 5%، 5% و 10%.

ضاعت هوية المجموعات واختلطت القطع، تم سحب قطعة (بصفة عشوائية) ولاحظنا أنها فاسدة.

-ما هو الاحتمال كي تنتمي هذه القطعة إلى المجموعة الثالثة؟

حل التمرين05:

الطريقة(1): تطبيق القانون

$$\mathbf{0,27} = \frac{15}{55} = \frac{\text{الحالات المقبولة}}{\text{الجالات الممكنة}}$$

الطريقة (2):

A: القطعة المسحوبة فاسدة.

L_1:القطعة المسحوبة من المجموعة الأولى.

L_2: القطعة المسحوبة من المجموعة الثانية.

L_3: القطعة المسحوب من المجموعة الثالثة.

L_4: القطعة المسحوب من المجموعة الرابعة.

$$P(L_3/A) = \frac{P(L_3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/L_3)\,P(L_3)}{P(A)}$$

لدينا:

$$P(A/L_1) = 0{,}05 = P(A/L_2) = P(A/L_3)$$

$$P(A/L_4) = 0{,}1 \text{ et } P(A) = {}^{55}/_{1000}$$

$$P(L_1 \cap A) = P(A/L_1)\,P(L_1)$$

$$P(A) = P(A \cap L_1) + P(A \cap L_2) + P(A \cap L_3) + P(A \cap L_4)$$

$$= P(A/L_1)\,P(L_1) + P(A/L_2)\,P(L_2) + P(A/L_3)\,P(L_3) + P(A/L_4)\,P(L_4)$$

$$= 0{,}05.\frac{200}{1000} + 0{,}05.\frac{400}{1000} + 0{,}05.\frac{300}{1000} + 0{,}1.\frac{100}{1000}$$

ومنه:

$$P(L_3/A) = \frac{0{,}05.\frac{300}{1000}}{0{,}055} = \frac{15}{55} = \mathbf{0,27}$$

التمرين 06:

تشتري مؤسسة كهرباء نوعا من المحوّلات (transistor) من ثلاثة موردين A، B و C؛ بحيث يقوم المورد A بتمويلها ب 60% من مشترياتها؛ المورد B ب30% والباقي من المورد C. عمليات الرقابة التي أجرتها المؤسسة أظهرت أن 2% من المحوّلات الكهربائية المشتراة من المورد A فاسدة في حين أن نسبة الفائدة الخاصة بالموردين B و C هي على التوالي: 5% و6%.

تختار مصالح مراقبة جودة محوّلا كهربائيا بصفة عشوائية من مخزن المؤسسة:

1- ما احتمال أن يكون فاسدا؟ ما احتمال أن لا يكون فاسدا؟

2- إذا تبين أنه غير فاسد، أحسب على الترتيب احتمال أن يكون قد تمّ شراؤه من المورد A، من المورد B، من المورد C.

حل التمرين 06:

تعتبر الحوادث التالية:

A: " المحوّل الكهربائي تمّ شراؤه من المورد A" $P(A) = 0{,}6$

B: " المحول الكهربائي تم شراؤه من المورد B" $P(B) = 0{,}3$

C: " المحول الكهربائي تم شراؤه من المورد C" $P(C) = 0{,}1$

D: " المحول الكهربائي فاسد"

$$P(D/A) = 0{,}02 \Rightarrow P(\bar{D}/A) = 0{,}98$$

$$P(D/B) = 0{,}05 \Rightarrow P(\bar{D}/B) = 0{,}95$$

$$P(D/C) = 0{,}06 \Rightarrow P(\bar{D}/C) = 0{,}94$$

1) احتمال أن يكون المحوّل الكهربائي المختار فاسد:

$P(D) = ?$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$= P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)\,P(C)$$

$$= (0{,}02)(0{,}6) + (0{,}05)(0{,}3) + (0{,}06)(0{,}1)$$

$$= 0{,}033$$

$$\Rightarrow P(\bar{D}) = 1 - 0{,}033 = \mathbf{0,967}$$

2) حساب الاحتمالات علماً أن المحول غير فاسد:

$$P(A/\bar{D}) = \frac{P(\bar{D}/A)\,P(A)}{P(\bar{D})} = \frac{(0{,}98)(0{,}6)}{0{,}967} = \mathbf{0,6080}$$

$$P(B/\bar{D}) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}/B)\,P(B)}{P(\bar{D})} = \frac{(0{,}95)(0{,}3)}{0{,}967} = \mathbf{0,2947}$$

$$P(C/\bar{D}) = \frac{P(C \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(\bar{D}/C)\,P(C)}{P(\bar{D})} = \frac{(0{,}94)(0{,}1)}{0{,}967} = \mathbf{0,0967}$$

التمرين 07:

لدينا 10 قرع متشابهة، 9 منها تحتوي على كرتين سوداوتين وكرتين بيضاوتين، أما القرعة العاشرة تحتوي على 5 كرات بيضاء وواحدة سوداء.

1- نختار بصفة عشوائية قرعة ثم نسحب كرة من هذه القرعة، الكرة المسحوب من لون أبيض، ما هو الاحتمال أن تأتي من القرعة العاشرة؟

2- نفرغ محتوى العشر قرع في قرعة واحدة، ثم نسحب كرة واحدة فنلاحظ أنها بيضاء؛ ما هو الاحتمال أن تأتي القرعة العاشرة؟

حل التمرين 07:

A: حادث الوقوع في القرعة العاشرة؛

B: حادث الوقوع في كرة بيضاء.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A).P(A)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) = {}^{5}/_{6}.{}^{1}/_{10} = \mathbf{0,08}$$

فقط إذا كانت جميع القرع متساوية $\leftarrow P(B) = \frac{23}{42} = 0{,}54$

هنا:

$$P(B) = \frac{2}{4}.\frac{1}{10} + \frac{2}{4}.\frac{1}{10} + .. + \frac{2}{4}.\frac{1}{10} + \frac{5}{6}.\frac{1}{10} = 0{,}53$$

$$P(A/B) = \frac{\frac{5}{10}.\frac{1}{10}}{0{,}53} = \mathbf{0,157}$$

10 قرع: 9 بها 2BN et 2BB

العاشرة 1BN et 5BB

1- ليكن B: الكرة المسحوبة بيضاء؛

V_i: الكرة المسحوب من القرعةi

$$P(V_{10}/B) = ?$$

$$P(V_i) = \frac{1}{10} pour\ i = 1 \dots 10$$

$$P(V_{10}/B) = \frac{P(B/V_{10}).P(V_{10})}{P(B)}$$

$$P(B/V_i) = 2/4\ pour\ i = 1, \dots, 9$$

$$P(B/V_{10}) = {}^{5}/_{6}$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{10} P(B \cap V_i) = \sum_{i=1}^{10} P(B/V_i)\, P(V_i)$$

$$= 9.{}^{2}/_{4}.{}^{1}/_{10} + {}^{5}/_{6}.{}^{1}/_{10} = 0{,}533$$

$\boldsymbol{P(B/V_{10}) = {}^{5}/_{6}}$ et $\boldsymbol{P(B) = 0{,}533}$ *donc*:

$$P(V_{10}/B) = \frac{{}^{5}/_{6}.{}^{1}/_{10}}{0{,}533} = \mathbf{0{,}157}$$

2- $P(V_{10}) = {}^{6}/_{42}$; $P(V_{10}/B) = ?$

$$P(V_{10}/B) = \frac{P(B/V_{10}).P(V_{10})}{P(B)}$$

$$P(B/V_i) = {}^{2}/_{4}\ pour\ i = 1, \dots, 9.$$

$$P(B/V_{10}) = \mathbf{{}^{5}/_{6}}$$

$$P(V_i) = {}^{4}/_{42}\ \ pour\ \ i = 1, \dots, 9$$

$$P(V_{10}) = \mathbf{{}^{6}/_{42}}$$

$$P(B) = 9.{}^{4}/_{42}\,.\,{}^{2}/_{4} + {}^{6}/_{42}.\,{}^{5}/_{6} = {}^{23}/_{42} = \mathbf{0,548}$$

$$P(V_{10}/B) = \frac{{}^{5}/_{6}\,.\,{}^{6}/_{42}}{0{,}548} = \mathbf{0,217}$$

التمرين 08:

خلال عملية صبر آراء تبيّن بأنّ هناك:

- 50% يستعملون "شريحة موبيليس"؛
- من بين الذين يستعملون "شريحة موبيليس"، هناك20% يستعملون "شريحة جيزي"؛
- من بين الذين يستعملون "شريحة جيزي"، هناك 25% يستعملون "شريحة موبيليس"؛

1- ما هي نسبة الذين يستعملون "شريحة جيزي"؟

2- ما هي نسبة الذين لا يستعملون لا "شريحة موبيليس" ولا "شريحة جيزي"؟

3- ما هي نسبة الذين يستعملون على الأقل شريحة واحدة؟

حل التمرين 08:

A: "موبيليس" $\quad P(A) = 0{,}5$

B: "جيزي" $\quad P(B/A) = 0{,}20$

$P(A/B) = 0{,}25$

1) $P(B) = ?$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Et

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Donc

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{P(B/A).P(A)}{P(A/B)}$$

$$= \frac{(0,2)(0,5)}{0,25} = 0,4 = 40\%$$

2) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = ?$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - [(0,5) + 0,4 - (0,2)(0,5)]$$

$$= 1 - [0,8]$$

$$= 0,2 = \mathbf{20}\%$$

3) $P(A \cup B) = 0,8 = 80\%$ *directement de la 2ème question*

التمرين09:

ليكن Ω فضاء عينة وA، B، C ثلاثة حوادث منΩ.

أوجد الصيغة الرياضية لكل من الحوادث:

1) لا يقع أي حادث من بين الثلاثة.

2) يقع الحادثان A و C فقط.

3) حادث فقط من بين الثلاثة يقع.

4) تقع الحوادث الثلاثة.

5) حادث على الأقل من بين الثلاثة يقع.

حل التمرين 09:

1) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

2) $A \cap \overline{B} \cap C$;

3) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$;

4) $A \cap B \cap C$;

5) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup$
$(A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

أو باستعمال الحادث العكسي:

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})} = A \cup B \cup C$$

على الأقل	لا يقع أي حادث
(1) (2) (3)	(0)
$\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})}$	$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

التمرين10:

يحتوي صندوق على (50) مصباح منها (10) فاسدة. نسحب بالصدفة (07) مصابيح.

أحسب احتمال الحصول على:

1) خمسة مصابيح صالحة.

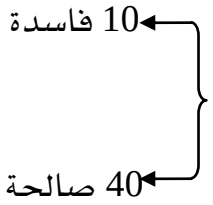
2) مصباحين صالحين على الأقل.

3) ستة مصابيح صالحة على الأكثر.

4) خمسة مصابيح فاسدة على الأكثر.

5) ثلاثة مصابيح فاسدة على الأكثر.

حل التمرين 10:



نسحب بالصدفة 07 مصابيح.

❖عدد الحالات الكلية هو C_{50}^{7}

1) A: "الحصول على 05 مصابيح صالحة".

$$P(A) = \frac{C_{40}^{5}.C_{10}^{2}}{C_{50}^{7}}$$

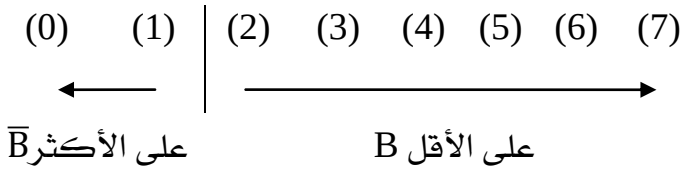
2) B: "مصباحين صالحين على الأقل"

عدد الحالات الملائمة:

$$(C_{40}^{2}.C_{10}^{5}) + (C_{40}^{3}.C_{10}^{4}) + (C_{40}^{4}.C_{10}^{3}) + (C_{40}^{5}.C_{10}^{2}) + (C_{40}^{6}.C_{10}^{1}) + (C_{40}^{7}.C_{10}^{0})$$

باستعمال الحادث العكسي:

$\bar{B}$: "الحصول على مصباح صالح على الأكثر"



$$P(\bar{B}) = \frac{C_{40}^{1}.C_{10}^{6} + C_{40}^{0}.C_{10}^{7}}{C_{50}^{7}}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

3) C: "الحصول على (06) مصابيح صالحة على الأكثر".

ط1: عدد الحالات الملائمة:

$$(C_{40}^{0}.C_{10}^{7}) + (C_{40}^{1}.C_{10}^{6}) + (C_{40}^{2}.C_{10}^{5}) + (C_{40}^{3}.C_{10}^{4}) + (C_{40}^{4}.C_{10}^{3}) + (C_{40}^{5}.C_{10}^{2}) + (C_{40}^{6}.C_{10}^{1})$$

$$P(C) = \frac{C_{40}^{6}.C_{10}^{1} + \cdots . + C_{40}^{0}.C_{10}^{7}}{C_{50}^{7}}$$

ط2: الحادث العكسي:

$\bar{C}$: "الحصول على (07) مصابيح صالحة على الأقل".

عدد الحالات الملائمة:

$$(C_{40}^{7}.C_{10}^{0})$$

$$P(\bar{C}) = \frac{C_{40}^{7}.C_{10}^{0}}{C_{50}^{7}}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$

4) D: "الحصول على (05) مصابيح فاسدة على الأكثر".

ط1: عدد الحالات الملائمة:

$$(C_{10}^{5}.C_{40}^{2}) + (C_{10}^{4}.C_{40}^{3}) + (C_{10}^{3}.C_{40}^{4}) + (C_{10}^{2}.C_{40}^{5}) + (C_{10}^{1}.C_{40}^{6}) + (C_{10}^{0}.C_{40}^{7})$$

$$P(D) = \frac{C_{10}^{5}.C_{40}^{2} + \cdots . + C_{10}^{0}.C_{40}^{7}}{C_{50}^{7}}$$

ط2: الحادث العكسي:

$\bar{D}$: "الحصول على (06) مصابيح فاسدة على الأقل".

عدد الحالات الملائمة:

$$(C_{10}^{6}.C_{40}^{1}) + (C_{10}^{7}.C_{40}^{0})$$

$$P(\overline{D}) = \frac{C_{10}^{6}.C_{40}^{1} + C_{10}^{7}.C_{40}^{0}}{C_{50}^{7}}$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D})$$

5) E: "الحصول على 03 مصابيح فاسدة على الأكثر"

عدد الحالات الملائمة:

$$(C_{10}^{3}.C_{40}^{4}) + (C_{10}^{2}.C_{40}^{5}) + (C_{10}^{1}.C_{40}^{6}) + (C_{10}^{0}.C_{40}^{7})$$

$$P(E) = \frac{C_{10}^{3}.C_{40}^{4} + \cdots + C_{10}^{0}.C_{40}^{7}}{C_{50}^{7}}$$

التمرين 11:

لكتابة كلمة سر، نختار (07) أحرف مختلفة بالصدفة من بين (26) حرف. أحسب احتمالات الحوادث الآتية:

A: "كلمة السر تحتوي على الحرف a".

B: "كلمة السر لا تحتوي على الحرفين a,b".

C: "الأحرف a,b,c هي الأحرف الأولى في كلمة السر وتأتي متتابعة بهذا الشكل".

D: "الأحرف a,b,c تظهر متتالية في كلية السر".

E: "الحرف b يظهر مرتين على الأقل في كلمة السر".

حل التمرين 11:

عدد الحالات الكلية:

$$A_{26}^{7} = \frac{26!}{19!} \quad \text{(كتابة مختلفة)}$$

A: "كلمة السر تحتوي على الحرف a".

الحالات الملائمة: car ← $7 \times (A_1^1 . A_{25}^6)$

ممكن الحرف a يظهر في أي مكان من 7 مواضع ولهذا نضرب في 7. إذن:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{7.A_{25}^{6}}{A_{26}^{7}}$$

B: "كلمة السر لا تحتوي على الحرفين a ,b"

الحالات الملائمة: A_{24}^{7} a, ~~b~~, ~~c~~, … ,z

$$\mathrm{P(B)} = \frac{A_{24}^{7}}{A_{26}^{7}}$$

C: "الأحرف a ,b,c هي الأحرف الأولى في كلمة السر وتأتي متتابعة"

الحالات الملائمة: A_{23}^{4} a, b, c, … ,

$$\mathrm{P}(C) = \frac{A_{23}^{4}}{A_{26}^{7}}$$

D: "الأحرف a, b ,c تظهر متتالية في كلمة السر"

1	2	3	4	5	6	7	
a	b	c					5
ou	a	b	c				حالات
	ou	a	b	c			

ou a b c

ou a b c

1	2	3	$P_3 = 3!$
a	b	c	
b	c	a	
c	.	.	
.	.	.	
.	.	.	

الحالات الملائمة إذن هي: $3! \times 5 \times A_{23}^{4}$

و بالتالي:

$$P(D) = \frac{3! \times 5 \times A_{23}^{4}}{A_{26}^{7}}$$

E: "الحرف b يظهر مرتين على الأقل"

P(E) = 0 لأن الأحرف مختلفة.

التمرين 12:

أرقام الخطوط الهاتفية في مدينة معينة تشكل من (08) ارقام (مختارة من بين 0). بحيث يمكن لكل رقم الظهور أكثر من مرة واحدة في رقم الخط. نختار بالصدفة رقم خط هاتفي في المدينة. أحسب احتمال:

1) الرقم 8 يظهر (05) مرات وتكون كلها على يسار رقم الخط.

2) الأرقام الثمانية مختلفة مثنى مثنى في رقم الخط.

3) الرقم 4 يظهر مرتين على الأقل في رقم الخط.

4) الرقم 2 يظهر (03) مرات والرقم 5 يظهر مرتين والرقم 6 يظهر (03) مرات في رقم الخط.

