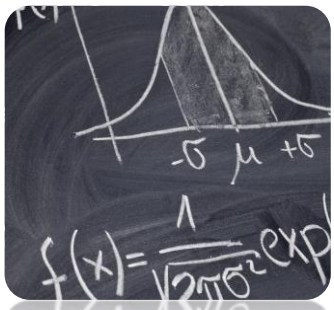
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أبي بكر بلقايد-تلمسان-
كلية العلوم الإقتصادية، التجارية و علوم التسيير

2021

محاضرات في الإحتمالات



إعداد:

د. جمعـــــة زكرياء

هذه المطبوعة البيداغوجية:

- ✓ موجهة لفائدة طلبة السنة الأولى جذع مشترك ميدان العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير؛
- ✓ تغطي البرنامج الرسمي المعتمد من طرف اللجنة البيداغوجية الوطنية لميدان التكوين في مادة الإحصاء 2.

المحتويات:

مقدمـــــة.

الفصل الأول: تذكير بنظرية المجموعات.

I. تعاريف - 2-
II. خصائص المجموعات الجزئية - 3-
III. العمليات على المجموعات - 4-
IV. خواص العمليات الجبرية على المجموعات - - - - - - - - - - - - - - - 6-

الفصل الثاني: التحليل التوفيقي.

1 -المبدأ الأساسي في العد - 9-
2 -ترتيبة بالتكرار - 12-
3 - ترتيبة بدون تكرار - 13-
4 -التوفيقة - 15-
5 -التبديلة - 17-

الفصل الثالث: مدخل لنظرية الإحتمالات.

I. مبادئ نظرية الإحتمالات - 25-
1 -التجربة العشوائية - 25-
2 -فضاء العينة - 26-
3 - الحادث - 28-
4 -الأنواع الرئيسية للحوادث - 31-
5 -العمليات على الحوادث - 33-
II. الإحتمال - 38-
1 -تعريف - 38-
2 - خصائص الإحتمال - 43-
III. قوانين (قواعد) الإحتمال - 48-

1 - قانون الجمع -48
2 -قانون الضرب -55
IV. نظرية الإحتمالات الكلية و نظرية "بايز Bayes" - - - - - - - - - - - - -64
1 - نظرية الإحتمالات الكلية - - - - - - - - - - - - - - - - - - -64
2 - نظرية "بايز Bayes" -65

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية.

1 -تعريف -69
2 -المتغيرات العشوائية المتقطعة - - - - - - - - - - - - - - - - - -70
3 -المتغيرات العشوائية المستمرة - - - - - - - - - - - - - - - - - -75
4 -القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية - - - - - - - - - - - - - - - -79

الفصل الخامس: التوزيعات الإحتمالية الشهيرة.

1 -توزيع ذي الحدين -85
2 -توزيع "بواسون" -88
3 -التوزيع الهندسي الزائدي - - - - - - - - - - - - - - - - - - -90
4 -التوزيع الطبيعي -92
المراجع -99
ملحق جدول التوزيع الطبيعي - - - - - - - - - - - - - - - - - - -100

مقدّمة:

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على خاتم النبيين و على آله وصحبه و أجمعين و بعد:

بين يديك أخي القارئ مطبوعة حول نظرية الإحتمالات بما فيها المتغيرات العشوائية و التوزيعات الإحتمالية الشهيرة، و هي تتضمن بذلك أساسيات الإحصاء الرياضي في خمسة فصول، كل فصل منها مدعم بكثير من الأمثلة التوضيحية و التطبيقية التي تُمكن من زيادة المكتسبات و تطوير المهارات العلمية لدى الطالب.

هذا و قد تم إعداد هذه المطبوعة لتُغطي البرنامج الرسمي لمادة الإحصاء 2 مستوى السنة الأولى جذع مشترك في ميدان العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، والمعتمد من طرف اللجنة الوطنية للتكوين في هذا الميدان. كما حرصنا على إعدادها و تحريرها بأسلوب علمي رزين و واضح سلس يسهل معه فهم و إدراك مادتها العلمية بإتباع منهجية عرض للأفكار تراعي التسلسل المنطقي في معالجة مختلف المحاور و العناوين.

و لا يفوتني في الأخير توجيه الدعوة إلى الأساتذة الزملاء و الطلبة الأعزاء و كل مطلع على هذا المطبوعة التكرم علينا بإبداء آرائهم و إسداء ملاحظاتهم و إقتراحاتهم حول فقراتها و مضمونها للإستفادة منها بغرض العمل على تحسينها و تطوير مادتها العلمية؛ سائلاً الله العلي القدير أن يجعلها خالصة لوجهه الكريم و أن يجعلها مُعينا للطلبة الكرماء في مسارهم الدراسي.

زكرياء جمعـــــة.

الفصل الأول: تذكير بنظرية المجموعات.

I -تعاريف:

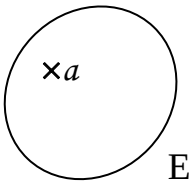
-تعرف المجموعة على أنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء التي يمكن تميزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه الشيء المنتهي المجموعة يعتبر عنصراً من هذه المجموعة.

مثال:

* مجموعة ستة أوجه لزهرة النرد ← مجموعة منتهية (6 عناصر).

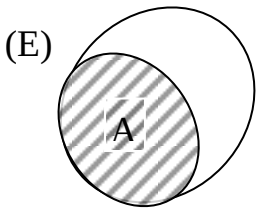
* مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة ← مجموعة غير منتهية (متقطعة).

إذا كان a عنصرا من المجموعة E؛ نقول أن a ينتمي إلى E. $a \in E$



-نقول عن A أنها مجموعة جزئية من المجموعة E إذا كانت محتواة في E؛ أو بمعنى آخر جميع عناصر A موجودة في المجموعة E. $(A \subset E)$

$$[A \subset E \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in E]$$



مثال:

لتكن المجموعات التالية:

$$E_1 = \{3\,;\,5\,;\,11\,;\,24\}\,;\ E_2 = \{5\,;\,24\};\ E_3 = \{3\,;\,11\,;\,12\}.$$

عند مقارنة E_2 و E_3 مع E_1 نلاحظ: $E_2 \subset E_1$ و $E_3 \not\subset E_1$

مثال:

المجموعة الجزئية للأوجه الزوجية لزهرة النرد.

$$E = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}.\quad A = \{2\ ;\ 4;\ 6\}.\quad A \subset E$$

مثال:

المجموعة الجزئية مضاعف 4 في مجموعة الأعدادةالصحيحة الموجبة وهكذا....