حل التمرين 12:

8 أرقام من 10 بالتكرار

عدد الحالات الكلية: $\tilde{\mathcal{A}}_{10}^{8} = 10^{8}$

A: "الرقم 8 يظهر (05) مرات كلها على اليسار"

8	8	8	8	8	.	.	.

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\tilde{\mathcal{A}}_{9}^{3}}{\tilde{\mathcal{A}}_{10}^{8}} = \frac{9^{3}}{10^{8}}$$

B: "الأرقام الثمانية مختلفة مثنى مثنى"

رقمين مختلفين يعني كل اختيار 2 من 8 مختلفين.

$$P(B) = \frac{\mathcal{A}_{10}^{8}}{\tilde{\mathcal{A}}_{10}^{8}} = \frac{\frac{10!}{2!}}{10^{8}}$$

C: "الرقم 4 يظهر مرتين على الأقل"

(0) (1) | (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)

1على الأكثر — 2على الأقل

$\bar{C}$ — C

$\bar{C}$: "الرقم 4 يظهر مرة واحدة على الأكثر"

$$P(\bar{C}) = \frac{8\,(\tilde{\mathcal{A}}_9^7) + \tilde{\mathcal{A}}_9^8}{\tilde{\mathcal{A}}_{10}^8}$$

Donc :

$$P(C) = 1 - \frac{8(9^7) + 9^8}{10^8}$$

D: "الرقم 2 ثلاث مرات و5 مرتان و6 ثلاث مرات"

الرقم	2	5	6
	↓	↓	↓
(= 8)	3	2	3

تبديلة بالتكرار أي:

ترتيبة لـ8 عناصر مقسمة إلى 3 فئات عدد عناصرها $n_3 = 3$ $n_2 = 2$ $n_1 = 3$

n=8

$$P(\mathrm{D}) = \frac{\widetilde{\mathrm{P}}_8}{\tilde{\mathcal{A}}_{10}^8} = \frac{\frac{8!}{3!\,2!\,3!}}{10^8}$$

التمرين 13:

يريد مجلس إدارة مؤسسة معينة اختيار عشوائيا (04) أشخاص من بين (15) مترشحا ($C_1, C_2, \ldots C_{15}$) لتكوين لجنة مشكلة من رئيس، نائب الرئيس، أمين الصندوق وسكرتير. أحسب احتمالات الحوادث:

A: "C_1 هو رئيس اللجنة".

B: "C_1 هو عضو اللجنة".

C: "C_8, C_4, C_2 لا ينتمون للجنة".

D: "C_{14}, C_{10}, C_8, C_2 هم أعضاء اللجنة".

E: "C_2 رئيس اللجنة، C_8 نائب الرئيس، C_{10} أمين الصندوق، C_{14} سكرتير".

حل التمرين 13:

عدد الحالات الكلية:

$$A_{15}^4 = \frac{15!}{11!}$$

A: "C1 هو رئيس اللجنة": $P(A) = \frac{A_1^1 . A_{14}^3}{A_{15}^4} = \frac{A_{14}^3}{A_{15}^4}$

B: "C_1 هو عضو اللجنة": $P(B) = \frac{4.(A_{14}^3)}{A_{15}^4}$

C: "C_2 , C_4 , C_8 لا ينتمون للجنة" $P(C) = \frac{A_{12}^4}{A_{15}^4}$

D: "C_{14}, C_{10}, C_8, C_2 هم أعضاء اللجنة": $P(D) = \frac{P_4}{A_{15}^4} = \frac{4!}{\frac{15!}{11!}}$

E: "C_2 رئيس، C_8 نائب، C_{10} أمين، C_{14} سكرتير": $P(E) = \frac{1}{A_{15}^4}$

التمرين14:

ليكن Ω فضاء عينة و A، B حادثان من Ω.

1) بين أن: $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

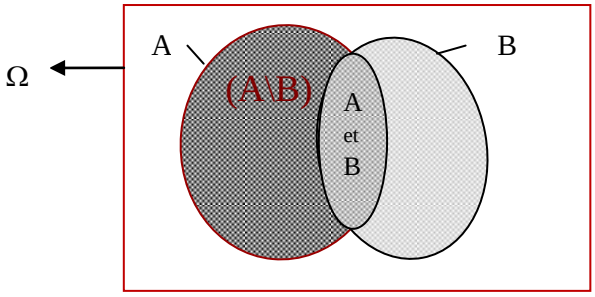
2) نفرض أن: $P(A) = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{3}{5}$; $P(A \cap \overline{B}) = \frac{4}{15}$

أ- أحسب $P(A \cup B)$.

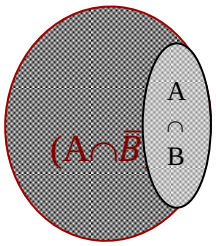
ب- هل A و B مستقلان؟

حل التمرين 14:

Ω فضاء عينة وA وB حدثان من Ω.



1) بين أن $P(A\backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$



لدينا:

$$P(A) = P(A \cap \Omega)$$

$$P(A) = P[A \cap (B \cup \overline{B})]$$

$$P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})]$$

وحيث أن الحدثان $A \cap \overline{B}$ و$A \cap B$ متنافيان:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$\Longrightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\Longrightarrow P(A\backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

2) $P(A) = 2/3$ $\quad P(B) = 3/5$ $\quad P(A \cap \overline{B}) = 4/15$

أ- أحسب $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A/B)$$

من العلاقة (1): $P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \mathbf{\frac{2}{5}}$

إذن

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \mathbf{\frac{13}{15}}$$

?

ب- هل A و B مستقلان؟ $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$$

ومنه A و B مستقلان.

التمرين 15:

آلة معينة تتضمن عنصرين إلكترونيين وتتوقف عن العمل إذا توقف العنصران معا عن العمل. احتمال توقف العنصر الأول قبل عام هو (0,4) واحتمال توقف العنصر الثاني قبل عام هو (0,6). العنصران يشتغلان مستقلين عن بعضهما البعض.

أحسب احتمال بقاء الآلة تشتغل أكثر من عام.

حل التمرين 15:

$\overline{A}$: توقف العنصر الأول عن العمل قبل عام. $P(\overline{A}) = 0,4$

$\overline{B}$: توقف العنصر الثاني عن العمل قبل عام. $P(\overline{B}) = 0,6$

A: بقاء العنصر الأول يشتغل أكثر من عام. $P(A) = 0,6$

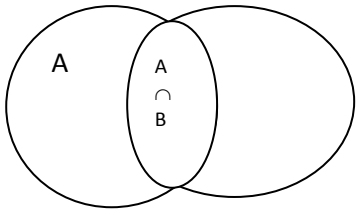
B: بقاء العنصر الثاني يشتغل أكثر من عام. $P(B) = 0,4$

الاستقلالية: $\leftarrow$ $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

الآلة تتوقف عن العمل بتوقف العنصران معاً.

-حساب احتمال بقاء الآلة تشتغل أكثر من عام

الآلة تشتغل ببقاء أحد العنصرين على الأقل يشتغل أي:



$$A \cup B \cup (A \cap B) = A \cup B$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

$$= 0{,}6 + 0{,}4 - (0{,}6)(0{,}4) = \mathbf{0,76}$$

طريقة(2):

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B})$$

$$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$= 1 - P(\bar{A}).P(\bar{B})$$

$$= 1 - (0{,}4)(0{,}6 = \mathbf{0,76}$$

التمرين 16:

أجريت عميلة صبر آراء في مدينة معينة حول اقتراحين، يتعلق الأول بتسديد القروض والثاني بصيغة لبيع السكنات. كانت نسبة الموافقين على الاقتراح الأول (60%) ونسبة الموافقين على الاقتراح الثاني(45%). من بين الموافقين على الاقتراح الأول، (70%) وافقوا على الاقتراح الثاني.

1) ما هي نسبة الموافقين على اقتراح واحد على الأقل من بين الاثنين؟

2) من بين الموافقين على الاقتراح الثاني، ما هي نسبة الموافقين على الاقتراح الأول؟.

حل تمرين 16:

$$P(A) = 0,6 \qquad P(B) = 0,45 \qquad P(B/A) = 0,7$$

1- نسبة الموافقين على اقتراح واحد على الأقل من بين الإثنين:

$$A \cup B \cup (A \cap B) = A \cup B$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B/A).P(A)$$

$$\Longrightarrow P(A \cap B) = (0,7).(0,6) = \mathbf{0,42}$$

$$P(A \cup B) = 0,6 + 0,45 - 0,42 = \mathbf{0,63}$$

2- نسبة الموافقين على الاقتراح الأول من بين الموافقين على الاقتراح الثاني:

$$P(A/B) = ?$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A).P(A)}{P(B)} = \frac{0,42}{0,45}$$

التمرين 17:

يتميز منتوج مصنع بثلاثة عيوب على الأكثر، (a), (b), (c).

- (35%) من المنتوج يتميز بالعيب(a).
- (10%) من المنتوج يتميز بالعيب (b).
- (25%) من المنتوج يتميز بالعيب (c).
- (10%) من المنتوج يتميز بالعيب (c) ولا يتميز بالعيب (a).
- من بين المنتوج الذي يتميز بالعيب (b)، (20%) لا يتيز بالعيب (c).
- من بين المنتوج الذي يتميز بالعيب (b)، (10%) لا يتميز بالعيب (a) ولا بالعيب (c)
- نسبة المنتوج الذي يتميز بالعيب (a) و(b) و (c) هي (3%).

I) نختار بالصدفة قطعة من منتوج المصنع أحسب احتمال:

1) أن تتميز القطعة بالعيبين (b) و (c).

2) أن تتميز القطعة بالعيبين (b) و(c) فقط.

3) أن تتميز القطعة بالعيبين (a) و(c) فقط.

4) أن تتميز القطعة بالعيبين (b) و (a) فقط.

II) باستعمال الاحتمالات السابقة، أرسم مخططا يلخص النسب الواردة في المعطيات.

حل التمرين 17:

$P(a) = 0{,}35$	$P(\bar{c}/b) = 0{,}2$
$P(b) = 0{,}1$	$P(\bar{a} \cap \bar{c}/b) = 0{,}1$
$P(c) = 0{,}25$	$P(a \cap b \cap c) = 0{,}03$
$P(c \cap \bar{a}) = 0{,}1$ on peut écrire aussi :	
$P(c\backslash a) = 0{,}1$	

I) نختار قطعة بالصدفة:

1) احتمال أن تتميز القطعة بالعيبين (b) و(c)

$$P(b \cap c) = P(c/b).P(b)$$
$$= [1 - P(\bar{c}/b)].P(b)$$
$$= (1 - 0{,}2)(0{,}1) = \mathbf{0,08}$$

2) احتمال أن تتميز القطعة بالعيبين (b) و(c) فقط:

$$P(b \cap c \cap \bar{a}) = P(b \cap c/a) = P(b \cap c) - P(b \cap c \cap a)$$
$$= 0{,}08 - 0{,}03 = \mathbf{0,05}$$

3) احتمال أن تتميز القطعة بالعيبين (a) و(c) فقط:

$$P(a \cap c \cap \bar{b}) = P(a \cap c) - P(a \cap c \cap b)$$

$P(a \cap c) = ?$

$P(c \cap \bar{a}) = P(c) - P(a \cap c) \Longrightarrow P(a \cap c) = P(c) - P(c \cap \bar{a})$

$\Longrightarrow P(a \cap c) = 0{,}25 - 0{,}1 = 0{,}15$

$P(a \cap c \cap \bar{b}) = 0{,}15 - 0{,}03 = 0{,}12$

4) احتمال أن تتميز القطعة بالعيبين (b) و(a) فقط:

$P(a \cap b \cap \bar{c}) = P(a \cap b) - P(a \cap b \cap c)$

$P(a \cap b) = ?$

nous avons:

$P(\bar{a} \cap \bar{c}/b) = P(\overline{a \cup c}/b) = 1 - P(a \cup c/b) = 0{,}1$

$\Longrightarrow P(a \cup c/b) = 0{,}9$

$\Longrightarrow P(a/b) + P(c/b) - P(a \cap c/b) = 0{,}9$

$\Longrightarrow \frac{P(a \cap b)}{P(b)} + \frac{P(c \cap b)}{P(b)} - \frac{P(a \cap c \cap b)}{P(b)} = 0{,}9$

$\Longrightarrow P(a \cap b) + P(c \cap b) - P(a \cap c \cap b) = 0{,}09$

$\Longrightarrow P(a \cap b) = 0{,}09 - P(c \cap b) + P(a \cap c \cap b)$

$= 0{,}09 - 0{,}08 + 0{,}03$

$= \mathbf{0,04}$

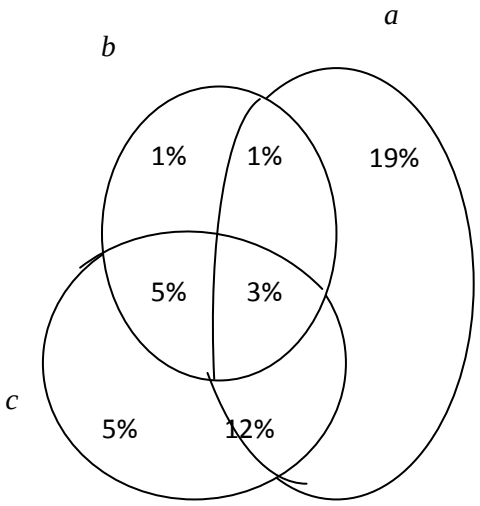
Donc :

$P(a \cap b \cap \bar{c}) = P(a \cap b) - P(a \cap b \cap c)$

$= 0{,}04 - 0{,}03$

$= \mathbf{0,01}$

II- مخطط النسب:



$$\begin{vmatrix} P(b \cap c) = 8\% \\ P(a \cap c) = 15\% \\ P(a \cap b) = 4\% \\ P(a \cap c \cap \bar{b}) = 12\% \\ P(b \cap c \cap \bar{a}) = 5\% \\ P(a \cap b \cap \bar{c}) = 1\% \end{vmatrix}$$

التمرين 18:

نرمي زهرة نرد بالصدفة (03) مرات في الهواء ونعتبر الحوادث.

A: "مجموع الأرقام المحصل عليها هو 17".

B: "نحصل على ثلاثة أرقام زوجية".

C: "نحصل على الرقم 2 أو 4 من خلال الرمية الأولى".

أدرس استقلال هذه الحوادث مثنى مثنى.

حل التمرين 18:

A: "مجموع الأرقام المحصل عليها هو 17"

B: "نحصل على ثلاثة أرقام زوجية"

C: "نحصل على الرقم 2 أو 4 من خلال الرمية الأولى"

عدد الحالات الكلية: $\tilde{A}_6^3 = 6^3$

- بالنسبة للحادث A: عدد الحالات الملائمة هو:

$$A = \{\overbrace{(6,6,5); (6,5,6); (5,6,6)}^{3cas}\}$$

إذن:

$$P(A) = \frac{3}{6^3}$$

- بالنسبة لـ B: "عدد الحالات الملائمة:

الأرقام الزوجية هي: $\{2,4,6\}$

$$\tilde{\mathcal{A}}_3^1.\tilde{\mathcal{A}}_3^1.\tilde{\mathcal{A}}_3^1 = \tilde{\mathcal{A}}_3^3 = 3^3 \quad \Rightarrow : P(B) = \frac{3^3}{6^3}$$

- بالنسبة لـC: "عدد الحالات الملائمة:

$$2[\tilde{\mathcal{A}}_6^1.\tilde{\mathcal{A}}_6^1] = 2\tilde{\mathcal{A}}_6^2 = 2(6^2) \Rightarrow P(C) = \frac{2(6^2)}{6^3} = \frac{1}{3}$$

- دراسة استقلالية A، B و C مثنى مثنى:

A et B : A et B indépendant $\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$

A وB $\Leftarrow$ الحصول على 3 أرقام زوجية مجموعها هو 17:

$$\left.\begin{array}{c} P(A \cap B) = 0 \\ P(A).P(B) = \frac{3}{6^3}.\frac{3^3}{6^3} \end{array}\right| \Longrightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

إذن A و B غير مستقلان.

?

A et C : $P(A \cap C) = P(A).P(C)$

$(A \cap C) = \emptyset \Longrightarrow P(A \cap C) \neq P(A).P(C)$

إذن A و C غير مستقلان.

A وC $\Leftarrow$ الحصول على الرقم 2 أو 4 في الرمية الأولى ومجموع الأرقام يساوي 17:

B وC الرقم 2 أو 4 من خلال الرمية الأولى والأرقام كلها زوجية.

B et C :

$$\left.\begin{array}{l} P(B \cap C) = \frac{\tilde{A}_1^1.\tilde{A}_3^2+\tilde{A}_1^1.\tilde{A}_3^2}{6^3} = \frac{2(3^2)}{6^3} \\ P(B).P(C) = \frac{3^3}{6^3}.\frac{1}{3} \end{array}\right| \Longrightarrow P(B \cap C) \neq P(B).P(C)$$

إذن B و C غير مستقلان.

التمرين 19:

(30%) من سكان مدينة معينة قاموا بإجراء تطعيم ضدّ مرض موسمي (M). كانت نسبة الذين أصيبوا بالمرض (بعد انقضاء الموسم) هي (8%) من بين الذين قاموا بإجراء التطعيم و(60%) من بين الذين لم يقوموا به.

-من بين المصابين بالمرض، ما هي نسبة الذين قاموا بإجراء التطعيم؟

حل التمرين 19:

V : Vaccinés

M : Malades (Atteints de la maladie M)

$P(V) = 0{,}3 \qquad P(\overline{V}) = 0{,}7$

$P(M/V) = 0{,}08$

$P(M/\overline{V}) = 0{,}6$

$P(V/M) = ?$

$$P(V/M) = \frac{P(M/V)P(V)}{P(M/V)P(V) + P(M/\overline{V})P(\overline{V})}$$

$$P(V/M) = \frac{(0{,}08).(0{,}3)}{(0{,}08).(0{,}3) + (0{,}6)(0{,}7)} = \mathbf{0,054}$$

التمرين 20:

عدد غيابات الطلبة (يوميا) في أحد أفواج العمل الموجه متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي:

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}k$	5k	3k	2k	3k	k	$\frac{1}{2}k$

1) عين قيمة الثابت k.

2) أكتب دالة التوزيع المتجمع ومثلها بيانيا.

3) أحسب احتمال: أ- لا يقل عدد الغيابات عن (03) ب- لا يزيد عن (04)

ج -أكثر من إثنين ولا يزيد عن خمسة.

4) أحسب متوسط الغيابات اليومي في هذا الفوج.

حل التمرين 20:

X: "عدد غيابات الطلبة"

1)

$$\sum_{i=0}^{6} P(X=x_i)=1 \Leftrightarrow 15\,k=1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k=\frac{1}{15}}$$

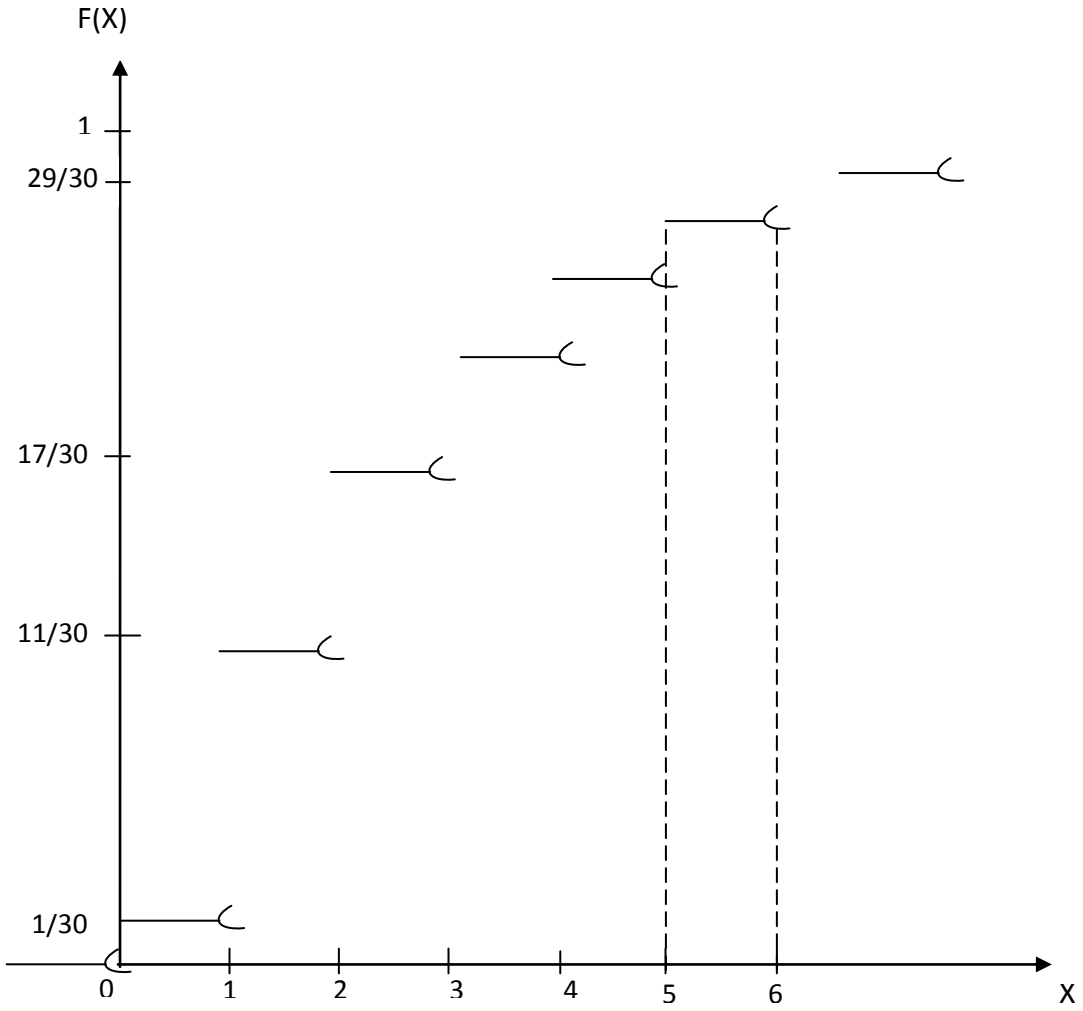
$X=x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{10}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$

2) دالة التوزيع المتجمع:

$$F(x) = P(X \le x)$$

$$= \sum_{x_i \le x} P(X=x_i)$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<0\\ \frac{1}{30} & si \quad 0\le x<1\\ \frac{1}{30}+\frac{10}{30}=\frac{11}{30} & si \quad 1\le x<2\\ \frac{17}{30} & si \quad 2\le x<3\\ \frac{21}{30} & si \quad 3\le x<4\\ \frac{27}{30} & si \quad 4\le x<5\\ \frac{29}{30} & si \quad 5\le x<6\\ 1 & si \quad 6\le x\end{cases}$$



3) أ) X لا يقل عن 3:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2)$$

$$= 1 - \frac{17}{30} = \mathbf{\frac{13}{30}}$$

ب) X لا يزيد عن 4:

$$P(X \leq 4) = F(4) =$$

$$= 1 - P(X > 4) = 1 - [P(X = 5) + P(X = 6)] = \mathbf{\frac{27}{30}}$$

ج -أكثر من إثنين ولا يزيد عن خمسة.

$$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \mathbf{\frac{12}{30}}$$

4) متوسط الغيابات:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{6} x_i P(X = x_i)$$

$$= (0)\left(\frac{1}{30}\right) + (1)\left(\frac{10}{30}\right) + (2)\left(\frac{6}{30}\right) + \cdots (6)\left(\frac{1}{30}\right) = \frac{74}{30} = 2{,}46 \simeq \mathbf{2}$$

التمرين 21:

مدة صلاحية جهاز معين (بالسنوات) متغير عشوائي X، كثافة احتماله:

$$f(x) = k\, e^{-\frac{x}{2}} \quad ; x \geq 0.$$

1) عين قيمة الثابت k.

2) أحسب احتمال ألا تفوق مدّة صلاحية الجهاز (03) سنوات.

3) أحسب احتمال أن تفوق مدة صلاحية الجهاز (07) سنوات.

4) أحسب احتمال أن تفوق مدّة صلاحية جهاز واحد على الأقل من بين (05) أجهزة من هذا النوع (03) سنوات.

5) أحسب المدة المتوسطة لصلاحية هذا الجهاز ثم التباين.

6) أكتب دالة التوزيع المتجمع.

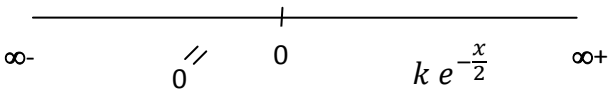
حل التمرين 21:

X: مدة صلاحية الجهاز بالسنوات:

$$f(x) = k\, e^{-\frac{x}{2}} \quad ; x \geq 0.$$

1- تعيين k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$



$$(1) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} k\, e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k.(-2) \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -2k \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow -2k(0-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k = 1$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}} \quad ; x \geq 0}$$

2) X لا تفوق 3 سنوات:

$$\mathrm{P(X \leq 3)} = \int_{-\infty}^{3} f(x)\ dx = \int_{0}^{3} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$(X \leq 3 \implies x \in]-\infty, 3])$

$$\mathrm{P(X \leq 3)} = \int_{0}^{3} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= -\int_{0}^{3} -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= -\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_{0}^{3} = -(e^{-\frac{3}{2}} - 1)$$

$$\boldsymbol{\mathrm{P(X \leq 3)} = 1 - e^{-\frac{3}{2}}}$$

3) X تفوق 7 سنوات:

$$\mathrm{P(X > 7)} = \int_{7}^{+\infty} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}} dx = -\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_{7}^{+\infty} = -\left(0 - e^{-\frac{7}{2}}\right)$$

$$\mathrm{P(X > 7)} = \mathrm{P(X \geq 7)}$$

$$\boldsymbol{\mathrm{P(X > 7)} = e^{-\frac{7}{2}}}$$

4) A: "مدة صلاحية جهاز واحد على الأقل من بين (5) أجهزة تفوق 3سنوات"

$\overline{A}$	A				
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
←	→				
ولا جهاز يفوق 3 سنوات	1على الأقل يفوق 3 سنوات				

$$P(A) = 5\,P(X > 3)[P(X \leq 3)]^4$$
$$+ C_5^2 P(X > 3)^2[P(X \leq 3)]^3$$
$$+ P(X \geq 3)^5$$

$\overline{A}$: ولا جهاز يفوق 3 سنوات.

$\overline{A}_1$: جهاز (1) لا يفوق 3 سنوات.

$\overline{A}_2$: جهاز (2) لا يفوق 3 سنوات.

.

.

$\overline{A}_5$: جهاز (5) لا يفوق 3 سنوات.

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots\dots \cap \overline{A}_5) = P(\overline{A}_1).P(\overline{A}_2).\ \dots P(\overline{A}_5)$$

$$P(\overline{A}_1) = P(X \leq 3) = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$$

$$P(\overline{A}) = \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right)^5 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

5) المدة المتوسطة

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$
$$= \int_0^{+\infty} x\ \left(\frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$U = x \implies \acute{U} = 1$$

$$V = -\,e^{-\frac{x}{2}} \implies \acute{V} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$E(X) = [UV] - \int \acute{U}V$$

$$= \left[-x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= \quad 0 \quad - \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= (-2)\int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$= -2\left[\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} = -2(0-1) = 2$$

$$\mathbf{E(X) = 2}$$

-التباين

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - (\mathrm{E(X)})^2$$

$$\mathrm{E(X^2)} = \int_0^{+\infty} x^2 \left(\frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$\mathrm{U} = x^2 \implies \acute{\mathrm{U}} = 2x$$

$$\mathrm{V} = -\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \implies \acute{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

$$\mathrm{E(X^2)} = \left[-x^2\ e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x\ e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$\mathrm{E(X^2)} = 0 + 2\int_0^{+\infty} x\ e^{-\frac{x}{2}}dx$$

$$\left(\mathrm{E(X)} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\ e^{-\frac{x}{2}}dx \implies \int_0^{+\infty} x\ e^{-\frac{x}{2}}dx = 4\right)$$

$$\mathbf{E(X^2) = 8}$$

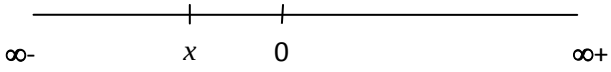
$$V(X) = 8 - (2)^2 = 4$$

$$\boldsymbol{V(X) = 4}$$

6) دالة التوزيع في المجتمع:

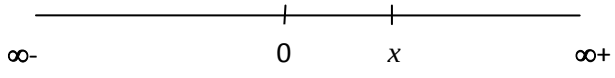
$$F(x) = P(X \leq x) \qquad ((X \leq x) \Rightarrow X \in]-\infty, x]$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$



$x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$



$x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

$$= -\left[e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x = -\left(e^{-\frac{x}{2}} - 1\right) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 22:

قدرت نسبة المنتوجات التي ظهر بها العيب A لمنتوج ما بنسبة 25%، أمّا المنتوجات التي ظهر بها العيب B قدّرت بنسبة 10% ، كما أن هناك نسبة 68% من المنتوجات لم يظهر بها لا العيب A ولا العيب B. نختار بالصدفة منتوج، ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد العيوب التي يمكن أن تظهر بهذا المنتوج.

1- أوجد قيم المتغير العشوائي X، واستنتج جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

2- أحسب E(X)، V(X). هل الحادثان A وB مستقلان؟

حل التمرين 22:

A: "العيب A" $P(A) = 0,25 \Longrightarrow P(\bar{A}) = 0,75$

B: "العيب B" $P(B) = 0,1 \Longrightarrow P(\bar{B}) = 0,9$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,68$

1) X: "عدد العيوب التي يمكن أن تظهر على المنتوج"

$X \in \{0,1,2\}$

$P(X = 0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,68$

$P(X = 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 2)] = 1[0,68 + 0,03] = \mathbf{0,29}$

بعد حساب P(X=2) أولا

$P(X = 2) = P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$

$= 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})]$

$= 1 - [0,75 + 0,9 - 0,68] = \mathbf{0,03}$

جدول التوزيع الاحتمالي:

$X=x_i$	0	1	2	$\sum$
$P(X=x_i)$	0,68	0,29	0,03	1

2) التوقع والتباين:

$E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$

$= (0)(0,68) + (1)(0,29) + (2)(0,03)$

$= \mathbf{0,35}$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \sum x_i{}^2 \, P(X = x_i) - (0{,}35)^2$$

$$= (0)^2(0{,}68) + (1)^2(0{,}29) + (2)^2(0{,}03) - (0{,}35)^2$$

$$= 0{,}41 - (0{,}35)^2 = \mathbf{0,2875}$$

هل A وB مستقلان؟

$$P(A \cap B) \overset{?}{=} P(A).P(B)$$

$$(0{,}03) \overset{?}{=} (0{,}25)(0{,}1)$$

$$(0{,}03) \neq 0{,}025$$

إذن A وB غير مستقلان

<u>تمرين 23:</u>

توجد في مكتب (03) آلات للطباعة A، B و C

احتمال أن لا تقع الآلات A، B، C في عطب خلال يوم ما هو على الترتيب (0,7)، (0,5)، (0,9). ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الآلات (في المكتب) التي تقع في عطب في يوم ما.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي لX؟ أحسب توقعه الرياضي وتباينه.

2) نفرض أن تكلفة تصليح الآلة هي (800دج).

أحسب متوسط كلفة التصليح في يوم ما (بطريقتين)

حل التمرين 23:

X: "عدد الآلات التي تقع في العطب":

A: "تقع الآلة (A) في العطب في يوم معين". $P(\overline{A}) = 0,7$

B: "تقع الآلة (B) في العطب في يوم معين". $P(\overline{B}) = 0,5$

C: "تقع الآلة (C) في العطب في يوم معين". $P(\bar{C}) = 0,9$

$$P(X = 0) = P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A})\,P(\overline{B})\,P(\overline{C}) = (0,7)(0,5)(0,9)$$

$$P(X = 1) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$$

$$= P(A)\,P(\overline{B})\,P(\overline{C}) += P(\overline{A})\,P(B)\,P(\overline{C}) += P(\overline{A})\,P(\overline{B})\,P(C)$$

$$P(X = 2) = P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C)$$

$$P(X = 3) = P(A \cap B \cap C)$$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	.	.	.	.

$$E(X) = \sum x_i\,P(X = x_i) = 0,9$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \sum {x_i}^2\,P(X = x_i)$$

2) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يمثل تكلفة الإصلاح:

الطريقة 1:

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \ldots.$$

$$P(Y = 800) = P(X = 1) = \ldots..$$

$$P(Y = 1600) = P(X = 2) = \ldots..$$

$P(Y = 2400) = P(X = 3) = \ldots.$

التوزيع الاحتمالي لY:

$Y = y_i$	0	800	1600	2400
$P(Y = y_i)$	.	.	.	.

$$E(Y) = \sum y_i \, P(Y = y_i) = \cdots$$

الطريقة 2:

$$Y = 800X \Longrightarrow E(Y) = E(800X)$$

- $E(ax+b) = aE(X) + b$
- $E(Y) = E(800X) \Longrightarrow E(Y) = 800E(X)$

$$\Longrightarrow E(Y) = 800(0{,}9) = 720$$

التمرين 24:

تريد المصلحة التجارية لمؤسسة إعلامية تصدر جريدة أسبوعية معينة القيام بحملة إشهارية لجلب منخرطين جدد يطالعون الجريدة وذلك بتوزيع عدد من الجريدة مجانا على (10 000) شخص.

تشير التقديرات إلى أن نسبة المنخرطين الجدد (من بين الأشخاص الذين مستهم الحملة) متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي:

$f = f_i$	0,25	0,20	0,30
$P(f = f_i)$	0,20	0,30	0,50

إذا كانت تكلفة الحملة الإشهارية هي (0,40)دج للنسخة الواحدة من الجريدة والربح الصافي هو (2دج) لكل نسخة مباعة بعد الحملة فما هي الفائدة المتوقعة أسبوعيا نتيجة هذه الحملة؟

حل التمرين 24:

ليكن X المتغير الذي يمثل الفائدة. المطلوب ? =E(X)

- إذا كان : $f = f_1 = 0{,}25$ ، تكون الفائدة نتيجة الحملة:

$x_1 = (0{,}25)(10000)2 - (0{,}40)(10000)=$

- إذا كان : $f = f_2 = 0{,}20$ ، تكون الفائدة نتيجة الحملة:

$x_2= (0{,}20)\ (10000)2 - (0{,}40)(10000)=$

- إذا كان :$f = f_3 = 0{,}30$ ، تكون الفائدة نتيجة الحملة:

$x_3= (0{,}30)(10000)2 – (0{,}40)(10000) =$

وبالتالي:

$X = x_i$	1000	0	2000
$P(X = x_i)$	0,20	0,30	0,50

$$E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i) = 1200$$

التمرين 25:

يتلقى مجمع هاتفي المكالمات بمعدل مكالمتين في الدقيقة.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المكالمات التي تصل إلى المجمع في دقيقة معينة.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي لـX؟

2) أحسب احتمال:

- أن لا تصل أية مكالمة إلى هذا المجمع خلال دقيقة.
- أن تصل مكالمتان على الأقل إلى هذا المجمع خلال دقيقة.