- مجموعة جزئية خاصة من E هي E نفسها.
- مجموعة جزئية خاصة هي التي لا تحوي أي عنصر من E وهي المجموعة الخالية∅
- مفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد.
- تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أي مجموعة أخرى).

II -خصائص المجموعات الجزئية:

a) $\emptyset \subset A \subset U$ (بالمجموعة الشاملة)

b) $E \subseteq E$

c) $A \subset B$ et $B \subset E \Rightarrow A \subset E.$

d) $A = B \Rightarrow A \subseteq B$ et $B \subseteq A.$

تساوي مجموعتين: $A = B$ إذ كانت كل منهما مجموعة جزئية من الأخرى أي أن:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B\ et\ B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B\ et\ \forall x \in B \Rightarrow x \in A.$$

مثال:

$A = \{0\ ;1\}.\quad B = \{\, x\ /\ x \in N, x^2 - x = 0\,\}$ هل A وB متساويتان؟

$$A = B?$$

عناصر A محددة ومعروفة لكن عناصر B غير محصور؛

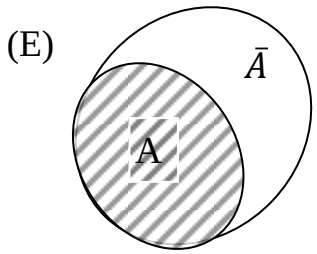
نحددها إذن بحل المعادلة المعطاة:

$$x^2 - x = 0 \implies x\,(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x - 1 = 0, x = 1$$

Donc B = {0 ; 1} et finalement A = B

-المتممة:

نعرف متممة A في المجموعة E، المجموعة الجزئية من E المشكلة من عناصر E التي لا تنتمي لA. (نرمز بـ$\overline{A}$)



Exemple : E = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

A = {1 ; 3 ; 5}.

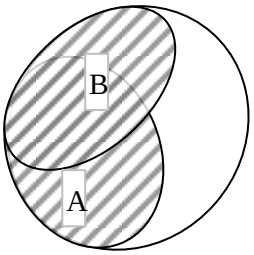
$\overline{A}$ = {2 ; 4 ; 6}

- ✓ متممة E هي ∅
- ✓ متممة ∅ بالنسبة ل E هي E.
- ✓ متمم متمم A هو A

III - العمليات على المجموعات:

1) الاتحاد:

اتحاد المجموعتين الجزئيتين A و B هو المجموعة الجزئية C المشكلة من جميع العناصر التي تنتمي (الموجودة في) كل من A أو B نرمز: $C = A \cup B$



(E)

2) التقاطع:

تقاطع مجموعتين A و B هي المجموعة التي تحتوي على العناصر المشتركة بين A و B ونرمز للتقاطع بالرمز التالي ∩

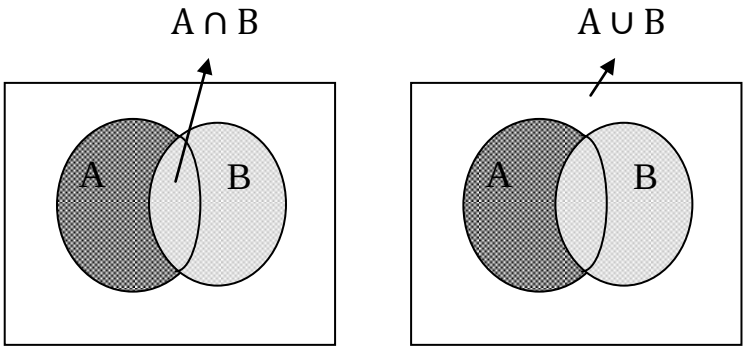
مثال: لدينا المجموعات التالية:

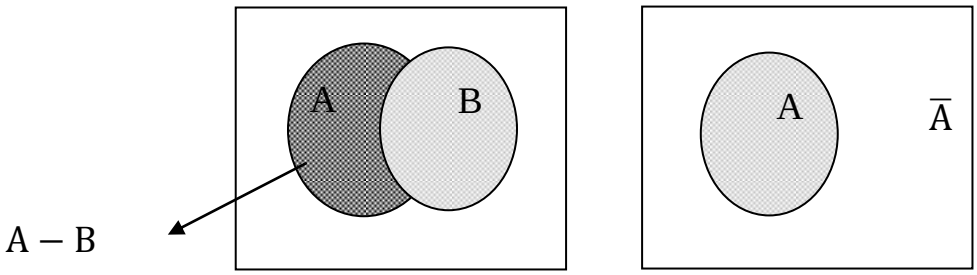
A: {1,4; 5} و B: {1,2; 3; 5}، المطلوب : أوجد A ∩ B

الجواب: A ∩ B: {1,5}

نلخص قواعد الجبر على المجموعات من خلال شكل فن، فهي عبارة عن طريقة لتسهيل إجراء العمليات الجبرية على المجموعات من خلال تمثيل المجموعات بالدّوائر وتمثيل المجموعة الكلية بمربع أو مستطيل وهذا هو ما يعرف بأشكال فن Venn Diagrammes.

شكل 1 : أشكال فن





المصدر: محمد يوسف اشقر، عبد اللطيف يوسف الصديقي، أساسيات الإحصاء والاحتمالات، دار الراتب الجامعية بيروت، لبنان، 2001، ص.104

VI -خواص العمليات الجبرية على المجموعات:

1) خاصية التبديل:

❖ خاصية التبديل للاتحاد: $A \cup B = B \cup A$

❖ خاصية التبديل للتقاطع: $A \cap B = B \cap A$

2) خاصية التجميع:

❖ خاصية التجميع للاتحاد:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

❖ خاصية التجميع للتقاطع:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3) خاصية التوزيع:

❖ خاصية توزيع التقاطع على الاتحاد:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

❖ خاصية توزيع الاتحاد على التقاطع:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4) قوانين ديمورغان:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

هذه القوانين تعطينا العلاقة بين عمليات الاتحاد والتقاطع وأخذ المتممة، وتمكين تعميم القوانين السابقة إلى n من المجموعات بدلا من مجموعتين.

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

الفصل الثاني: التحليل التوفيقي.

كثيرا ما نهتمّ في دراستنا بعملية تكوين مجموعات جزئية من مجموعات أصلية وفق شروط محددة مفترضة، يمكن أن تختلف الحالات عن بعضها البعض بافتراض عدم إمكانية تكرار العناصر في المجموعات الجزئية، أو إمكانية تكرارها.

يساعدنا في دراسة ذلك ما يعرف بالتحليل التوافقي .

يهتمّ التحليل التوافقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات حسب شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضية التي تسهل هذا التكوين من جهة ويمكن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد بها واستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات المواتية (الملائمة) لحادث ما وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بذلك الحادث.