3) أحسب احتمال أن تصل مكالمة واحدة إلى هذا المجمع خلال (03) دقائق.

حل التمرين 25:

X: عدد المكالمات التي تصل إلى المجمع في دقيقة معينة

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(2)$$

1) $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2}\ \frac{2^k}{k!}$ $\qquad k = 0,1,\dots,\infty$

2) $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = e^{-2}\ \frac{2^0}{0!} = e^{-2}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 2) = 1 - [\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1)]$$

$$= 1 - e^{-2}(1 + 2)$$

3) $\lambda = 2 \leftarrow$ د1

$\lambda' = 6 \leftarrow$ د3

Y: عدد المكالمات في (3) دقائق

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{P}\left(\lambda'\right) = \mathcal{P}(6)$$

$$\mathrm{P}(Y = 1) = e^{-6}\ \frac{6^1}{1!} = 6e^{-6}$$

تمرين 26:

يتوافد الأشخاص على مصلحة إدارية بمعدّل شخصين في الدقيقة.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المتوافدين على المصلحة كل نصف ساعة؟ ما هي قيمة توقعه وتباينه؟

2) أحسب احتمال أن:

- يتوافد على المصلحة خلال نصف ساعة شخصان على الأقل.
- يتوافد على المصلحة خلال نصف ساعة (03) أشخاص على الأكثر.

حل التمرين 26:

X: عدد المتوافدين في المصلحة خلال 30 دقيقة

- 1 د ← (2) شخصان
- 30 د ← λ =60 شخص
- $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(60)$
- $P(X = x) = e^{-60}\ \frac{60^x}{x!}$ $\quad x = 0, \dots\dots\infty$
- $E(X) = V(X) = \lambda = 60$
- 2)
  $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$
- $= 1 - e^{-60}(1 + 60)$
- $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

التمرين 27:

باعت شركة تجارية (10) سيارات من نوع معين في يوم ما.

احتمال أن تبقى سيارة من النوع السابق صالحة للاستعمال بعد (05) سنوات هو (0,7) نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات (من بين 10) التي تبقى صالحة للاستعمال بعد (05) سنوات.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي لـX؟ أحسب توقعه وتباينه.

2) أحسب احتمال:

- عدد السيارات التي تبقى صالحة الاستعمال بعد (05) سنوات هو (04).
- عدد السيارات التي تبقى صالحة الاستعمال بعد (05) سنوات هو (03) على الأقل.
- عدد السيارات التي تبقى صالحة الاستعمال بعد (05) سنوات لا يقل عن (03) ولا يزيد عن 07.

حل التمرين 27:

X: عدد السيارات التي تبقى صالحة للاستعمال

1) $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(10,\ 0{,}7)$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = C_{10}^{x}(0{,}7)^{x}(0{,}3)^{10-x} \qquad x = 0, \dots\dots, 10.$

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 10(0{,}7) = 7$

$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = npq = 10(0{,}7)(0{,}3) = 2{,}1$

2) $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 4) = C_{10}^{4}(0{,}7)^{4}(0{,}7)^{6}$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2)$$

$$\mathrm{P}(3 \leq \mathrm{X} \leq 7) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 4) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 6) + \mathrm{P}(\mathrm{X} = 7)$$

التمرين 28:

في مدينة معينة، احتمال إصابة شخص بالزكام هو (0,6) في شهر معين.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المصابين بالزكام في هذه المدينة في شهر ما من بين (50) شخص.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي لـX؟

2) ما هي القيمة المتوسطة لعدد الأشخاص المصابين بالزكام من بين(50) شخص في شهر ما؟

3) أحسب احتمال:

- لا يصاب أي شخص بالزكام.
- يصاب شخصان على الأقل بالزكام.

حل التمرين 28:

X: عدد المصابين بالزكام

1) $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(50,\ 0{,}6)$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x) = C_{50}^{x}(0{,}6)^{x}(0{,}4)^{50-x} \qquad x = 0, \dots\dots, 50.$

2) $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 50(0{,}6) = 30$

3) $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = C_{50}^{0}(0{,}6)^{0}(0{,}4)^{50} = (0{,}4)^{50}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}<2) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) - \mathrm{P}(\mathrm{X}=1).$

التمرين 29:

لاحظ تاجر أنه من بين كل (40) زبون يدخلون محله، (08) منهم يشترون.

ذات يوم دخل (70) شخص إلى محل هذا التاجر، ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المشترين خلال هذا اليوم.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي لX؟ أحسب توقعه وانحرافه المعياري.

2) أحسب احتمال:

- لا يقل عدد المشترين خلال هذا اليوم عن (04).

- لا يقل عدد المشترين خلال هذا اليوم عن (10) ولا يزيد عن (12).

حل التمرين 29 :

X: عدد المشترين

1) $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}(70, \frac{8}{40})$

$P(X = x) = C_{70}^{x}(0,2)^{x}(0,8)^{70-x}$ $\quad x = 0, \dots\dots, 70.$

2) $E(X) = np = 70(0,2) = 14$

$V(X) = npq = 70(0,2)(0,8) = 11,2$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11,2}$

3) $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$

$P(10 \leq X \leq 12) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12)$

التمرين 30:

تؤمن شركة تأمين النقل البحري (A) 70 باخرة ذات القيمة الفردية تعادل 15 مليون دينار، يقتضي العقد أن الضرر المأخوذ بعين الاعتبار يتمثل في الفقدان الكلي للباخرة، يساوي احتمال هذا الحادث (0.03) للسنة الواحدة. نفترض أن هذه الأخطار مستقلة و نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد البواخر المتضررة خلال السنة.

1- ما هو التوزيع الاحتمالي لX أحسب توقعه.

2- ما هو احتمال عدم حدوث أي ضرر؟

3- تسدّد الشركة (A) في آخر السنة من احتياطاتها قيمة أضرار السنة. تكفي هذه الاحتياطات لتسديد باخرتين على الأكثر. ما هو احتمال أن لا تحترم الشركة (A) التزاماتها؟

4- تؤمن شركة ثانية (B) 70 باخرة في نفس الشروط ولها احتياطات كافية لتسديد باخرتين. يريد مسيّرو الشركتين التلاحم بينهما لتأسيس شركة (C). هل تتحسّن هذه الشركة الجديدة وضعيتها (أحسب احتمال أن تحترم الشركة (C) التزاماتها؟

حل التمرين 30:

X: "عدد البواخر المتضررة خلال السنة"

$X \nearrow B\,(70\ ;\ 0{,}03)$

1) التوزيع الاحتمالي لX:

$$P(X = x) = C_{70}^{x}\,(0{,}03)^{x}(0{,}97)^{70-x}$$

x = 0,1,….,70

$$E(X) = np = 70(0{,}03) = 2{,}1 \approx 3$$

2) احتمال عدم حدوث أي حادث (ضرر):

$$P(X = 0) = C_{70}^{0}(0{,}03)^{0}(0{,}97)^{70} = 0{,}118$$

3) احتمال أن لا تحترم الشركة (A) التزاماتها:

$$P(X > 2) = ?$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - [0{,}118 + 0{,}256 + 0{,}273]$$

$$= 1 - (0{,}647)$$

$$= 0{,}353$$

(4

$X_A \nearrow B\,(70\ ;0{,}03)$ $\quad X_B \nearrow B\,(70\ ;0{,}03) \Longrightarrow \quad X_C = X_A + X_B \nearrow B\,(140\ ;0{,}03)$

$$P(X_C = x) = C_{140}^{x}\,(0{,}03)^{x}(0{,}97)^{140-x}$$

x = 0,1,……140

إحتمال أن تحترم هذه الشركة الجديدة إلتزاماتها يعني: $P(X_C \leq 4) = ?$

$$P(X_C \leq 4) = P(X_C = 0) + P(X_C = 1) + P\,(X_C = 2) + P(X_C = 3) + P(X_C = 4)$$

$$= 0{,}014 + 0{,}060 + 0{,}130 + 0{,}186 + 0{,}197$$

$$= 0{,}587$$

$$P(X_C > 4) = 1 - P(X_C \leq 4) = 0{,}413$$

و هو إحتمال أن لا تحترم هذه الشركة الجديدة إلتزاماتها ولا تفي بها.

التمرين 31:

من بين (20) متقدما لطلب شغل وظيفة شاغرة (15) يحملون درجة جامعية. اختير بالصدفة (08) أشخاص لإجراء مقابلة.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لإجراء المقابلة.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي لـX؟

2) أحسب E(X) و V(X).

3) أحسب احتمال :

- عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لإجراء المقابلة هو (05).
- عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لإجراء المقابلة لا يقل عن (03).
- عدد حاملي الدرجة الجامعية المختارين لإجراء المقابلة لا يزيد عن (02).

حل التمرين 31:

- X: "عدد حاملي الدرجة المختارين"

- $X \rightsquigarrow H(8,15,5)$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)=\frac{C_{15}^{k}.C_{5}^{8-k}}{C_{20}^{8}} \quad k=0,1,2,3,\ldots,8$
- $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\sum_{i=3}^{8} x_i\,\mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)$
- $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-(E(X))^2$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)$
- $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 3)=1$ أكيد
- $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 2)=0$ مستحيل

التمرين 32:

ليكن X متغير عشوائي خاضعا لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي (20) وانحرافه المعياري (04).

- أحسب:
  - $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 23)\ ;\ \mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 17)\ ;\ \mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 22)\ ;$
  - $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 15)\ ;\ \mathrm{P}(17\leq \mathrm{X}\leq 22)$

حل التمرين 32:

- $\mathrm{X} \rightsquigarrow N(20,4) \Longrightarrow \mathrm{T} \rightsquigarrow N(0,1)$
- $\mathrm{T}=\frac{\mathrm{X}-\bar{\mathrm{X}}}{\sigma} \Longrightarrow \mathrm{T}=\frac{\mathrm{X}-20}{4} \Rightarrow \mathrm{X}=4\mathrm{T}+20$
- 1) $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 23)=\ \mathrm{P}(4\mathrm{T}+20\leq 23)=\mathrm{P}\left(\mathrm{T}\leq \frac{3}{4}\right)$
- 2) $\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 17)=\ \mathrm{P}(4\mathrm{T}+20\leq 17)=\mathrm{P}\left(\mathrm{T}\leq -\frac{3}{4}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{T}\geq \frac{3}{4})$

$$=1-\mathrm{P}(\mathrm{T}\leq \frac{3}{4})$$

- 3) $P(X \geq 22) = P(4T + 20 \geq 22) = P\left(T \geq \frac{2}{4}\right) = 1 - P(T \leq 0{,}5)$
- 4) $P(X \geq 15) = P(4T + 20 \geq 15) = P\left(T \geq -\frac{5}{4}\right) = P(T \leq \frac{5}{4})$
- 5) $P(17 \leq X \leq 22) = P(17 \leq 4T + 20 \leq 22) = P\left(-\frac{3}{4} \leq T \leq \frac{2}{4}\right)$

$$= P\left(T \leq \frac{1}{2}\right) - P\left(T \leq -\frac{3}{4}\right)$$

$$= P\left(T \leq \frac{1}{2}\right) - \left[1 - P\left(T \leq -\frac{3}{4}\right)\right]$$

التمرين 33:

تخضع أوزان علب مسحوق للتنظيف تبيعه إحدى الشركات إلى توزيع طبيعي وسطه الحسابي (m) وانحرافه المعياري (σ =5 kg)

- إذا علمت أن (90%) من العلب يفوق وزنها (43,59 kgs) فما هي قيمة m؟
- أحسب نسبة الأكياس التي لا يقل وزنها عن (48kgs) ولا يزيد عن (53 kgs).

حل التمرين33 :

$X \rightsquigarrow N(m, \sigma = 5)$

1) m= ?

$P(X \geq 43{,}59) = 0{,}9 \qquad (1)$

$T = \frac{X - m}{5} \Rightarrow \mathbf{X = 5\,T + m}$

$(1) \Leftrightarrow P(5T + m \geq 43{,}59) = 0{,}9$

$$\Leftrightarrow P\left(T \geq \frac{43{,}59 - m}{5}\right) = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{43{,}59 - m}{5}\right) = 0{,}1 < 0{,}5$$

$$\alpha = 2\,P(T \leq -t_\alpha) = 2(0,1) = 0,2$$

$$\alpha = 0,2 \implies -t_\alpha = \frac{43,59 - m}{5} = -1,282$$

$$\implies m = 5(1,282) + 43,59 = 50$$

$X \rightsquigarrow N(50,5)$

2) $P(48 \leq X \leq 53) = ?$

$$P(48 \leq 5T + 50 \leq 53) = P\left(-\frac{2}{5} \leq T \leq \frac{3}{5}\right)$$

$$= P(T \leq 0,6) - P(T \leq -0,4)$$

$$= P(T \leq 0,6) - [1 - P(T \leq 0,4)]$$

$$= 0,72 - 1 + 0,65 = 0,37\ (37\%)$$

التمرين 34:

تخضع المبالغ في الحساب الجاري لدفعة من (500) طالب إلى توزيع طبيعي وسطه الحسابي(10000) وحدة نقدية وانحرافه المعياريσ.

- إذا علمت أن (12%) من طلبة الدفعة تقل مبالغهم في الحساب الجاري عن (8590) وحدة نقدية، فما قيمةσ ؟
- ما هو عدد الطلبة الذين لا تقل مبالغهم في الحساب عن (9000) ولا تزيد عن (10500) وحدة نقدية.
- ما هي قيمة أدنى مبلغ في الحساب تجعل الطالب من بين ال(20%) أصحاب أكبر المبالغ؟

حل التمرين 34:

$X \rightsquigarrow N(10000, \sigma)$

1) σ = ?

$P(X < 8590) = 0{,}12$ (1)

$$T = \frac{X - 10000}{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{X = \sigma T + 10000}$$

(1) $\Leftrightarrow P(\sigma T + 10000 < 8590) = 0{,}12$

$$\Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{-1410}{\sigma}\right) = 0{,}12$$

$\alpha = 2\,P(T \leq -t_\alpha) = 2(0{,}12) = 0{,}24$

$$-t_\alpha = \frac{-1410}{\sigma} = -1{,}175 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\sigma = 1200}$$

$X \rightsquigarrow N(10000{,}1200)$

2) $P(9000 \leq X \leq 10500) = ?$

$P(9000 \leq 1200T + 10000 \leq 10500) = P(-0{,}83 \leq T \leq 0{,}42)$

$= P(T \leq 0{,}42) - P(T \leq -0{,}83)$

$= P(T \leq 0{,}42) - [1 - P(T \leq 0{,}83)]$

$= 0{,}66 - 1 + 0{,}79 = 0{,}45 \quad (\%45)$

100% $\rightarrow$ 500

45% $\rightarrow$ n=225

3) $P(X > A) = 0{,}20 \Leftrightarrow P(1200T + 10000 > A) = 0{,}20$

$$\Leftrightarrow P\left(T > \frac{A - 10000}{1200}\right) = 0{,}20 \Leftrightarrow P\left(T \leq \frac{A - 10000}{1200}\right) = 0{,}8$$

$\alpha = 2\,[1 - P(T \leq t_\alpha)] = 2(1 - 0{,}8) = 0{,}4$

$$\Rightarrow t_\alpha = \frac{A - 10000}{1200} = 0{,}842$$

A =11010,4

التمرين 35 مع الحل:

ليكن Z متغير مركزي مختصر (الدرجة القياسية) أوجد:

$P(Z \leq 2{,}5)$;	$P(Z \leq 2{,}5) = 0{,}9938$
$P(Z \geq 1{,}18)$;	$P(Z \geq 1{,}18) = 1 - P(Z \leq 1{,}18) = 1 - 0{,}8810 = 0{,}1190$
$P(Z \leq -0{,}78)$;	$P(Z \leq -0{,}78) = P(Z \geq 0{,}78) = 1 - P(Z \leq 0{,}78) = 1 - 0{,}7823 = 0{,}2177$
$P(Z \geq -1)$;	$P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) = 0{,}8413$

التمرين 36:

إذا كان من المعلوم أن الرواتب الفردية الشهرية في منطقة معنية تخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط (40.000دج) وانحراف معياري (5000)دج. تم اختيار شخص بالصدفة من هذه المنطقة فما احتمال أن:

1) لا يزيد راتبه الشهري عن 43000دج

2) يزيد راتبه الشهري عن 50000دج

3) يزيد راتبه الشهري عن 32000دج

4) يتراوح راتبه الشهري بين 35000دج و50000دج.

حل التمرين 36:

X: "الرواتب الفردية الشهرية"

$X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$

$X \rightsquigarrow N(40000\,, 5000)$

1) $P(X \leq 43000) = P\left(\frac{X-40000}{5000} \leq \frac{43000-40000}{5000}\right) = P(Z \leq 0{,}6) = \mathbf{0{,}7257}$

2) $P(X \geq 50000) = P\left(\frac{X-40000}{5000} \leq \frac{50000-40000}{5000}\right) = P(Z \geq 2)$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = \mathbf{0,0228}$$

3) $P(X \geq 32000) = P\left(\frac{X-40000}{5000} \leq \frac{32000-40000}{5000}\right) = P(Z \geq -1{,}6)$

$$= P(Z \leq 1{,}6) = \mathbf{0,9452}$$

4) $P(3500 \leq X \leq 50000) = P\left(\frac{35000-40000}{5000} \leq \frac{X-40000}{5000} \leq \frac{50000-40000}{5000}\right)$

$$= P(-1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 1)]$$

$$= 09772 - 1 + 0{,}8413$$

$$= \mathbf{0,8185}$$

التمرين 37:

مدة المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مكتب بريد معين (بالدقائق) متغير عشوائي كثافة إحتماله:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\alpha}{2}x} & \text{si } x \geq 0; \\ 0 & \text{si } x \prec 0. \end{cases}$$

1 - عين قيمة الثابت α؛

2 - أحسب إحتمال أن تفوق مدة مكالمة وصلت إلى هذا المكتب (3) دقائق؛

3 - أحسب إحتمال أن لا تفوق مدة مكالمة وصلت إلى هذا المكتب (3) دقائق؛

4 - أحسب إحتمال أن تفوق مدة مكالمة واحدة على الأقل من بين ثلاثة مكالمات تصل إلى هذا المكتب دقيقتين؛

5 - أحسب المدة المتوسطة و تباين مدة المكالمات التي تصل إلى هذا المكتب.

6 - أكتب دالة التوزيع المتجمع.

حل التمرين 37:

$$f(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}x} \qquad x \geq 0$$

X: "مدة المكالمات الهاتفية التي تصل إلى مكتب البريد (بالدقائق)"

1) α= ?

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2}x}dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty} -\frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha}{2}x}dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\alpha}\left[e^{-\frac{\alpha}{2}x}dx\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{\alpha}(0-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Donc : $f(x) = e^{-x} \qquad x \geq 0$

2) $P(X \geq 3) = \int_3^{+\infty} f(x)dx = -\int_3^{+\infty} -e^{-x}\ dx$

$$= -[e^{-x}]_3^{+\infty}$$

$$= -(0 - e^{-3}) = \boldsymbol{e^{-3}}$$

3) $P(X \leq 3) = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 e^{-x}\ dx$

$$= -[e^{-x}]_0^3$$

$$= -(e^{-3} - 1) = \boldsymbol{1 - e^{-3}}$$

4) A: مدة مكالمة واحدة على الأقل من بين الثلاثة تفوق 2د"

- $P(X \geq 2) = \int_2^{+\infty} f(x)dx = -\int_2^{+\infty} -e^{-x}\ dx$

$$= -[e^{-x}]_2^{+\infty}$$

$$= -(0 - e^{-2}) = \boldsymbol{e^{-2}}$$

A_1: "مدة المكالمة الأولى تفوق دقيقتين"

A_2: "مدّة المكالمة الثانية تفوق دقيقتين"

A_3: "مدّة المكالمة الثالثة تفوق دقيقتين"

$$P(A) = P[(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)]$$
$$+ P[(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)]$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= C_3^1 P(X \geq 2)[P(X \leq 2)]^2 + C_3^2[P(X \geq 2)]^2 P(X \leq 2) + C_3^3[P(X \geq 2)]^3$$

$$P(\overline{A}) = C_3^0[P(X \leq 2)]^3[P(X \leq 2)]^0$$

5) E(X)= ? V(X) =? $f(x) = e^{-x} \quad x \geq 0$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\ f(x)dx = \int_0^{+\infty} x\ e^{-x}dx$$

من خلال التكامل بالتجزئة:

$$\int UdV = [UV] - \int VdV$$

نضع:

$U = x \qquad dU = dx$

$dV = e^{-x}dx \qquad V = -e^{-x}$

Donc :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} UdV = \int_0^{+\infty} x\ e^{-x}dx$$

$$= [-x\ e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\ e^{-x}dx$$

$$= 0 - [\ e^{-x}]_0^{+\infty} = -(0-1) = \mathbf{1}$$

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = ?$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2\ e^{-x}dx$$

نضع:

$U = x^2 \qquad dU = 2xdx$

$dV = e^{-x}dx \qquad V = -e^{-x}$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} UdV = \int_0^{+\infty} x^2\ e^{-x}dx$$

$$= [-x^2\ e^{-x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2x\ e^{-x}dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x\ e^{-x}dx = 2E(X) = 2$$

Donc : $V(X) = 2 - 1 = \mathbf{1} \implies \sigma(X) = 1$

6) دالة التوزيع المتجمع:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{x < 0}$

$F(x) = 0$

$\boldsymbol{x \ge 0}$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = -\int_0^x -e^{-t}dt$$

$$= -[e^{-t}]_0^x = -(e^{-x} - 1) = \mathbf{1 - e^{-x}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \end{cases}$$

التمرين 38:

الجدول التالي يبين عدد حوادث العمل التي وقعت خلال 250 يوم عمل من السنة الماضية في إحدى الشركات:

نعرّف المتغير العشوائي X على أنه "عدد الحوادث خلال يوم"

عدد الحوادث	0	1	2	3	4	5	6
عدد الأيام	34	68	66	45	24	9	4

1- أنشأ جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي.

2- أكتب دالة التوزيع المتجمع.

3- أحسب احتمال أن تقع أكثر من أربعة حوادث خلال يوم.

4- ما هو العدد المتوقع لحوادث العمل في اليوم؟

5- يدّعي مسؤول الأمن الصناعي بالشركة أن احتمال أن تقع 03 حوادث على الأكثر لا يتعدى 95%، هل الادعاءه صحيح (علل إجابتك).

حل التمرين 38:

X: "عدد الحوادث خلال يوم"

1) إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي لX:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	34/250 = 0,136	68/250 =0,272	66/250 = 0,264	45/250 = 0,18	24/250 = 0,096	9/250 = 0,036	4/250 = 0,016

2) كتابة دالة التوزيع المتجمّع: F(x)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}136 & 0 \leq x < 1 \\ 0{,}408 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}672 & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}852 & 3 \leq x < 4 \\ 0{,}948 & 4 \leq x < 5 \\ 0{,}984 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

3) احتمال أن تقع أكثر من 04 حوادث خلال يوم:

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - F(4)$$

$$= 1 - 0{,}948 = \mathbf{0{,}052}$$

4) العدد المتوقع:

$$E(X) = \sum_{x_i=0}^{6} x_i P(X = x_i)$$

$$= 0(0{,}136) + 1(0{,}272) + \ldots\ldots + 5(0{,}036) + 6(0{,}016) = \mathbf{2}$$

5) احتمال أن تقع 03 حوادث على الأكثر هو:

$$P(X \leq 3) = F(3) = 0{,}852 = 85{,}2\% < 95\%$$

إذن ادعاءه صحيح

التمرين 39:

توجد في مدينة كبيرة (08) مساحات تجارية (نرقمها من (1) إلى (8). تختار هيئة المراقبة الأسعار كلّ يوم مساحة واحدة من بين الثمانية لإجراء عملية المراقبة.

نفرض أن أيام عمال الهيئة هي (05) أسبوعيًا (السبت، الأحد، الاثنين، الثلاثاء والأربعاء)؛ وأنه لا يمكن للهيئة أن تراقب نفس المساحة أكثر من مرة واحدة في الأسبوع الواحد.

في أسبوع معين أحسب احتمال:

1) أن تراقب المساحة (3) مرة واحدة فقط وذلك يوم الأحد.

2) أن تراقب المساحة (4) مرتان على الأقل.

3) أن لا تراقب المساحتان (2) و(6).

4) المساحة (8) تراقب مباشرة بعد المساحة (5).

5) كل من المساحات (1)، (2)، (3)، (5)، (7) تراقب مرة واحدة فقط.

حل التمرين 39:

تختار الهيئة (05) مساحات من بين (08) في الأسبوع لمراقبتها مع عدم إمكانية اختيار نفس المساحة أكثر من مرة واحدة في نفس الأسبوع.

- عدد الحالات الممكنة:

$$A_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \mathbf{6720}$$

- حساب الاحتمالات:

1) A: "المساحة (3) تراقب مرة واحدة فقط وذلك يوم الأحد"

الحالات الملائمة لA: $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \mathbf{840}$

$$P(A) = \frac{A_7^4}{A_8^5} = \left(\frac{7!}{3!}\right)\left(\frac{3!}{8!}\right) = \frac{1}{8} = \mathbf{0.125}$$

2) B: "المساحة (4) تراقب مرتان على الأقل".

الحادث B حادث مستحيل حيث أنّه لا يمكن مراقبة أي مساحة من المساحات أكثر من مرة واحدة في الأسبوع. إذن: P(B) = 0

3) C: "لا تراقب المساحات (2) و (6)".

الحالات الملائمة لC: $A_6^5 = \frac{6!}{1!} = \mathbf{720}$

$$P(C) = \frac{A_6^5}{A_8^5} = \frac{720}{6720} = \mathbf{0,107}$$

4) D: "المساحة (8) تراقب مباشرة بعد المساحة (5)"

الحالات الملائمة لD: $4A_6^3 = 4\left(\frac{6!}{3!}\right) = \mathbf{480}$

$$P(D) = \frac{480}{6720} = \mathbf{0,071}$$

5) E : "المساحات (1)؛ (2) ؛ (3) ؛ (5) ؛ (7) تراقب مرة واحدة فقط"

الحالات الملائمة لE: $\wp_5 = 5! = \mathbf{120}$

$$P(E) = \frac{120}{6720} = \mathbf{0,017}$$

التمرين 40:

قامت شركة مقاولات بالمشاركة في مناقصتين مختلفتين، من خلال خبرتها السابقة تقدر الشركة إمكانية حصولها على المناقصة الأولى ب(55%)، وحصولها على المناقصة الثانية ب(40%)؛ في حين أن إمكانية حصولها على كلتا المناقصتين تقدرها ب(25%).

إذا افترضنا أن تقديرات هذه الشركة صحيحة:

1) ما احتمال فوزها بمناقصة واحدة وواحد فقط؟

2) ما احتمال عدم فوزها بأي مناقصة؟

3) إذا لم تفز بالمناقصة الأولى؛ ما احتمال فوزها بالمناقصة الثانية؟

حل التمرين 40:

نعتبر الحادثتين:

A: "الحصول على المناقصة الأولى" $P(A) = 0{,}55$ $P(\bar{A}) = 0{,}45$

B: "الحصول على المناقصة الثانية" $P(\bar{B}) = 0{,}60$ $P(B) = 0{,}40$

$$P(A \cap B) = 0{,}25$$

1) احتمال فوزها بمناقصة واحدة وواحدة فقط:

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = ?$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}55 - 0{,}25 = 0{,}30$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}40 - 0{,}25 = 0{,}15$$

Donc $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}30 + 0{,}15 = \mathbf{045}$

2) احتمال عدم فوزها بأي مناقصة:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B} \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - [0{,}55 + 0{,}40 - 0{,}25]$$

$$= 1 - 0{,}70$$

$$= \mathbf{0,30}$$

3) احتمال فوزها بالمناقصة الثانية علماً أنها لم تفز بالمناقصة الأولى:

$$P(B/\bar{A}) = ?$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

ملاحظة: الحادثتين A وB غير مستقلان من خلال المعطيات

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \qquad 0{,}25 \neq (055)(0{,}4)$$

التمرين 41:

مدّة صلاحية نوع البطاريات متغير عشوائي كثافة احتماله: (المدة بالسنوات)

$$f(x = k\, e^{-\frac{x}{2}} \qquad ; x \geq 0$$

1) عين قيمة الثابت k

2) أحسب احتمال أن لا تفوق مدّة صلاحية بطارية من هذا النوع سنتين.

3) أحسب احتمال أن تفوق مدّة صلاحية بطاريتين اثنتين على الأقل من بين (08) بطاريات سنتين.

4) أحسب المدّة المتوسطة لصلاحية هذا النوع من البطاريات.

حل التمرين 41:

X: "مدة صلاحية نوع من البطاريات"

$$f(x) = ke^{-\frac{x}{2}} \qquad ; x \geq 0 \qquad \text{(بالسنوات)}$$

2) تعيين قيمة الثابت k:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} ke^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow (-2)\mathrm{k} \int_{0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}\, dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -2\mathrm{k} \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_{0}^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow -2\mathrm{k}\,(0 - 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2k = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{k = 1/2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \qquad ; x \geq 0$$

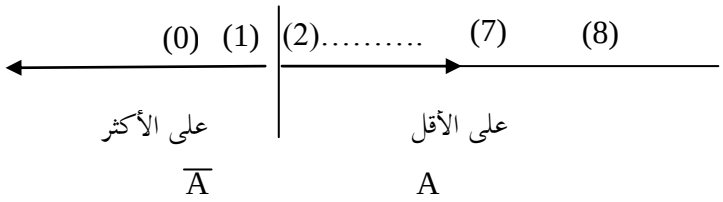
2) احتمال أن لا تفوق مدة صلاحية بطارية من هذا النوع سنتين:

$$P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\ dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

$$= -\int_{0}^{2} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -\left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_{0}^{2}$$

$$= -(e^{-1} - 1) = \mathbf{1 - e^{-1}}$$

3) ليكن A: "مدّة صلاحية بطاريتين اثنتين على الأقل من بين(08) بطاريات تفوق سنتين"



$\bar{A}$: "بطارية واحدة على الأكثر (من بين 08) تفوق مدة صلاحيتها سنتين"

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - (1 - e^{-1})$$
$$= e^{-1}$$

$$P(\bar{A}) = 8\,[P(X > 2)]\,[P(X \leq 2)]^7 + [P(X \leq 2)]^8$$

$$= 8\,[e^{-1}]\,[1 - e^{-1}]^7 + [1 - e^{-1}]^8$$

$$\approx \mathbf{0,144}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx \mathbf{0,856}$$

4) حساب المدّة المتوسطة: E(X)= ?

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \underbrace{x \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right)} dx$$

En intégrant par partie

$$U = x \qquad V' = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}$$

$$U' = 1 \qquad V = -e^{-\frac{x}{2}}$$

$$E(X) = \left[-xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\frac{x}{2}}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

0

$$= (-2) \int_0^{+\infty} (-\frac{1}{2}) e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

$$= -2 \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -2(0 - 1)$$

المدة المتوسطة سنتان $E(X) = 2$

التمرين 42:

بفرض أن الحوادث عند تقاطع مزدحم تحدث عشوائياً وبصفة مستقلة بمتوسط حادثتين كل أسبوع.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الحوادث في الأسبوع؟ ما هو توقعه؟

2) ما احتمال أن تقع أربعة حوادث في التقاطع هذا الأسبوع؟

3) ما احتمال أن تقع أربعة حوادث على الأكثر في التقطع هذا الأسبوع؟

حل التمرين 42:

X: "عدد الحوادث في الأسبوع "

$$X \nearrow \wp(\lambda)$$

1) $\lambda = 2$

$$X \nearrow \wp(2)$$

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-2}\frac{2^x}{x!} \qquad x = 0,1, \dots \dots$$

$$E(X) = \lambda = 2$$

2) $P(X = 4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = \mathbf{0,0902}$

3)

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= e^{-2} + 2e^{-2} + e^{-2}\frac{2^2}{2!} + e^{-2}\frac{2^3}{3!} + e^{-2}\frac{2^4}{4!}$$

$$= e^{-2}\left[1 + 2 + 2 + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}\right]$$

$$= 7\,e^{-2} = \mathbf{0,9473}$$

التمرين 43:

مصنع ينتج نوعاً من إطارات السيارات، وكنظام روتيني للفحص تسحب عشوائيا كل يوم 25 إطار من الإنتاج لاكتشاف الإطارات المعيبة. اعتماداً على أحدث معلومات مسجلة يُعتقد بأن نسبة المعيب من الإطارات المنتجة فيظل ظروف الإنتاج المستقرة هي (1%).

I.

1) ما هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الإطارات المعيبة المكتشفة خلال عملية الفحص في يوم ما؟

2) تقوم سياسة مراقبة الجودة على القيام بإجراء تصحيحي لخط الإنتاج في حالة اكتشاف أكثر من إطار معيب خلال عملية الفحص.

أحسب احتمال القيام بهذا الإجراء.

II.

قسم بحوث التسويق بالمصنع قدر التوزيع الاحتمالي التالي للمكسب أو الخسارة (بوحدات نقدية معينة) التي يُنتظر أن يحققها المنتج الجديد للمصنع خلال سنة واحدة من طرحه في السوق:

المساهمة في الأرباح (و.ن)	-20000	-10000	10000	50000	150000	200000
الاحتمال	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.2

إذا علمت أن المصنع سوف يُقدم المنتج الجديد إذا كانت مساهمته في الأرباح في سنة واحدة لا تقل عن (100000 و.ن) فهل يجب على المصنع تقديم هذا المنتج (الإطار) الجديد بناءًا على هذه المعطيات؟

<u>حل التمرين 43:</u>

I.

1) X: "عدد الإطارات المعيبة المكتشفة خلال الفحص في اليوم (من بين 25)"

$$X \nearrow \mathcal{B}(n, p)$$

$$X \nearrow \mathcal{B}(25\ ;\ 0{,}01)$$

$$P(X = x) = C_n^x\, p^x\, q^{n-x} = C_{25}^x\, (0{,}01)^x\, (0{,}99)^{25-x} \qquad x = 0,1,\dots.,25.$$

2)

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - [C_{25}^0\, (0{,}01)^0\, (0{,}99)^{25} + C_{25}^1\, (0{,}01)^1\, (0{,}99)^{25}]$$

$$= 1 - 0{,}9742 = 0{,}0258$$

II.

$E(Y) = \sum y_i \, P(Y = y_i)$ $\qquad$ $E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$

= (-20000) (0,1) – (10000) (0,1) + (10 000) (0,1)+ (50 000)(0,2) +(150000) (0,3) + (200000) (0,2) = 93000 <100000

وبالتالي لا ينصح بتسويق هذا المنتج الجديد لأنّ مساهمته المتوقعة في الأرباح هي أقل منها هو محدد.

التمرين 44:

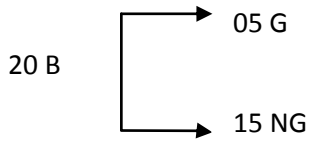
خلال معرض تجاري وضعت إحدى الشركات (20) تذكرة للبيع منها (05) مربحة، اشترى شخص (03) تذاكر (من بين العشرين) على هذه الشركة.