1 - المبدأ الأساسي في العد(قاعدة الضرب):

إذا كانت لدينا تجربة أولى E_1 تقع بـ n_1 طريقة مختلفة ومع كل طريقة من هذه الطرق لدينا تجربة ثانية نرمز لها E_2 تقع بـ n_2 طريقة مختلفة وهكذا حتى التجربة E_k التي تقع بـ n_k فإنّ هذه التجارب تقع مجتمعة بعدد من الطرق قدرت: ب $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$

مثال1:

نريد تصنيف مجتمع ما وفق الجنس (ذكر M، أنثى F) والحالة العائلية (متزوج M؛ أعزب C؛ مطلق D؛ أرمل V)، ما هو عدد التصنيفات المختلفة الممكن تكوينها؟

ج: العدد هو: $M_1 \times M_2 = 2 \times 4 = 8$

مثال2:

في مسابقة من 20 مترشح، ما هو عدد الطرق الممكنة لاختيار الفائز الأوّل، والثاني والثالث؟

مثال 3:

نرمي زهرة نرد ثلاث رميات متتالية. فما هو عدد الحالات الممكنة التي سوف تظهر؟

مثال 4:

نريد تشكيل لجنة مراقبة من شرطيين وعون أمن فما هو عدد اللجان الممكنة إذا كان عدد المتقدّمين لمنصب الشرطة هو 10 ولمنصب عون أمن 5.

مثال 5:

ما هو عدد الخطوط الهاتفية الممكنة إذا كان كل خط هاتفي يتكون من 9 أرقام أوّلها الصفر.

مثال 6:

ما هو عدد لوحات السيارات الممكنة إذا كانت كل لوحة تتألف من 3 أحرف بالفرنسية متبوعة برقمين أوّلها عدد فردي.

تصحيح المثال 2:

الفائز (3)	الفائز (2)	الفائز (1)
18	19	20

$$20 \times 19 \times 18 = 6840$$

تصحيح المثال 3:

الرمية (3)	الرمية (2)	الرمية (1)
1....6	1.....6	1.....6

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

تصحيح المثال 4:

اللجنة (3)	اللجنة (2)	اللجنة (1)

10	9	5

$10 \times 9 \times 5 = 450$

تصحيح المثال 5:

0	0→9	0→9	0→9	0→9	0→9	0→9	0→9	0→9
1	10	10	10	10	10	10	10	10

10^8

تصحيح المثال6:

الرقمين الأحرف

عدد فردي

26	26	26	5	10
A→Z	A→Z	A→Z		0→9

$26 \times 26 \times 26 \times 5 \times 10 = 878800$

مثال7:

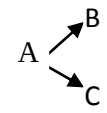
نعتبر مجموعة الأحرف $\{A, B, C\}$، نريد تشكيل مجموعات جزئية ذات حرفين من هذه المجموعة، فما هو عدد المجموعات الجزئية الممكن تشكلها؟

الحالة(3) السحب في آن واحد	الحالة (2) السحب بدون تكرار	الحالة (1) السحب بالإرجاع
	ترتيبة بدون تكرار	ترتيبة بالتكرار

{A, B}, {A, C}, {B, C}

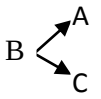
3 x 2 = 6/2 = 3.

توفيقة



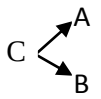
$\{A, B\}$

$\{A, C\}$



$\{B, A\}$

$\{B, C\}$



$\{C, A\}$

$\{C, B\}$

3 x 2 = 6

{A, A}
{A, B}
{A, C}

$\{B, A\}$

$\{B, B\}$

$\{B, C\}$

$\{C, A\}$

$\{C, B\}$

$\{C, C\}$

3 x 3 = 9

2) ترتيبة بالتكرار $\tilde{\mathbf{A}}_n^k$:

ترتيبة بالتكرار هي كل ترتيبة لk عنصر مختار من بين n عنصر الواحد تلو الآخر بالإرجاع، وقانونها هو

$$\tilde{\mathbf{A}}_n^k = \underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{\text{k مرة}} = \boldsymbol{n^k}$$

مثال1:

صندوق به 5 كريّات خضراء و8 بيضاء، نسحب منه 3 كريات الواحدة تلو الأخرى بالإرجاع

-ما هو عدد الطرق الممكنة للحصول على 3 كريات خضراء؟

-ما هو عدد الطرق الممكنة للحصول على 3 كيات بيضاء؟

مثال2:

أوجد كافة الأعداد المؤلفة من رقمين ثم من 3 أرقام انطلاقا من مجموعة الأرقام الفردية.

تصحيح المثال1:

$$\Omega = \{(\oslash, \oslash, \oslash), (\oslash, \oslash, \oslash), \ldots\ldots, (\oslash, \oslash, \oslash)\}$$

$$\widetilde{A}_{13}^{3} = 13^3 = \mathbf{2197}$$

سحب 3 كريات خضراء:

$$\widetilde{A}_{5}^{3} = 5^3 = \mathbf{125}$$

سحب 3 كريات بيضاء:

$$\widetilde{A}_{8}^{3} = 8^3 = \mathbf{512}$$

سحب كريّتين خضراء وواحدة بيضاء

$$\widetilde{A}_{5}^{2} \times \widetilde{A}_{8}^{1} = 5^{\,2} \times\ 8 = 25\ \times 8 = \mathbf{200}$$

تصحيح المثال 2:

$$\Omega = \{1,3,5,7,9\}$$

التحصيل على رقمين:

$$\widetilde{A}_{5}^{2} = 5^2 = \mathbf{25}$$

التحصيل على 3 أرقام:

$$\widetilde{A}_{5}^{3} = 5^3 = \mathbf{125}$$

3) ترتيبة بدون تكرار: $\mathbf{A_n^k}$

هي كل ترتيب لـ k عنصر مختار من بين n عنصر الواحد تلو الآخر بدون إرجاع وبالتالي لا يمكن العنصر أن يتكرر من مرة واحدة وعددها هو:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots\big(n-(k-1)\big)(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$\mathbf{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

مثال1:

صندوق يحتوي على 10 كريات بيضاء، و6 سوداء نسحب منه أربعة كريات الواحدة تلو الأخرى وبدون إرجاع.

- بكم طريقة يمكن الحصول على 4 كريات؟
- بكم طريقة يمكن الحصول على 4 كريات سوداء؟

مثال2:

في مسابقة توظيف من متصرف إداري، إداري، عون إداري، تقدّم 8 أشخاص.