1) ما هو احتمال حصوله على تذكرة واحدة مربحة؟

2) ما احتمال حصوله على تذكرة واحدة على الأقل مربحة؟

3) ما احتمال حصوله على تذكرتين مربحتين على الأكثر؟

حل التمرين 44:



حساب الاحتمالات:

عدد الحالات الممكنة:

$$C_{20}^{3} = \frac{20!}{3!\,17!} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3!} = 1140$$

A: "الحصول على تذكرة واحدة مربحة":

عدد الحالات الملائمة لA:

$$C_5^1 C_{15}^2 = 5.\frac{15!}{2!\,13!} = 525.$$

$$P(A) = \frac{525}{1140} = 0{,}46$$

B: "الحصول على تذكرة واحدة على الأقل مربحة".

$\bar{B}$: "عدم الحصول على أي تذكرة مربحة" $\leftarrow$ $C_5^0 C_{15}^3 = \frac{15!}{3!12!} = 455$

$$P(\bar{B}) = \frac{455}{1140} = 0{,}399$$

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0{,}601$$

3) C: "الحصول على تذكرتن مربحتين على الأكثر"

$\bar{C}$: الحصول على (03) تذاكر مربحة" $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

$$P(\bar{C}) = 0{,}008 \Rightarrow P(C) = \mathbf{0,992}$$

التمرين 45:

نعتبر A وB حادثين من فضاء العينة Ω:

برهن أن:

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

حل التمرين 45:

$$P(\bar{A}/B) = 1 - P(A/B)$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

$$= 1 - P(A/B)$$

التمرين 46:

الطلب اليومي (بمئات الكيلوغرامات) على مادة معينة في مدينة ما متغير عشوائي كثافة احتماله:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & 3 \leq x \leq 6 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1) عين قيمة الثابت C.

2) أكتب دالة التوزيع المتجمع لX.

3) أحسب احتمال أن يفوق الطلب على المادة في (04) أيام من بين (06) أيام (300كغ).

4) نعتبر الحادثين: A: "الطلب على المادة خلال يوم يفوق (300كغ)، B: "الطلب على المادة خلال يوم يتراوح بين (150كغ) و (450 كغ)". هل الحادثين A و B مستقلين؟

<u>حل التمرين 46:</u>

X: الطلب اليومي على المادة بالمدينة"

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \le x < 3 \\ c(6-x) & 3 \le x \le 6 \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

1) تعيين قيمة C:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^3 cx\ dx + \int_3^6 c(6-x)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{cx^2}{2}\right]_0^3 + c\left[6x - \frac{x^2}{2}\right]_3^6 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\,C - 0\right) + \left[(36c - 18c) - \left(18c - \frac{9}{2}c\right)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}\,C + \frac{9}{2}C = 1$$

$$\Leftrightarrow 9C = 1 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{C = \frac{1}{9}}$$

2) كتابة دالة التوزيع المتجمع:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = P(X \le x).$$

- Si $x < 0 \Rightarrow F(x) = \mathbf{0}$

- Si $x \in [0,3]: F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^x ct\, dt = \left[c\ \frac{t^2}{2}\right]_0^x$

$$= c\frac{x^2}{2} = \boldsymbol{\frac{x^2}{18}}$$

- Si $x \in [3,6]: F(x) = \int_0^3 f(t)\ dt + \int_3^x f(t)\, dt$

$$= \left[c\ \frac{t^2}{2}\right]_0^3 + c\left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_3^x$$

$$= \frac{9}{2}c + \left[c6x - \frac{x^2}{2}\ c - 18c + \frac{9}{2}c\right]$$

$$= -9\ c + c\left(\frac{12x - x^2}{2}\right)$$

$$= -\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}\left(\boldsymbol{6x} - \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2}}\right)$$

Donc :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ \dfrac{x^2}{18} & si\ \ 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{1}{9}\left(6x - \dfrac{x^2}{2}\right) - 1 & si\ 3 \le x \le 6 \\ 1 & si\ x \ge 6 \end{cases}$$

3) A : "الطلب في (04) من بين (06) يفوق (300كغ)"

Nous avons : $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3)$

$$= 1 - F(3)$$

$$= 1 - \frac{3^2}{18} = 1 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Donc :

$$P(A) = C_6^4 [P(X > 3)]^4 [P(X \leq 3)]^2 = C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \boldsymbol{C_6^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6}$$

4) A: "الطلب على المادة خلال يوم يفوق (300كغ)".

B: "الطلب على المادة خلال يوم يتراوح بين (150) و(450كغ)

$$P(A \cap B) = (A).P(B)$$

Nous avons :

$$P(A) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$P(B) = P(1{,}5 \leq 4{,}5) = F'(4{,}5) - F'(1{,}5)$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

$$P(A \cap B) = P(3 \leq X \leq 4{,}50) = F'(4{,}5) - F'(3)$$

$$\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

Donc :

$$P(A).P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{8} = P(A \cap B) \rightarrow$$ إذن A وB مستقلان

التمرين 47:

في إحدى مسابقات التوظيف تبين أنّ (07) متقدمين لديهم خبرة و(05) متقدمين بدون خبرة في المجال المطلوب، نختار بالصفة (08) أشخاص لإجراء المقابلة ونعرّف المتغير العشوائيX الذي يمثل عدد الأعضاء المختارين الذين لديهم خبرة في المجال.

1- ما هو التوزيع الاحتمالي لX؟ أحسب توقعه.

2- أحسب احتمال أن يكون عدد الأشخاص المختارين الذين لديهم خبرة لا يقلّ عن (03).

حل التمرين 47:

X: "عدد الأشخاص المختارين ذوو الخبرة في المجال"

1)التوزيع الاحتمالي لX:

$$\frac{C_7^x\, C_5^{8-x}}{C_1^8} = P(X=x) = \frac{C_{N_1}^x\, C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \qquad x= 3\ ;4\ ;5\ ;6\ ;7\ ;$$

$$E(X) = \ npq = \ n\left(\frac{N_1}{N}\right) = 8\left(\frac{7}{12}\right) = \ 4{,}66$$

2) A: "عدد الأشخاص ذوو خبرة المختارين لا يقل عن (03)"

حادث أكيد ← P(A) = 1

التمرين 48:

الانفاق الشهري للأسرة(بالألف دينار) على المواد الغذائية متغير عشوائي دالة كثافة احتماله هي:

$$f(x) = \begin{cases} cx\ (10-x) & si\ 0 < x < 10\ ; \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) حدّد قيمة الثابت c

2) أحسب احتمال أن يتراوح إنفاق أسرة بين خمسة آلاف وثمانية آلاف دينار خلال الشهر.

3) إذا كان لدينا (600) أسرة؛ فما هو عدد الأسر المنتظر أن يقل إنفاقها عن (3) آلاف دينار خلال الشهر؟

4) ما هي قيمة الإنفاق الشهري المتوسط للأسر؟

5) أكتب دالة التوزيع المتجمع لهذا المتغير العشوائي.

حل التمرين 48:

X: "الإنفاق الشهري للأسرة بالألف دينار"

$$f(x) = \ cx\ (10-x) \quad ;0 < x < 10$$

1) تحديد قيمة C:

$$\int_0^{10} cx\,(10-x)\,dx = 1 \Leftrightarrow c\int_0^{10} 10x - x^2\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left[5\,x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = 1$$

$$\Leftrightarrow c\left[500 - \frac{1000}{3}\right] - 0 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{500\,c}{3} = 1$$

$$\Leftrightarrow c = 3/500 = \mathbf{0,006}$$

(2

$$P(5 \le X \le 8) = \int_5^8 0{,}006\,x(10-x)\,dx = 0{,}006\,\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= 0{,}006\left[\left(5(8)^2 - \frac{8^3}{3}\right) - \left(5(5)^2 - \frac{5^3}{3}\right)\right]$$

$$= 0{,}006\,[149{,}33 - 83{,}33] = 0{,}006(66) = \mathbf{0,396}$$

(3

$$P(X < 3) = \int_0^3 0{,}006\left(x(10-x)\right)dx = 0{,}006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= 0{,}006\left[\left(5(3)^2 - \frac{3^3}{3}\right) - 0\right] = 0{,}006\,[(45 - 9)] - 0$$

$$= 0{,}006\,(36) = 0{,}216$$

عدد الأسر هو:

$(0{,}216)(600) = 129{,}6 \approx 130$

4) متوسط الإنفاق الشهري للأسر:

$E(X) = ?$

$$E(X) = \int_0^{10} x\, f(x)\, dx = \int_0^{10} x\,\big(0{,}006\, x\,(10-x)\big)dx$$

$$= 0{,}006 \int_0^{10} 10x^2 - x^3\, dx$$

$$= 0{,}006 \left[10\,\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0{,}006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = \mathbf{5}$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري 5 آلاف دينار

5) كتابة دالة التوزيع المتجمع:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x 0{,}006\ t(10-t)dt = 0{,}006\left[10\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$= 0{,}006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right] \qquad pour \qquad 0 < x < 10$$

التمرين 49:

لاجتياز امتحان في الإحصاء تم تقسيم (350) طالب على مدرجين؛ (150) طالب في المدرج (1) و(200) طالب في المدرج (2).

كانت نسبة الأوراق البيضاء في المدرجين (1) و(2) (4%) و (6%) عل الترتيب.

1- بعد جمع أوراق الإجابة يختار المصحح ورقة عشوائيا، ما احتمال أن تكون هذه الورقة عليها إجابة؟

2- إذا كانت الورقة المختارة بيضاء؛ ما احتمال أن تكون من المدرج (2)؟

حل التمرين 49:

مدرج (1) ← 150 طالب ← 4%

مدرج(2) ← 200 طالب ← 6%

1) A: "الورقة عليها إجابة" $P(\bar{A}/B) = 0{,}04 \quad ; \quad P(\bar{A}/\bar{B}) = 0{,}06$

B: "الورقة من المدرج (1)" $P(B) = \frac{150}{350} = 0{,}4285 \quad ; P(\bar{B}) = 0{,}5715$

$P(A) = ?$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A/B)P(B) + P(A/\bar{B})P(\bar{B})$$

$$= (0{,}96)(0{,}4285) + (0{,}94)(0{,}5715)$$

$$= 0{,}94857$$

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A}/\bar{B}).P(\bar{B})}{P(\bar{A})}$$

$$= \frac{(0{,}06).(0{,}5715)}{0{,}05143} = 0{,}6667$$

التمرين 50:

تريد وكالة سفر اختيار خمسة عواصم دول من بين عشرة عواصم مرقمة من (1) إلى (10) لتنظيم دورة سياحية من خمسة مراحل متتالية بحيث يتم زيارة عاصمة واحدة خلال كل مرحلة (لا يمكن زيارة عاصمة واحدة في أكثر من مرحلة واحدة).

1) أحسب احتمالات الحوادث التالية:

A: " العاصمة (3) تكون نقطة بداية الدورة السياحية"

B: " العاصمة (3) تكون ضمن الدورة السياحية"

C: "العواصم (7) (5) (1) تكون متتابعة خلال الدورة السياحية"

D: "الدورة السياحية تشمل العواصم (1) (3) (4) (8) (10)"

E: "لدورة السياحية لا تشمل العاصمتين « (5) (4)

2) هل الحادثان B و E مستقلان؟

حل التمرين 50:

وكالة السفر تختار (05) عواصم من بين (10) عواصم مرة واحدة.

عدد الحالات الكلية: $A_{10}^{5} = \frac{10!}{5!}$

1) حساب احتمال الحوادث:

A: "العاصمة (3) تكون نقطة بداية الدورة السياحية".

الحالات الملائمة لA: $A_1^1 \, A_9^4 = \frac{9!}{5!}$

$$P(A) = \frac{9!/5!}{10!/5!} = \left(\frac{9!}{5!}\right)\left(\frac{5!}{10!}\right) = \mathbf{\frac{1}{10}} = 0{,}1$$

B:"العاصمة (3) تكون ضمن الدورة السياحية"

الحالات الملائمة لB:

$$5(A_i \, A_9^4) = 5\left(\frac{9!}{5!}\right)$$

$$P(B) = 5\left(\frac{1}{10}\right) = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

C:" العواصم (7) (5) (1)تكزن متتابع خلال الدورة السياحية"

الحالات الملائمة لC:

$$3 \wp_3' A_7^2 = 3(3!)\left(\frac{7!}{5!}\right)$$

$$P(C) = 3(3!)\left(\frac{7!}{5!}\right)\left(\frac{5!}{10!}\right) = \frac{3.3.2.1}{10.9.8} = \mathbf{\frac{1}{40}} = 0{,}025$$

D: "الدورة السياحية تشمل العواصم (1) (3) (4) (8) (10)"

الحالات الملائمة لD:

$$\wp'_5 = 5!$$

$$P(D) = (5!)\left(\frac{5!}{10!}\right) = \frac{5.4.3.2}{10.9.8.7.6} = \mathbf{\frac{1}{252}} = 0{,}0039$$

E: "الدورة السياحية لا تشمل العاصمتين (4) (5)

الحالات الملائمة لE: $A_8^5 = \frac{8!}{3!}$

$$P(E) = \left(\frac{8!}{3!}\right)\left(\frac{5!}{10!}\right) = \frac{5.4}{10.9} = \mathbf{\frac{2}{9}} = 0{,}22$$

2) هل الحادثان E وB مستقلان؟

B∩E : "العاصمة (3) ضمن الدورة والدورة لا تشمل العاصمتين (6) (4)"

الحالات الملائمة ل B∩E

$$P(B \cap E) = P(B).P(E)$$

$$5(A_i\ A_7^4) = 5\left(\frac{7!}{3!}\right)$$

$$P(B \cap E) = 5\left(\frac{7!}{3!}\right)\left(\frac{5!}{10!}\right) = 5.\frac{5.4}{10.9.8} = \mathbf{\frac{5}{36}}$$

$$P(B).P(E) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = \mathbf{\frac{1}{9}} \neq P(B \cap E)$$

إذن الحادثان B وE غير مستقلان

التمرين 51:

أظهر تصنيف لطلاب إحدى الدفعات السابقة في مقياس الإحصاء والرياضيات النتائج الإحصائية التالية:

- (60%) من طلبة الدفعة تحصلوا على مقياس الرياضيات (المعدل فما فوق)؛
- (25%) من طلبة الدفعة تحصلوا علة مقياس الرياضيات والإحصاء؛
- من بين الذين تحصلوا على مقياس الإحصاء،(62,5%) تحصلوا على مقياس الرياضيات

1) ما هي نسبة الطلبة الذي تحصلوا على مقياس الإحصاء؟
2) ما هي نسبة الطلبة الذين تحصلوا على مقياس واحد وواحد فقط؟
3) ما هي نسبة الطلبة الذين لم يحصلوا لا على مقياس الرياضيات ولا على مقياس الإحصاء؟
4) من بين الذين لم يحلوا على مقياس الرياضيات، ما هي نسبة الذين تحصلوا على مقياس الإحصاء؟

حل التمرين 51:

نعتبر الحادثين:

A: "الذين تحصلوا على مقياس الرياضيات"

B: "الذين تحصلوا على مقياس الإحصاء"

لدينا: $P(A/B) = 0,625$ $P(A\cap B) = 0,25$ $P(A) = 0,6$

1) نسبة الطلبة الذين تحصلوا على مقياس الإحصاء. $P(B) = ?$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A\cap B}{P(A/B)}$$

$$= \frac{0,25}{0,625} = \mathbf{0,4} = 40\%$$

2) نسبة الطلبة الذين تحصلوا على مقياس واحد وواحد فقط.

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = ?$$

رياضيات فقط ← $P(A \cap \bar{B}) = (A) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}25 = \mathbf{0,35}$

إحصاء فقط ← $P(\bar{} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}25 =$ $\mathbf{0,15}$

إذن:

$$P[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}35 + 0{,}15 = \mathbf{0,5}$$

$$= 50\%$$

3) نسبة الطلبة الذين لم يحصلوا ولا على مقياس من الاثنين:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - [0{,}6 + 0{,}4 - 0{,}25] = 1 - 0{,}75 = \mathbf{0,25}$$

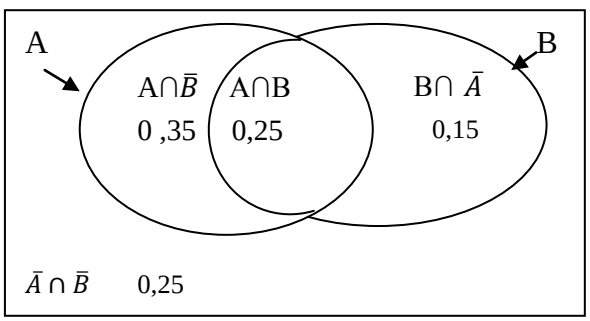
$$= 25\%$$

4) نسبة الذين تحصلوا على مقياس الإحصاء من بين الذين لم يحصلوا على مقياس الرياضيات:

$$P(B/\bar{A}) = ?$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375 = \mathbf{37,5\%}$$

رسم يلخّص التمرين:



التمرين 52:

تشتغل وحدة إنتاج الشاشات المسطحة 24 ساعة في اليوم من خلال ثلاثة ورديات: صباحية، مسائية، ليلية، حيث تضمن الوردية المسائية نصف ما يتم إنتاجه في الصباح في حين أن وردية الليل لا تنتج سوى ثلاث ما تنتجه الوردية المسائية.

تشير عمليات الرقابة على الجودة أن نسبة الإنتاج المخالف للمعايير هي : 5%، 4%، 2% على الترتيب: صباحا ، مساءا ، ليلا.