-ما هو عدد قوائم النجاح الممكن الإعلان عنها؟

مثال3:

قمنا برمي زهرة نرد 3 مرات متتالية، ما هو عدد الحالات التي تكون فيها الأوجه مختلفة عن بعضها البعض؟

تصحيح المثال1:

$$A_{16}^4 = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12!}{12!} = \mathbf{43680}$$

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = \mathbf{360}$$

تصحيح المثال2:

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = \mathbf{336}$$

تصحيح المثال3:

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = \mathbf{120}$$

4) التوفيقة C_n^k:

نسمي توفيقة لـk عنصر مختار من بين n عنصر في آن واحد كل مجموعة جزئية ذات k عنصر مشكلة من n عنصر بغض النظر عن الترتيب (التكرار غير موجود) وقانونها هو:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k_i} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

مثال1:

صندوق يحتوي على 10 كريات خضراء و5 زرقاء نسحب من هذا الصندوق 3 كريات في آن واحد.

- ما هو عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كريات؟
- ما هو عدد الطرق الممكنة لسحب 3 كريات زرقاء؟
- ما هو عدد الطرق الممكنة لسحب كرتين خضراء وواحدة زرقاء؟

مثال2:

يتكون فوج من 12 طالب (ذكور) و8 طالبات (إناث). نريد تشكيل فريق بحث من هذا الفوج.

- ما هو عدد الفرق المشكلة من 3 طلبة؟
- ما هو عدد الفرق المشكلة من طالبتين؟
- ما هو الفرق المشكلة من طالبين وطالبتين؟

تصحيح المثال1:

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!\,(15-3)!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3 \times 2 \times 1 \times 12!} = 5 \times 7 \times 13$$

$$\boldsymbol{C_{15}^{3} = 455}$$

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

$$C_{10}^{2} \times C_{5}^{1} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} \times \frac{5!}{1! \times (5-1)!}$$

$$= 45 \times 5$$

$$\boldsymbol{C_{10}^{2} \times C_{5}^{1} = 225}$$

تصحيح المثال2:

$$C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!}$$

$$\boldsymbol{C_{12}^{3} = 220}$$

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = 28$$

$$C_{12}^2 \times C_8^2 = \frac{12!}{2!\,(12-2)!} \times 28$$

$$C_{12}^2 \times C_8^2 = 66 \times 28 = 1848$$

$$C_{12}^2 \times C_8^2 = 1848$$

5) التبديلة P:

✓ تبدلية بدون التكرار:

تباديل مجموعة من العناصر هو عدد المجموعات الممكنة والمشكلة من كافة تلك العناصر والتي تختلف عن بعضها البعض باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل وعددها هو:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

مثال1:

بكم كيفية يمكن ترتيب أحرف كلمة MATH

$$P_4 = 4! = \mathbf{24}$$

مثال2:

في سباق لـ 8 عدّائين ما هو عدد طرق الوصول الممكنة؟

$$P_8 = 8! = \mathbf{40320}$$

✓ تبدلية بوجود التكرار:

إذا كانت المجموعة U التي تتضمّن n عنصر مجزّأة إلى مجموعات جزئية ذات n_1، n_2، ...n_k.

بحيث لا يمكن التمييز بين عناصر المجموعة الجزئية، فإنّ عدد التباديل في هذه الحال هو:

$$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots . n_k!}$$

مثال: ما هو عدد الكلمات الممكن تشكيلها من أحرف كلمة STATISTIQUES

S	2	A	1
T	3	Q	
I	2	U	

$$\widetilde{P}_{12} = \frac{12!}{3!\, 3!\, 2!\, 1!\, 1!\, 1!\, 1!}$$

ملاحظة: يمكن اعتبار التبديلة P_n كحالة خاصة من الترتيبة A_n^k إذا كان k = n

تمرين 01:

قررت وزارة الداخلية تمييز سياراتها من خلال وضع ترقيم خاص بها يتكون من حرفين مختلفين تتبعها ثلاثة أرقام بحيث لا يكون الرقم الأول صفراً.

ما هو عدد اللوحات التي يمكن طبعها للسيارات؟

الحل:

الحروف هي 26 حرفا $\{A, \ldots . . Z\}$

الحرف الأوّل في اللوحة يمكن اختياره ب 26 طريقة؛

الحرف الثاني في اللوحة يمكن اختياره ب25 طريقة؛

الرقم الأول في اللوحة يمكن اختياره ب9 طرق (0 ملغى).

الرقم الثاني والثالث كلاهما ب 10 طرق.

إذن عدد اللوحات هو:

$$26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = \boxed{585\ 000}$$

تمرين02:

يوجد بمعهد معين 03 أقسام مختلفة بها: 224؛ 112، 82 طالب على التوالي، ونريد اختيار ممثل لكل قسم لينضمّ إلى مجلس إدارة المعهد.

بكم طريقة يمكن اختيار هؤلاء الممثلين للطلاب؟

الحل:

هناك:طريقة مختلفة $224 \times 112 \times 82 = \boxed{2057256}$

تمرين 03:

1) ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع أحرف RECHERCHE؟

2) كم عدد من ستة أرقام يمكننا تشكيل وذلك بأخذ العدد 1 مرتين و2 ثلاث مرات ومرة واحدة العدد3؟

الحل:$\widetilde{P}$

1) $\widetilde{P} = \frac{9!}{2!2!2!3!} = \mathbf{7560}$

2) $\widetilde{P} = \frac{6!}{2!3!1!} = \mathbf{60}$

تمرين 04:

يصنف إنتاج مصنع معين إلى ثلاثة أصناف: جيد؛ متوسط، ورديء.

بكم طريقة مختلفة يمكن الحصول على 10 قطع منها 3 من النوع الجيد؛ خمسة متوسطة و2 من النوع الرديء؟

الحل:

$$\widetilde{P} = \frac{10!}{3!\,5!\,2!} = \mathbf{2520}$$

تمرين 05:

بكم طريقة يمكن توزيع 8 أشخاص على 3 غرف في فندق حيث أن غرفتين من ذات الثلاث أسرة وغرفة ذات سريرين؟

الحل:

$$\widetilde{P} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \mathbf{560}$$

تمرين 06:

7 أشخاص يتجولون بالجبل؛ 3منهم جبليون (من أبناء المنطقة) و4 سواح.

بكم طريقة مختلفة آخذا بعين الاعتبار الترتيب يمكن أن يكون الأشخاص السبعة علماً أن الأول والآخر جبليان؟

الحل:

الشخص الأول والأخير يختاران من أبناء المنطقة الثالثة؛ وعليه فعدد طرق تحقيق ذلك هو:

طرق مختلف $A_3^2 = \mathbf{6}$

فعندما تم تعيين الجبليين واحد في الأمام وواحد في الخلف؛ فإن الخمسة الباقين (4 سواح + 1 جبلي الثالث)

يمكن أن يكون حسب:

طريقة مختلفة $P_5 = 5! = \mathbf{120}$

وعليه فعدد الطرق الكلية هو:

$$A_3^2 . P_5 = 6 \times 120 = \mathbf{720}$$

التمرين 07:

قررت إحدى الشركات إيفاد 12 شخصا للحضور إلى اجتماع تنسيقي جهوي ووضعت تحت تصرفهم 3 سيارات ذات 6 مقاعد؛ 4 مقاعد ومقعدين.

بكم طريقة مختلفة يمكن توجيه هؤلاء الأشخاص إلى السيارات الثلاث بفرض:

1- يمكن لأي شخص من هؤلاء السياقة (كلهم لهم رخصة سياقة).

2- هناك 4 أشخاص فقط من بين 12 شخصاً يملكون رخصة سياقة.

الحل:

1- تباديل مع التكرار (التكرار يتمثل في عدد المقاعد الموجودة بكل سيارة).إذن:

طريقة $\widetilde{P} = \frac{12!}{2!4!6!} = \mathbf{13860}$

2- تعيين 3 أشخاص من بين 4 للسياقة بـ:

طريقة $A_4^3 = \mathbf{24}$

بعد تعيين الأشخاص الثلاثة الذين سوف يقودون السيارات يبقى 9 = (12-3)

يمكن توجيههم إلى السيارات بـ:

$$\widetilde{P}_9^{1,3,5} = \frac{9!}{5!\,3!\,1!} = \mathbf{504}$$

وعليه العدد الكلي في هذه الحال هو:

طريقة مختلفة: $A_4^3 - \widetilde{P}_9^{1,3,5} = 24 \times 504 = \mathbf{12096}$

تمرين 08:

هل يوجد عدد طبيعي تام n حيث أن:

$$A_n^1 + A_n^3 = 9 \qquad n \in N^+$$

الحل:

$$A_n^1 + A_n^3 = 9 \Leftrightarrow n + n(n-1)(n-2) = 9$$
$$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 3n - 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow n^2(n-3) + 3(n-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (n-3)(n^2+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n = 3}$$

تمرين 09:

ما هي القدرة (النظرية) للشبكة الهاتفية الجزائرية إذا كان رقم المناداة متكون من ستة أرقام؟

الحل:

$$\widetilde{A}_{10}^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = \mathbf{1\,000\,000}$$

تمرين10:

أوجد كافة الأعداد المؤلفة من:

- رقمين.
- 3 أرقام.
- 4 أرقام.

وذلك انطلاقا من مجموعة الأعداد الفردية ضمن القاعدة العشرية.

الحل:

$$\widetilde{A}_5^2 = 5^2 = \mathbf{25}$$

$$\widetilde{A}_5^3 = 5^3 = \mathbf{125}$$

$$\widetilde{A}_5^4 = 5^4 = \mathbf{625}$$

تمرين 11:

قام 3 لاعبين برمي 3 قطع فردية، ما هو عدد النتائج الممكنة؟

ما هو عدد النتائج التي تكون النقاط على الأوجه مختلفة تماما؟

$$\widetilde{A}_6^3 = 6^3 = \mathbf{216}$$

$$\widetilde{A}_6^3 = \mathbf{120}$$

الفصل الثالث: مدخل لنظرية الإحتمالات.

تعتمد نظرية الإحتمالات على مجموعة من المبادئ و الأساسيات التي نتعرف عليها بالتفصيل فيما يلي:

I. مبادئ نظرية الإحتمالات:

كما سبقت الإشارة إليه فإن نظرية الإحتمالات تعتمد على مجموعة من الأساسيات، و بهدف الإلمام الجيد بمفهوم هذه النظرية و تبسيط حساب الإحتمال فإننا نستعرض ذلك في العناوين الفرعية التالية:

1 - التجربة العشوائية:

تُعتبر التجربة العشوائية الأساس الذي تُبنى عليه نظرية الإحتمال، فلولا العشوائية لما كانت هناك ربما حاجة لحساب الإحتمال، حيث أننا نجد أن مصطلح كلمة "عشوائية" يدل على شيئ أو حادث يتم بصفة عرضية و غير مقصودة و متعمدة كما أن هذا الحادث قد يقع و قد لا يقع عند إجراءنا للتجربة و بالتالي فإن هذه الأخيرة يُمكن أن تؤدي إلى نتائج مختلفة لو أعدنا إجراءها في نفس الظروف طالما أنها مبية على الصدفة و العرضية.

و عليه فإنه يُمكن القول باختصار أن التجربة العشوائية هي: " أي تجربة تعتمد نتيجتها النهائية على الصدفة حيث لا يُمكن الجزم بها و معرفتها مسيقاً قبل إجراء التجربة كما أنه يُمكن أن تقود إلى نتائج مختلفة لو أُعيدت في نفس الظروف، مع ملاحظة أنه قد يكون ممكناً معرفة كل النتائج الممكنة لهذه التجربة".

مثال 1:

لعل أحد أكثر الأمثلة شيوعاً و أكثرها إستعمالاً عند دراسة نظرية الإحتمالات هو "رمي زهرة النرد"؛ فإذا ما قمنا برمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة مثلاً في الهواء، فإن هذا يُعبر عن قيامنا بتجربة عشوائية، فرغم أن كلنا يعرف أننا سوف نحصل على رقم من 1 إلى 6

التي تعكس الأوجه الستة الممكنة لزهرة النرد إلا أننا لا نعلم سلفاً أي رقم بالضبط، من بين هذه الأرقام، سوف نحصل عليه حيث أن ذلك مبني على الصدفة و العشوائية.

مثال 2:

لنفرض أن صندوقاً به مجموعة من الكريات البيضاء، الحمراء و الزرقاء مثلا؛ و نريد أن نقوم بسحب كرية بصفة عشوائية من هذا الصندوق. فإننا لا نعلم قبل قيامنا بعملية السحب و ملاحظة النتيجة أي كرية سوف نحصل عليها رغم معرفتنا أنها أكيد سوف تحمل أحد الألوان الثلاثة المذكورة، و بالتالي نكون بصدد تجربة عشوائية هنا كذلك.

مثال 3:

لو أنك قمت بإلقاء قطعة نقدية متوازنة في الهواء فسوف تحصل إما على "صورة" أو "شعار" (Pile ou Face) لكن لا تعلم مسبقاً أي وجه سوف تحصل عليه، و بالتالي فإنك قمت بتجربة عشوائية.

إختيار إسم بالصدفة من قائمة الطلبة، إدخال كلمة سر بصفة عشوائية لحساب معين، إختيار رقم هاتف عشوائياً للفوز مثلا،وزن جسم معين،...كلها تعبر عن تجارب عشوائية.