1) ما هي نسبة الإنتاج اليومي المخالف لمعايير الجودة بهذه الوحدة؟

2) تم اختيار شاشة بالصدفة من إنتاج الوحدة وتبين أنها مخالفة للمعايير فما احتمال أن تكون قد أنتجت في المساء.

حل التمرين 52:

A: "وردية الصباح"

B: "وردية المساء"

C:"وردية الليل"

D: "المنتج مخالف لمعايير الجودة"

$P(A) = ?$

$P(B) = ?$ $\quad P(B) = \frac{P(A)}{2}$

$P(C) = ?$ $\quad P(C) = \frac{P(B)}{3} = \frac{P(A)}{6}$

$P(D/A) = 0{,}05$

$P(D/B) = 0{,}05$

$P(D/C) = 0{,}02$

On sait que :

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \Leftrightarrow P(A) + \frac{P(A)}{2} + \frac{P(A)}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow 6P(A) + 3P(A) + P(A) = 6$$

$$\Leftrightarrow 10P(A) = 6$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{P(A) = 0{,}6}$$

إذن وردية الصباح تنتج (60%) من الإنتاج اليومي وبالتالي:

$$P(B) = \frac{P(A)}{2} = \frac{0,6}{2} = 0,3 = \mathbf{30}\%$$

$$P(C) = \frac{P(A)}{6} = \frac{P(B)}{3} = 0,1 = \mathbf{10}\%$$

1) نسبة الإنتاج اليومي المخالف لمعايير الجودة:

$P(D) = ?$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$P(D) = P(D/A)\,P(A) + P(D/B)\,P(B) + P(D/C)P(C)$$

$$P(D) = (0,05)(0,6) + 5(0,04)(0,3) + (0,02)(0,1) = 0,044 = \mathbf{4,4}\%$$

$P(B/D) = ?$

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/B)\,P(B)}{P(D)} = \frac{(0,04)(0,3)}{0,044} = \mathbf{0,2727}$$

التمرين 53:

Xمتغير عشوائي، يمثل عدد حوادث السيارات في مدّة معينة خلال شهر، دالة توزيعه المتجمع معرفة كما يلي:

1) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0,13 & si\ 0 \le x < 1 \\ 0,35 & si\ 1 \le x \le 2 \\ 0,66 & si\ 2 \le x \le 3 \\ 0,84 & si\ 3 \le x \le 4 \\ 0,99 & si\ 4 \le x \le 5 \\ 1 & si\ 5 \le x \end{cases}$$

2) أحسب احتمال أن يكون هناك خلال شهر في هذه المنطقة:

a. حادثي سير؛

b. حادثي على الأكثر؛

c. ثلاثة حوادث سير على الأقل؛

d. لا يزيد عدد الحوادث عن (4) ولا يقل عن (1)

ما هو العدد المتوسط لحوادث السير في هذه المنطقة في الشهر؟

حل التمرين 53:

X: "عدد حوادث السير في الشهر في المدينة"

1) جدول التوزيع الاحتمالي لX:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	$\sum$
f(X=xi)	0,13	0,22	0,31	0,18	0,15	0,01	1

2) حساب الاحتمالات:

a/ $P(X \leq 2) = F(2) = \mathbf{0,66} = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

b/ $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}66 = \mathbf{0,34}$

$= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

c/ $P(1 \leq X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$= P(X \leq 4) - P(X < 1)$

$= P(X \leq 4) - P(X \leq 0)$

$= F(4) - F(0) = 0{,}99 - 0{,}13 = \mathbf{0,86}$

3) العدد المتوسط لحوادث السير في الشهر:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i\, P(X = xi) = (0)(0{,}13) + (1)(0{,}22) + \cdots + 5(0{,}01)$$

$= 2{,}03 \approx 2$ حادثين في الشهر

التمرين 54:

قدمت إحدى المحلات الكبرى عرضين مختلفين لزبائنها يتضمن كل منهما تخفيضات هامة على نوع معين من منتجاتها، بعد نهاية فترة التخفيضات أعلنت النتائج الإحصائية التالية:

- 60% من الزبائن استفادوا من العرض الأول

- 40% من الزبائن استفادوا من العرض الثاني

-من بين الذين استفادوا من العرض الثاني، 75% استفادوا من العرض الأول.

1- من بين الذين استفادوا من العرض الأول، ما هي نسبة الذين استفادوا من العرض الثاني؟

2- ما هي نسبة الذين استفادوا من العرض الثاني فقط؟

3- ما هي نسبة الزبائن الذين لم يستفيدوا لا من العرض الأول ولا الثاني؟

4- أوجد نسبة الذين استفادوا من عرض واحد على الأكثر.

حل التمرين 54:

A: "استفادة من العرض (1)" $P(A) = 0,6$

B: "استفاد من العرض (2)" $P(B) = 0,4$

$$P(A/B) = 0,75 \Rightarrow P(\bar{A}/B) = 0,25$$

1) $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B).P(B)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,6} = 0,5 = 50\%$

2) $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) = 0,4 - 0,3 = 0,1 = 10\%$

3) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$$= 1 - [0,6 + 0,4 - 0,3] = 0,3 = \mathbf{30}\%$$

4)

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 = 70\%$$

التمرين 55:

بالموازاة مع معرض تجاري توضع يومياً للبيع ثلاثون تذكرة منها عشرة مربحة. قرر شخص أن يشتري كل يوم تذكرة وذلك خلال خمسة أيام متفرقة مثلاً الأحد، الاثنين الثلاثاء الأربعاء والخميس) بحيث يكون أول المشترين.

أحسب احتمالات الحوادث التالية:

A: "يحصل الشخص على تذكرتين فقط مربحتين وتكونان خلال اليومين الأولين"

B: يحصل الشخص على ثلاثة تذاكر مربحة فقط وتكون خلال ثلاثة أيام متتابعة"

C: "يحصل الشخص على تذكرتين مربحتين على الأقل".

حل التمرين 55:

عدد الحالات الممكنة $\tilde{A}_{30}^{5} = 30^5$

$$P(A) = \frac{\tilde{A}_{10}^{2}\tilde{A}_{20}^{3}}{\tilde{A}_{30}^{5}} = \frac{10^2.20^3}{30^5} = 0{,}032$$

$$P(B) = \frac{\tilde{A}_{10}^{3}\tilde{A}_{20}^{2}.3}{\tilde{A}_{30}^{5}} = \frac{10^3.20^2.3}{30^5} = 0{,}049$$

"يحصل على تذكرتين مربحتين على الأقل"

"يحصل على تذكرة واحدة مربحة على الأكثر"

$$P(\bar{C}) = \frac{\tilde{A}_{20}^{5} + 5 \times \tilde{A}_{10}^{1}\tilde{A}_{20}^{4}}{\tilde{A}_{30}^{5}} = 0{,}46$$

Donc : $P(C) = 1 - P(\bar{C}) \approx 0{,}54$

التمرين 56:

يوجد في مدينة معينة (10) فضاءات تجارية نرتبها من (1) إلى (10).

تختار هيئة المراقبة الأسعار كل يوم فضاء تجاري واحد من بين العشر لإجراء عملية المراقبة

بفرض أن أيام عمل الهيئة هي (05) أسبوعيا (الأحد، الإثنين، الثلاثاء، الأربعاء و الخمس)؛ وأنه لا يمكن للهيئة أن تراقب نفس الفضاء التجاري أكثر من مرّة واحدة في الأسبوع الواحد

I/ في أسبوع معين، أحسب احتمال:

1) أن يراقب الفضاء (4) مرة واحدة فقط وذلك يوم الثلاثاء؛

2) أن يراقب الفضاء (6) مرة واحدة فقط؛

3) أن يراقب الفضاء (6) مرتان على الأقل؛

4) أن لا يراقب الفضاءان (7) و(9)؛

5) الفضاءات (2)، (5)، (7)، (8) و(10) تراقب مرة واحدة فقط.

II/ هل حوادث السؤال الثاني والرابع مستقلة أم لا؟

حل التمرين 56:

هيئة المراقبة تختار (05) فضاءات تجارية من بين (10) أسبوعيا مرة واحدة دون تكرار.

عدد الحالات الممكنة:

$$A_{10}^{5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 30240$$

I/ حساب الاحتمالات : نفرض حوادث حسب الأمثلة:

A: "الفضاء (4) يراقب مرة واحة فقط وذلك يوم الثلاثاء"

الحالات الملائمة لA: $A_{9}^{4} = \frac{9!}{5!} = 3024$

$$P(A) = \frac{9!/5!}{10!/5!} = \frac{9!}{5!}\frac{5!}{10!} = \frac{9!}{10:} = \frac{1}{10} = \frac{3024}{30240} = \mathbf{0,1}$$

B: "الفضاء (6) يراقب مرة واحدة فقط"

الحالات الملائمة لB:

$$5A_9^4 = 5.\frac{9!}{5!} = 5.(3024) = 15120$$

$$P(B) = \frac{15120}{30240} = \mathbf{0,5} = 5.P(A)$$

C" "الفضاء (06) يراقب مرتان على الأقل"

حيث أنه لا يمكن مراقبة أي فضاء أكثر من مرة فإن هذا الحادث مستحيل ومنه:

$$P(C) = 0$$

D:"لا يراقب الفضاءان (7) و(2)"

الحالات الملائمة لD: $A_8^5 = \frac{5!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720$

$$P(D) = \frac{8!}{3!} = \frac{5!}{10!} = \frac{5.4}{10.9} = 0,22$$

E: "الفضاءات (2)، (5) ، (7)، (8)و (10) تراقب مرّة واحدة فقط"

عدد الحالات الملامة لE هي:

$$\wp_5 = 5! = A_5^5 = 120$$

$$P(E) = \frac{120}{30240} = 0,003$$

II/هل الحادثان B وD مستقلان؟ $P(B \cap D) = P(B).P(D)$

الحالات الملائمة ل (B∩D):

$$5A_7^4 = 5.\frac{7!}{(7-4)!} = 4200$$

$$P(B \cap D) = \frac{4200}{30240} = 0{,}1388 \neq P(B).P(D)$$

$$\neq (0{,}5).(0{,}22)$$

$$\neq 0{,}11$$

إذن B و D غير مستقلان.

التمرين 57:

مكنت عملية صبر آراء من الحصول عل النتائج إحصائية التالية:

- نسبة الأشخاص الذين يمارسون الرياضة (1) هي (65%).
- من بين الأشخاص الذين يمارسون الرياضة (2)، (42%) يمارسون الرياضة(1).
- من بين الأشخاص الذين يمارسون الرياضة (1)، (30%) يمارسون الرياضة (2)

1) ما هي نسبة الذين يمارسون الرياضة (1) فقط؟

2) ما هي نسبة الذين يمارسون رياضة واحدة وواحدة فقط؟

3) ما هي نسبة الأشخاص الذين لا يمارسون لا الرياضة (1) و لا الرياضة (2)

حل التمرين 57:

نفرض:

A: "الأشخاص الذين يمارسون الرياضة (1)" $P(A) = 0{,}65$

B: "الأشخاص الذين يمارسون الرياضة (2)" $P(A/B) = 0{,}42$

$P(B/A) = 0{,}30$

1- نسبة الذين يمارسون الرياضة (1) فقط:

$$P(A \cap \bar{B}) = ?$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = (0{,}3)(0{,}65) = 0{,}195$$

Donc : $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}65 - 0{,}195 = \mathbf{0,455} = 45{,}5\%$

2- نسبة الذين يمارسون رياضة واحدة وواحد فقط:

$$P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right] = ?$$

$$P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right] = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$* \; P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) = ?$

$* \; P(B) = ?$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \frac{0{,}195}{0{,}42} = \mathbf{0,464}$$

$* \; P(B \cap \bar{A}) = 0{,}464 - 0{,}195 = \mathbf{0,269}$

Donc : $P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})\right] = 0{,}455 + 0{,}269 = \mathbf{0,724} = 72{,}4\%$

3- نسبة الأشخاص الذين لا يمارسون لا الرياضة (1) ولا الرياضة (2):

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$= 1 - [0{,}65 + 0{,}464 - 0{,}195]$$

$$= 1 - 0{,}919$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \mathbf{0,081} = \mathbf{8,1}\%$$

التمرين 58:

مدّة صلاحية نوع من البطاريات متغير عشوائي كثافة احتماله، (المدّة بالسنوات)

$$f(x = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{k} e^{-x} & x \geq \end{cases}$$

1) عين قيمة الثابت k.

2) أحسب احتمال أن تفوق مدّة صاحية (05) بطاريات من هذا النوع سنتين.

3) أحسب احتمال أنه تفوق مدّة صلاحية (06) بطاريات على الأكثر من بين (08) بطاريات سنتين.

حل التمرين 58:

X: "مدّة صلاحية نوع من البطاريات بالسنوات:

1- تعيين قيمة k: (بالسنوات) $f(x) = \frac{1}{k}e^{-x}$ $;x \geq 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{k}e^{-x}\,dx = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{k}\int_0^{+\infty} -e^{-x-x}\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mathrm{k}}\,[e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mathrm{k}}\,(0-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{k}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{k} = \mathbf{1}$$

$$f(x) = e^{-x} \qquad ;x \geq 0$$

2) A: "مدة صلاحية (05) بطاريات من هذا النوع تفوق سنتين"

احتمال تفوق مدة صلاحية بطارية ما سنتين هو :

$$P(X \geq 2) = \int_2^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

$$= [-e^{-x}]_2^{+\infty}$$

$$= (0 + e^{-2}) = \boldsymbol{e^{-2}}$$

$$P(A) = [P(X > 2)]^5 = (\boldsymbol{e^{-2}})^{\mathbf{5}}$$

3) احتمال B: " مدة صلاحية (06) بطاريات على الأكثر من بين (08) تفوق سنتين"

$\bar{B}$: "مدة صلاحية (07) بطاريات على الأقل من بين (08) تفوق سنتين"

الحالات الملائمة ل$\bar{B}$: 7 بطاريات تفوق أو الثمانية كلها تفوق سنتين. سنتين:

$$P(\bar{B}) = C_8^7 [(P(X > 2)]^7 [P(X \leq 2)] + [(P(X > 2)]^8$$

$$= 8 [e^{-2}]^7 (1 - e^{-2}) + [e^{-2}]^8$$

Donc : $P(B) = 1 - P(\bar{B})$

التمرين 59:

أجريت عملية صبر آراء في مدينة معينة حول اقتراحين : يتعلق الأول بتسديد القروض والثاني بصيغة لبيع السكنات؟

كانت نسبة الموافقين على الاقتراح الأول (60%) ونسبة الموافقين على الاقتراح الثاني (45%). من بين الموافقين على الاقتراح الأول (70%) وافقوا على الاقتراح الثاني.

1) ما هي نسبة الموافقين على اقتراح واحد على الأقل من بين الاثنين؟

2) ما هي نسبة الموافقين على الاقتراح الأول فقط؟

3) ما هي نسبة غير الموافقين على كلا الاقتراحين؟

4) من بين الموافقين على الاقتراح الثاني، ما هي نسبة الموافقين على الاقتراح الأول؟

حل التمرين 59:

A: " الموافقون على الاقتراح (1)" P(A) = 0,6

B: "الوافقون على الاقتراح (2)" P(B)= 0,45

P(B/A) = 0,7

1) نسبة الموافقين على اقتراح واحد عل الأقل:

$$P(A \cup B) = ?$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - [P(B/A)\, P(A)]$$

$$= 0{,}6 + 0{,}45 - [(0{,}7)(0{,}6)] = \mathbf{0{,}63} = \mathbf{63}\ \%$$

2) نسبة الموافقين على الاقتراح (1) فقط:

$$P(A \cap \bar{B}) = ?$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0{,}6 - 0{,}42 = \mathbf{0{,}18} = \mathbf{18}\%$$

3) نسبة غير الموافقين على الاقتراحين:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - 0{,}63 = \mathbf{0{,}37} = \mathbf{37}\%$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}42}{0{,}45} = 0{,}93 = \mathbf{93}\%$$

التمرين 60:

لاحظ صاحب أحد شركات كراء السيارات أن عدد السيارات التي يتمّ كراءها أسبوعيا متغير عشوائيا Xدالة توزيع المتجمع هي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0{,}13 & si\ 0 \le x < 1 \\ 0{,}35 & si\ 1 \le x \le 2 \\ 0{,}66 & si\ 2 \le x \le 3 \\ 0{,}84 & si\ 3 \le x \le 4 \\ 0{,}99 & si\ 4 \le x \le 5 \\ 1 & si\ 5 \le x \end{cases}$$

1) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي لX

2)أحسب احتمال أن يتم كراء خلال أسبوع معين:

-سيارتين على الأكثر.

-ثلاث سيارات على الأقل

-لا يزيد عن 4 ولا يقلّ عن 1

3) ما هو العدد المتوقع لكراء السيارات؟

حل التمرين 60:

X: عدد السيارات التي يتم كرائها أسبوعيا

1)جدول التوزيع لاحتمالي لX:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	$\sum$
P(X=xi)	0,13	0,22	0,31	0,18	0,15	0,01	1

(2

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = F(2) = \mathbf{0,66}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0{,}66 = \mathbf{0,34}$$

$$P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X < 1)$$

$$= P(X \leq 4) - P(X \leq 0)$$

$$= F(4) - F(0) = 0{,}99 - 0{,}13 = \mathbf{0,86}$$

(3

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i\, P(X = xi) = (0)(0{,}13) + (1)(0{,}22) + \cdots + 5(0{,}01)$$

$$= 2{,}03 \approx 2$$

التمرين 61:

تتكون هيئة إدارية من (07) أعضاء دائمين و(05) غير دائمين.

نختار بالصدفة (08) أعضاء لتكوين لجنة (لتكليفهم بمهمة) ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة.