2 - فضاء العينة:

أو الفضاء العيني، يُرمز له عادة بـ "Ω" و هو عبارة عن مجموعة تتضمن كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. عدد عناصر هذه المجموعة الكلية (عدد النتائج المكونة لفضاء العينة) يُعرف بـ"عدد الحالات الممكنة أو الكلية" و هو ما نرمز له بـ $\text{Card}(\Omega) = N$.

مثال 4:

بالرجوع إلى المثال 1 السابق، فإنه عند رمينا لزهرة النرد مرة واحدة فإن عدد النتائج الكلية و بالتالي عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة العشوائية البسيطة هو "ستة" كما هو معروف، أي: $Card\ (\Omega) = N = 6$؛ أما فضاء عينة هذه التجربة فيُعبر عنه كما يلي:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

مثال 5:

بالرجوع كذلك إلى المثال 2 السابق، فإذا ما افترضنا أن الصندوق به كريتين بيضاوتين، ثلاثة كريات حمراء و خمسة كريات زرقاء، فإن مجموع الكريات المتواجدة بالصندوق هو إذن عشرة، و عليه عندما نقوم بسحب كرية واحدة بالصدفة فإن عدد الحالات الممكنة هنا سوف يساوي "10".

مثال 6:

نقوم برمي قطعة نقدية متوازنة مرتين متتاليتين، فما هو عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة العشوائية؟ و ما هو فضاء العينة الخاص بها؟

الجواب:

كما هو معلوم فعند كل رمية للقطعة النقدية سوف نحصل إما على "صورة" أو "شعار" (Pile ou Face) و نكتب باختصار P أو F و هما نتيجتان ممكنتان (2) للرمية الواحدة فقط.

الآن نحن بصدد رميها مرتين متتاليتين بمعنى أننا نكرر التجربة السابقة مرتين اثنتين، و بالتالي فإن عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة، المركبة في حد ذاتها من تجربتين فرعيتين، سوف يكون، إستناداً إلى قاعدة الضرب المعروفة، كما يلي:

$$Card\ (\Omega) = 2 \times 2 = 4 = N$$

أما فضاء العينة فيمكن حصره في المجموعة التالية:

$$\Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$$

حيث أن كل نتيجة من هذه النتائج الأربعة مكونة من نتيجتين جزئيتين كما هو ملاحظ بما أننا قمنا برمي القطعة مرتين.

مثال 7:

لنفرض أنك قمت برمي زهرة نرد متوازنة مرتين متتاليتين. ما هو عدد النتائج الممكنة؟ ثم قم بتحديد فضاء العينة لهذه التجربة العشوائية.

3 - الحادث (أو الحادثة):

عند قيامنا بتجربة عشوائية ما فإننا نهتم نظير ذلك باحتمال و إمكانية وقوع (أو عدم وقوع) شيئ معين ذي صلة بهذه التجربة. هذا الشيئ الذي نبحث في احتمالية وقوعه من عدمها يُصطلح عليه في نظرية الاحتمالات بـ"الحادث" (أو الحادثة).

إذن و طالما أن الحادث مقترن بتجربة عشوائية لها فضاء عينة (مجموعة كلية)، فإنه سوف يُعبر عن مجموعة محتواة داخل هذا الفضاء، مع ملاحظة أنه يُمكن أن تكون مجموعة الحادث مجموعة خالية ($\emptyset$) أو جزئية من المجموعة الكلية أو مجموعة فضاء العينة كاملة.

قد يكون الحادث بسيطاً إذا كانت مجموعته تحتوي على نتيجة (عنصر) واحدة فقط من مجموعة النتائج الكلية المكونة لفراغ العينة؛ و قد يكون مركباً إذا كان يشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج الممكنة، و عليه فإن الحادث المركب يُمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.

نرمز للحوادث عادة بالرموز اللاتينية: A, B, C,... و هكذا و هو ما سنتبعه في هذه المطبوعة؛ كما يُرمز لعدد النتائج المكونة لمجموعة الحادث بـ: Card (A) = n(A), Card (B)

n(B), Card (C) = n(C),... = بقي أن نعرف هذا العدد (عدد عناصر مجموعة الحادث) يُعرف بـ "عدد الحالات الملائمة (أو المواتية) لذلك الحادث" و هي الحالات التي تُؤدي إلى وقوع الحادث موضع الاهتمام في حال ظهورها عند إجراء التجربة العشوائية.

مثال 8:

نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة و نهتم بإحتمال الحصول على:

أ. الرقم 2؛

ب. رقم زوجي؛

ج. رقم أقل من 5.

عندئذ يكون لدينا الجواب التالي:

بداية و كما عرفنا سابقاً، فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو "ستة" كما هو بيِّن من فضاء عينتها، بمعنى: (عدد الحالات الممكنة) Card (Ω) = N = 6 و Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

الآن ما نهتم به نفرض له رموز حوادث بداية من A، B، C... و هكذا حتى تسهل الكتابة الرياضية و الحسابات فيما بعد حيث نعرف مدلول كل حادث مباشرة من الترميز الخاص به. إذن:

أ. الحادث الأول يُعبر عن إهتمامنا بإمكانية الحصول على الرقم 2 و رمز هذا الحادث هو A. و بالتالي سوف نكتب مباشرة باختصار كما يلي:

A: "الحصول على الرقم 2". مجموعة عناصر هذا الحادث تشمل عنصراً واحداً فقط من المجموعة الكلية و هو الرقم 2، أي: A = {2} فلذلك هو

يُعتبر حادثاً بسيطاً عدد الحالات الملائمة له هو حالة واحدة فقط بمعنى: Card (A) = n(A) = 1 (1 هو عدد الحالات الملائمة لـ A من جملة الحالات الممكنة و ليس الرقم 1 من ذلك).

ب. الآن بنفس المنهجية و مباشرة نكتب:

B: "الحصول على رقم زوجي".

مجموعة عناصر هذا الحادث هي: $B = \{2, 4, 6\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "ثلاثة" بمعنى: Card (B) = n(B) = 3.

لاحظ أنه يُمكن إعتبار هذا الحادث مركباً حيث أنه يتركب من ثلاثة نتائج (عناصر) بسيطة من المجموعة الكلية: 2، 4، 6.

ج. C: "الحصول على رقم أقل من 5".

مجموعة عناصر هذا الحادث هي: $C = \{1, 2, 3, 4\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "أربعة" (Card (C) = n(C) = 4) و هو كذلك حادث مركب من أربعة نتائج جزئية.