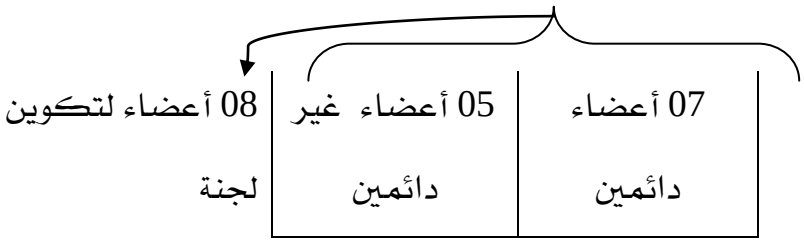
1) ما هو التوزيع الاحتمالي لX؟ أحسب توقعه.

2) أحسب احتمالات الحوادث:

A: "عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة لا يقل عن 3"

B: "عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة لا يزيد عن5"

حل التمرين 61:



هيئة إدارية (12)

$$X \nearrow H(n\,;N_1;N_2)$$

$$X \nearrow H(8\,;7;5)$$

X: "عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة"

1) التوزيع الاحتمالي لX:

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}\,C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_7^x\,C_5^{8-x}}{C_{12}^8}$$

قيم X: .7; 6; 5; 4; 3 = x

جدول التوزيع الاحتمالي لX:

X = x	3	4	5	6	7
P(X=x)	$\frac{C_7^3\ C_5^5}{C_{12}^8}$ =0,070707	$\frac{C_7^4\ C_5^4}{C_{12}^8}$ =0,353535	$\frac{C_7^5\ C_5^3}{C_{12}^8}$ =0,424242	$\frac{C_7^6\ C_5^2}{C_{12}^8}$ =0,14141414 =	$\frac{C_7^7\ C_5^1}{C_{12}^8}$ =0,010101

حساب التوقع:

$$E(X) = \sum x_i\, P(X = x_i)$$

$$= 3(0{,}07) + 4(0{,}35) + 5(0{,}42) + 6(0{,}14) + 7(0{,}01)$$

$$\approx 4{,}64$$

أو:

$$E(X) = np = 8\left(\frac{7}{12}\right) \approx 4{,}64$$

2) حساب الاحتمالات:

A:" عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة لا يقلّ عن 3"

من قيم X نلاحظ أن هذا الحادث أكيد وبالتالي:

$$P(A) = \mathbf{1} = P(X \geq 3)$$

B. "عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة لا يزيد عن 5"

$$P(B) = P(X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 0{,}07 + 0{,}35 + 0{,}42 = 0{,}84$$

التمرين 62:

مكنت عملية صبر آراء من الحصول على النتائج الإحصائية التالية:

- نسبة الأشخاص الذين يشاهدون القناة (1) هي (65%).
- من بين الأشخاص الذين يشاهدون القناة (2)، (42%) يشاهدون القناة (1).

- من بين الأشخاص الذين يشاهدون القناة (1)، (30%) يشاهدون القناة (2)

1) ما هي نسبة مشاهدي القناة (1) فقط؟

2) ما هي نسبة مشاهدي قناة واحدة وواحدة فقط؟

3) ما هي نسبة الأشخاص الذين لا يشاهدون لا القناة (1) ولا القناة (2)؟

حل التمرين 62:

A: "الأشخاص الذين يشاهدون القناة (1) "

B: "الأشخاص الذين يشاهدون القناة (2)"

$P(A) = 0{,}65$

$P(A/B) = 0{,}42$

$P(B/A) = 0{,}30$

1- نسبة مشاهدي القناة (1) فقط:

$P(A \cap \bar{B}) = ?$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) = (0{,}3)(0{,}65) = 0{,}195$

$P(A \cap \bar{B}) = 0{,}65 - 0{,}195 = \mathbf{0{,}455}$ النسبة 45,5%

2- نسبة مشاهدي قناة واحدة وواحدة فقط

$P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})\right] = ?$

$P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})\right] = P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A})$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \dfrac{0{,}195}{0{,}42} = 0{,}46$

$P(B \cap \bar{A}) = 0{,}464 - 0{,}195 = 0{,}269$

$P\left[(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})\right] = 0{,}455 + 0{,}269 = \mathbf{0,724}$

النسبة 72,4%

3- نسبة الأشخاص الذين لا يشاهدون لا القناة (1) و لا القناة (2)

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - [0{,}65 + 0{,}464 - 0{,}195]$

$= 1 - 0{,}919 = 0{,}081$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}081$

النسبة 8,1%

التمرين 63:

معدّل الصوت (بالارتدادات) لجهاز تلفزيوني متغير عشوائي كثافة احتماله:

$$f(x) = k\ \left(e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) \qquad x \geq 0$$

1) عين قيمة الثابت k

2) أحسب احتمال أن يقل معدل الصوت عن (04) ارتدادات

3) أحسب احتمال أن يفوق معدل الصوت ل (05) أجهزة على الأكثر بين (07)أجهزة (04) ارتدادات.

4) أحسب احتمال أن يفوق معدل صوت (06) أجهزة من بين (10)، (04) ارتدادات.

حل التمرين 63:

X: "معدل الصوت بالارتدادات لجهاز تلفزيوني"

$$f(x) = k\ \left(e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) \qquad x \geq 0$$

1- تعيين k

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow \int_{0}^{+\infty} k\ \left(e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) dx = 1$$

$$\Leftrightarrow k\left[-\int_{0}^{+\infty} -e^{-x}\ \ dx + (-2)\int_{0}^{+\infty} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx\ \right] = 1$$

$$\Leftrightarrow k\left\{[-e^{-x}]_0^{+\infty} -\ 2\ \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}\right\} = 1$$

$$\Leftrightarrow k\ \{(0+1) -\ 2\ (0-1)\} = 1$$

$$\Leftrightarrow k\ .3 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{k = \frac{1}{3}}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}\ \left(e^{-x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right) \qquad x \geq 0$$

2- احتمال أن يقل معدّل الصوت عن (04) ارتدادات

$$P(X \leq 4) = \int_{-\infty}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{3}\left(e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left\{[-e^{-x}]_0^4 -\ 2\ \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^4\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\{(-e^{-4} + 1) -\ 2\ (e^{-2} - 1)\}$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\ (e^{-4} + 2e^{-2})$$

3 -احتمال A: "يفوق معدل الصوت (05) أجهزة على الأكثر من بين (07) أجهزة (04) ارتدادات"

$\bar{A}$:" (06) أجهزة على الأقل يفوق معدّل صوتها (04) ارتدادات

الحالة الملائمة ل$\bar{A}$:

$$7\,[P(X>4)\,]^6[P(X\leq 4)]$$

أو $[P(X>4)\,]^7$

$$P(\bar{A}) = 7\left[\frac{1}{3}\,(e^{-4}+2e^{-2})\right]^6\left[1-\frac{1}{3}\,(e^{-4}+2e^{-2})\right] + \left[\frac{1}{3}\,(e^{-4}+2e^{-2})\right]^7$$

$$P(\bar{A}) = \left[\frac{1}{3}\,(e^{-4}+2e^{-2})\right]^6[7-2\,(e^{-4}+2e^{-2})]$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

4- احتمال B: "يفوق معدّل صوت (06) أجهزة من بين (10)، (04) ارتدادات

$$P(B) = C_{10}^6\,[P(X>4)]^6\;[P(X\leq 4)]^4$$

$$P(B) = \frac{10!}{6!\,4!}\left[\frac{1}{3}\,(e^{-4}+2e^{-2})\right]^6\left[1-\frac{1}{3}\,(e^{-4}+2e^{-2})\right]^4$$

التمرين 64:

برهن أنّ $(X) = [E(\ \ ^2)] - [(X)]^2$

حيث E(X) يمثّل التّوقّع الرّياضي للمتغير العشوائي X و V(X) التباين.

حل التمرين 64:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = E\,[X - E(X)]^2$$

$$= E\left[X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \left(E(X)\right)^2$$

$$= E(X^2) - 2\left(E(X)\right)^2 + \left(E(X)\right)^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

التمرين 65:

تبين من خلال دراسة إحصائية للغات الأجنبية لمجموعة من الطّلبة النتائج التالية:

- 60% يدرسون "اللغة الإنجليزية"،
- 15% يدرسون "اللغة الألمانية؛
- من بين اللذين يدرسون "اللغة الإنجليزية، هناك 20% يدرسون "اللغة الألمانية".

1- ما هي نسبة الذين يدرسون لغة واحدة على الأقل من اللغتين المذكورتين.

2- ما هي نسبة الذين يدرسون "اللغة الألمانية" فقط

3- من بين الذين يدرسون "اللغة الألمانية"، ما هي نسبة الذين يدرسون "اللغة الإنجليزية"

4- ما هي نسبة الذين لا يدرسون لا "اللغة الإنجليزية" ولا "اللغة الألمانية".

حل التمرين 65:

نفرض أن: A: " الذين يدرسون الإنجليزية" P(A) =0,60

B: "الذين يدرسون الألمانية" P(B) = 0,15

P(B/A) =0,20

1) نسب الذين يدرسون لغة واحدة على الأقل: $P(A \cup B) = ?$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - [P(B/A).P(A)]$$
$$= 0{,}60 + 0{,}15 - [(0{,}2).(0{,}60)]$$
$$= \mathbf{0,63} = \mathbf{63}\%$$

2) نسب الذين يدرسون اللغة الألمانية فقط

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$$
$$= 0{,}15 - 0{,}12 = \mathbf{0,03} = \mathbf{3}\%$$

3) نسبة الذين يدرسون الإنجليزية بين الذين يدرسون الألمانية:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}12}{0{,}15} = \mathbf{0,8} = \mathbf{80\%}$$

4) نسب الذين لا يدرسون لا الإنجليزية و لا الألمانية

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - 0{,}63 = \mathbf{0,37} = \mathbf{37\%}$$

التمرين 66:

العدد اليومي للسيارات المباعة من طرف معرض معيّن هو متغير عشوائي، توزيعه الاحتمالي كما يلي:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	k	0.18	0.24	3k	0.12	0.15	0.1	0.09

1- عيّن قيمة الثابت k، ثم اكتب دالة التوزيع المتجمّع.

2- أحسب العدد المتوقّع من السّيارات المباعة، وما هو انحرافه المعياري.

3- أحسب احتمال أن لا يزيد عدد السيارات المباعة عن سيّارتين.

4-أحسب احتمال أن لا يقلّ عدد السيارات المباعة عن ثلاث سيارات

5- أحسب احتمال أن لا يقلّ عدد السّيارات المباعة عن سيّارة واحدة ولا يزيد عن خمس سيّارات.

حل التمرين 66:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
$P(X=x_i)$	0.03	0.18	0.25	0.09	0.12	0.15	0.1	0.09	1
$F(X) = P(X \leq x_i)$	0.03	0.21	0.45	0.54	0.66	0.81	0.91	1	

1) k= ?

$$\sum P(X = x_i) = 1 \Leftrightarrow k + 0{,}18 + .. + 0{,}09 = 1$$

$$\Leftrightarrow 0{,}88 + 4k = 1$$

$$\Leftrightarrow 4k = 0{,}12$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{k = 0{,}03}$$

2) $E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$

$$= (0)(0{,}03) + \cdots + (7)$$

$$= \mathbf{3{,}39}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= [(0)^2(0{,}03) + \cdots + (7)^2(0{,}09)]$$

$$= 15{,}63 - (3{,}39)^2 = 4{,}13$$

$$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{4{,}13}$$

$$= 2{,}03 \approx 2$$

دالة التوزيع المتجمع الجدول $\rightarrow F(X \leq x)$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(x = 1) + P(X = 2)$$

$$= \mathbf{0{,}45}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - 045 = 0{,}55$$

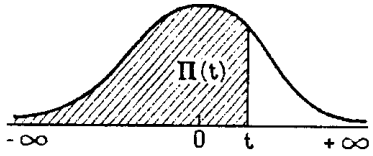
$$P(1 \leq X \leq 5) = 0{,}18 + \cdots \ldots + 0{,}15 = \mathbf{0{,}78}$$

تم بحمد الله.

TABLES STATISTIQUES

Table A : Fonction de répartition de la loi normale réduite

1. TABLE DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à x)



$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\, dt\ .$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE X

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(x)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

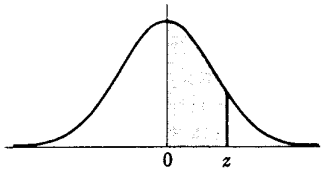
Nota — La table donne les valeurs de $F(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemples : pour $x = 1{,}37$ $F(x) = 0{,}9147$
pour $x = -1{,}37$ $F(x) = 0{,}0853$

Table B : Fonction de répartition de la loi normale réduite

(Probabilité de trouver une valeur comprise entre 0 et z)

Aires sous la courbe normale réduite comprises entre 0 et *z*



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,0000	,0040	,0080	,0120	,0160	,0199	,0239	,0279	,0319	,0359
0,1	,0398	,0438	,0478	,0517	,0557	,0596	,0636	,0675	,0714	,0754
0,2	,0793	,0832	,0871	,0910	,0948	,0987	,1026	,1064	,1103	,1141
0,3	,1179	,1217	,1255	,1293	,1331	,1368	,1406	,1443	,1480	,1517
0,4	,1554	,1591	,1628	,1664	,1700	,1736	,1772	,1808	,1844	,1879
0,5	,1915	,1950	,1985	,2019	,2054	,2088	,2123	,2157	,2190	,2224
0,6	,2258	,2291	,2324	,2357	,2389	,2422	,2454	,2486	,2518	,2549
0,7	,2580	,2612	,2642	,2673	,2704	,2734	,2764	,2794	,2823	,2852
0,8	,2881	,2910	,2939	,2967	,2996	,3023	,3051	,3078	,3106	,3133
0,9	,3159	,3186	,3212	,3238	,3264	,3289	,3315	,3340	,3365	,3389
1,0	,3413	,3438	,3461	,3485	,3508	,3531	,3554	,3577	,3599	,3621
1,1	,3643	,3665	,3686	,3708	,3729	,3749	,3770	,3790	,3810	,3830
1,2	,3849	,3869	,3888	,3907	,3925	,3944	,3962	,3980	,3997	,4015
1,3	,4032	,4049	,4066	,4082	,4099	,4115	,4131	,4147	,4162	,4177
1,4	,4192	,4207	,4222	,4236	,4251	,4265	,4279	,4292	,4306	,4319
1,5	,4332	,4345	,4357	,4370	,4382	,4394	,4406	,4418	,4429	,4441
1,6	,4452	,4463	,4474	,4484	,4495	,4505	,4515	,4525	,4535	,4545
1,7	,4554	,4564	,4573	,4582	,4591	,4599	,4608	,4616	,4625	,4633
1,8	,4641	,4649	,4656	,4664	,4671	,4678	,4686	,4693	,4699	,4706
1,9	,4713	,4719	,4726	,4732	,4738	,4744	,4750	,4756	,4761	,4767
2,0	,4772	,4778	,4783	,4788	,4793	,4798	,4803	,4808	,4812	,4817
2,1	,4821	,4826	,4830	,4834	,4838	,4842	,4846	,4850	,4854	,4857
2,2	,4861	,4864	,4868	,4871	,4875	,4878	,4881	,4884	,4887	,4890
2,3	,4893	,4896	,4898	,4901	,4904	,4906	,4909	,4911	,4913	,4916
2,4	,4918	,4920	,4922	,4925	,4927	,4929	,4931	,4932	,4934	,4936
2,5	,4938	,4940	,4941	,4943	,4945	,4946	,4948	,4949	,4951	,4952
2,6	,4953	,4955	,4956	,4957	,4959	,4960	,4961	,4962	,4963	,4964
2,7	,4965	,4966	,4967	,4968	,4969	,4970	,4971	,4972	,4973	,4974
2,8	,4974	,4975	,4976	,4977	,4977	,4978	,4979	,4979	,4980	,4981
2,9	,4981	,4982	,4982	,4983	,4984	,4984	,4985	,4985	,4986	,4986
3,0	,4987	,4987	,4987	,4988	,4988	,4989	,4989	,4989	,4990	,4990
3,1	,4990	,4991	,4991	,4991	,4992	,4992	,4992	,4992	,4993	,4993
3,2	,4993	,4993	,4994	,4994	,4994	,4994	,4994	,4995	,4995	,4995
3,3	,4995	,4995	,4995	,4996	,4996	,4996	,4996	,4996	,4996	,4997
3,4	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4998
3,5	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998
3,6	,4998	,4998	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999
3,7	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999
3,8	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999
3,9	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000

Table C : Fonction de répartition de la loi normale réduite

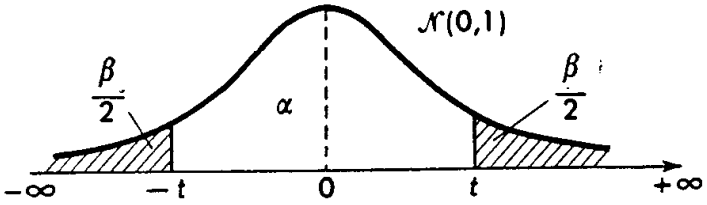
(Probabilité d'appartenir à un intervalle de confiance)

La table donne la probabilité β pour que l'écart-réduit Z égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée t, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-t, +t)$.

$$\beta = 1 - \alpha$$

ou

$$\beta = \Pr\{-t \leqslant Z \leqslant +t\}$$



$$\beta = 2[1 - \Pi(t)]$$

β	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,064	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Ex : Pour $Z = 1{,}96$ la probabilité est $\beta = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

TABLE POUR LES PETITES VALEURS DE β

β	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
Z	3,290 53	3,890 59	4,417 17	4,891 64	5,326 72	5,730 73	6,109 41