ختاماً و بعد إجرائنا للتجربة العشوائية (تم رمي زهرة النرد) و بعد ظهور النتيجة النهائية و معرفتها الآن فإنه إذا كانت تلك النتيجة ملائمة للحادث و بالتالي تنتمي إلى مجموعته فإننا نقول أن ذلك الحادث قد وقع فعلاً و إلا فلا.

فمثلا نفرض أنه بعد الرمي تم الحصول الرقم 6؛ إذن سوف نقول أن الحادث B قد وقع طالما هذه النتيجة تلائمه و محتواة في مجموعته بخلاف الحادثين A و C الذين لم يقعا حيث لا تلائمهما النتيجة النهائية (الرقم 6).

أما إذا فرضنا أن النتيجة كانت 4 مثلاً فإننا نقول أن الحادثين B و C فقط قد وقعا أما الحادث A فلم يقع. و لو فرضنا ختاماً أن النتيجة كانت 2، هنا نقول أن الحوادث الثلاثة A، B و C قد وقعت فالرقم 2 يلائمهم جميعاً و ينتمي إليهم كلهم. و هكذا....

مثال 9:

نرمي قطعة نقدية متوازنة مرتين متتاليتين و نعرِّف مجموعة من الحوادث و مجموعة الحالات الملائمة لكل حادث مباشرة على نحوٍ موالٍ:

أولاً علينا معرفة عدد الحالات الكلية (الممكنة) و تحديد فضاء العينة:

$$\Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$$

و عدد الحالات الممكنة هو أربعة.

A: "الحصول على P مرة واحدة فقط"

عدد الحالات الملائمة لـ A هي إثنتان 2 و هي $A = \{(P,F);(F,P)\}$

B: "الحصول على P مرة واحدة على الأقل". بمعنى مرة واحدة فأكثر و بالتالي:

عدد الحالات الملائمة لـ B هي ثلاثة 3 و هي $B = \{(P,F);(F,P);\ (P,P)\}$

C: "الحصول على P مرة واحدة على الأكثر". أي مرة واحدة فأقل و عليه فإن عدد الحالات الملائمة لـ C هي ثلاثة 3 و هي $C = \{(F,F);(P,F);(F,P)\}$

4 - الأنواع الرئيسية للحوادث:

يُمكن تصنيف الحوادث إلى ثلاثة أصناف رئيسية:

أ. الحادث المستحيل:

لنفرض أنك قمت بسحب كرية بصفة عشوائية من صندوق به كريات سوداء فقط؛ فهل يُمكن أن تكون الكرية المسحوبة بيضاء؟ بالطبع لا. كذلك لا يُمكننا الحصول مثلاً على الرقم 7 عند رمينا لزهرة نرد فذلك مستحيل.

إذن يُكننا القول أن الحادث المستحيل هو حادث لا يُرجى و لا يُمكن وقوعه إطلاقاً عند إجراءنا لتجربة عشوائية ما؛ و حيث يستحيل وقوع هذا الحادث فإنه لا توجد و لا حالة تُلائم هذا الحادث و بالتالي و لا عنصر ضمن مجموعته بل ستكون مجموعة عناصره عبارة عن مجموعة خالية $\emptyset$.

ب. الحادث الأكيد:

على عكس الحادث المستحيل يُمكننا أن ندرك مباشرة أن الحادث الأكيد هو حادث يقع بالضرورة و بصفة حتمية عند إجراءنا لتجربة عشوائية ما؛ فبديهي مثلاً و أكيد أننا سوف نحصل على رقم من 1 إلى 6 لو قمنا برمي زهرة نرد. كما أننا سوف نحصل بالتأكيد على كرية سوداء اللون عند سحب كرية من صندوق به كريات سوداء فقط، و هكذا...

و حيث أن هذا الحادث مؤكد وقوعه فإن مجموعته سوف تشمل كافة فضاء العينة Ω و بالتالي كل الحالات الممكنة للتجربة تلائمه.

ج. الحادث العشوائي:

عرفنا الآن أننا بين نوعين من الحوادث و هما إما حادث يقع بصفة أكيدة عند قيامنا بتجربة عشوائية ما، أو حادث مستحيل لا يقع إطلاقاً عند إجراءنا للتجربة. إذن يتبادر إلى ذهننا أنه بقي لنا ذلك الحادث الذي قد يقع كما قد لا يقع عند إجراء التجربة العشوائية و أمر وقوعه من عدمه متروك للصدفة و العشوائية في إنتظار النتيجة النهائية

للتجربة طالما لا يُمكننا الجزم بذلك مسبقاً. يُعرف هذا الحادث بـ"الحادث العشوائي" و هو لا مستحيل و لا أكيد بل مُحتمل الوقوع، و هو ما تُعالجه و تبحث فيه نظرية الاحتمالات بصفة خاصة.

فمثلاً لو أنك قمت برمي زهرة النرد مرة واحدة و كنت مهتم بالحصول على رقم فردي، فإن هذا الأمر و الحادث قد يقع (يحدث) و قد لا يقع (لا يحدث) و لا تدري مسبقاً ما هو صائر.

الأمثلة السابقة تحت عنوان الحادث كلها كانت تُعبر عن حوادث عشوائية.

5 - العمليات على الحوادث:

سوف نقوم تحت هذا العنوان بالتطرق إلى جملة من العمليات و العلاقات بين الحوادث و هي مستقاة في الواقع من العمليات على المجموعات التي نعرفها في نظرية المجموعات؛ و من أجل تبسيط الأمر دعنا نفترض حادثين فقط A و B متعلقين بنفس التجربة العشوائية، و ما يُقال في هذا الشأن ينسحب على أكثر من حادثين إذ المغزى هنا الإلمام بأساس هذه العمليات.

أ. إتحاد الحوادث:

إذا كنا أمام تجربة عشوائية ما، فضاء عينتها Ω و عدد حالاتها الممكنة (عناصر Ω) هو N؛ و كان لدينا الحادثين A و B متعلقين بهذه التجربة لكل منهما مجموعته الجزئية الخاصة به و الملائمة له، فما المقصود بـ "A إتحاد B" أو إختصاراً "AUB"؟ و ماذا يعني بلغة الإحتمالات؟

للجواب على ذلك دعنا نستعين بالمثال التالي:

مثال 10:

نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة و نعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "الحصول على رقم زوجي".

B: "الحصول على رقم أقل من 5".

حينئذ يكون لدينا عدد الحالات الممكنة N = 6 و $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

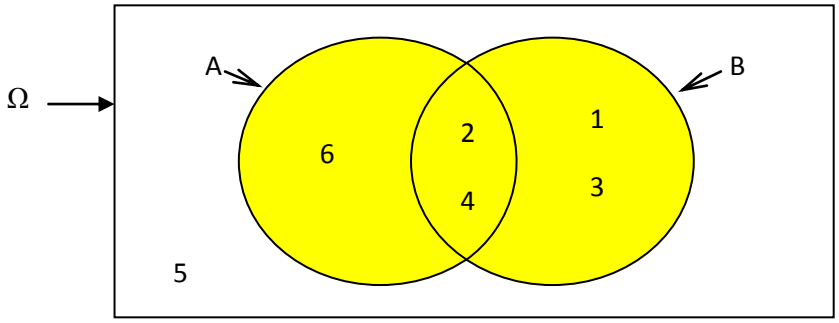
A: "الحصول على رقم زوجي".

مجموعة عناصر هذا الحادث هي: $A = \{2, 4, 6\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "ثلاثة".

B: "الحصول على رقم أقل من 5".

مجموعة عناصر هذا الحادث هي: $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "أربعة".

الآن نهتم بالحادث الذي بدوره يُمثل إتحاد الحادثين السابقين A و B (AUB)، و من أجل ذلك نستعين بالمخطط التوضيحي الشائع ألا وهو مخطط "فن" (Venn).



كما يوضحه الشكل فإن الحادث " AUB" يعني " الحصول على رقم زوجي أو رقم أقل من 5"، أي "A أو B" و يحصل ذلك بجمع العناصر الملائمة لكلا الحادثين في

مجموعة واحدة تُعبر عن الإتحاد دون تكرار للعناصر المشتركة طبعاً، و يُمكن أن نكتب:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} .$$

و عليه يُمكن القول أن إتحاد حادثين A و B يُعبر عن وقوع أحدهما على الأقل، بمعنى وقوع أحدهما (الأول أو الثاني) أو ممكن كليهما (في حال وجود تقاطع و عناصر مشتركة بينهما كما في هذا المثال) و هو ما يدل على أن كلمة "أو" هنا ليست إقصائية إما A فقط أو B فقط بل ممكن الإثنين معاً.

ختاماً فإن الحادث "A أو B" الذي يدل على الإتحاد هو عبارة عن مجموعة جزئية من المجموعة الكلية (من فضاء العينة Ω) التي تحتوي على النتائج الممكنة الواقعة إما في A أو في B أو ممكن فيهما معاً (إذا كان ذلك ممكنا بتقاطع)، و هي المجموعة الجزئية المُعبر عنها رياضياً (AUB) و التي تعني "وقوع حادث واحد على الأقل".

مثال 11:

بالعودة إلى مثال رمي قطعة نقدية متوازنة مرتين متتاليتين لدينا:

$$\Omega = \{(P,P); (P,F); (F,P); (F,F)\}$$

و نعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "الحصول على P مرة واحدة على الأقل". $A = \{(P,F); (F,P); (P,P)\}$

B: "الحصول على F مرة واحدة على الأقل". $B = \{(P,F); (F,P); (F,F)\}$

و إتحاد هذين الحادثين هو:

AUB: " الحصول على P أو F مرة واحدة على الأقل" و مجموعة الحالات الملائمة لهذا الإتحاد هي: $A \cup B = \{(P,F);(F,P);(P,P);(F,F)\}$

لاحظ هنا في هذا المثال أن مجموعة الإتحاد هي نفسها مجموعة الحالات الممكنة مما يدل على أن الحادث المعبر عن الإتحاد (AUB) هو حادث أكيد هنا، و هذا شيئ منطقي و بديهي حيث أننا سنحصل حتماً على P أو F مرة واحدة على الأقل عند رمينا قطعة نقدية مرتين، أي أن أحد هذين الحادثين A أو B سوف يقع حتماً في هذا المثال (أو كلاهما).

ب. تقاطع الحوادث:

بخلاف الإتحاد الذي كان يُعبر عن وقوع إما الحادث A أو B أو كلاهما في حال وجود التقاطع؛ فإن تقاطع الحادثين A و B يُعبر عن وقوعهما معاً و في آن واحد، و عليه نجده يشمل كافة النتائج (العناصر) المشتركة بينهما، و يُعبر عن ذلك رياضياً بـ "$A \cap B$".

مثال 12:

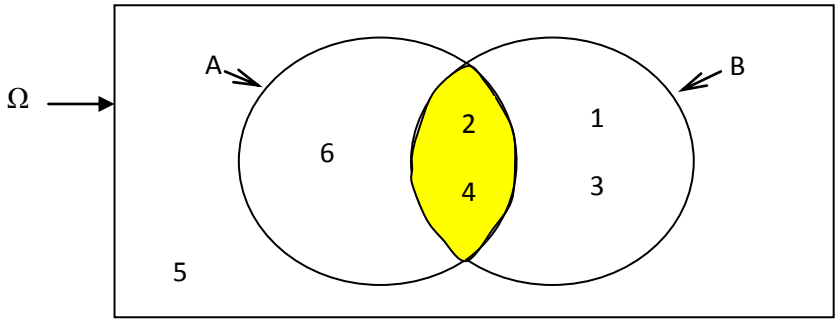
إعتماداً على معطيات المثال 10 السابق كان لدينا:

A: "الحصول على رقم زوجي". $A = \{2,4,6\}$

B: "الحصول على رقم أقل من 5". $B = \{1,2,3,4\}$

فإذا ما أردنا تحديد تقاطع هذين الحادثين فإن هذا التقاطع يعني الحصول على رقم زوجي و في نفس الوقت يكون أقل من 5، و نكتب هذا الحادث "$A \cap B$" المعبر عن تقاطع الحادثين A و B كما يلي:

$A \cap B$: " الحصول على رقم زوجي و أقل من 5". و لو مثلنا هذا سيكون الشكل كاتالي:



و كما هو واضح فإن الأرقام الزوجية التي هي أقل من 5 هي: 2 و 4 و هي العناصر المشتركة بين المجموعتين و المعبرة عن التقاطع بين الحادثين و عليه نكتب:

$$A \cap B = \{2, 4\}.$$

و كملاحظة يُمكن أن نلحظ أن الإتحاد يُعبر عنه لفظاً بـ " أو" و هو يعني وقوع حادث واحد على الأقل و يُرمز له بـ " $\cup$" كما هو معروف و جبرياً يدل على الجمع "+"؛ في حين أن التقاطع يُعبر عنه لفظاً بـ " و" و هو يعني وقوع الحوادث مجتمعة (معاً) في آن واحد و يُرمز له بـ " $\cap$" كما هو معروف و جبرياً يدل على الضرب "×"، كما سنتطرق له لاحقاً عند دراستنا لقوانين الإحتمال.

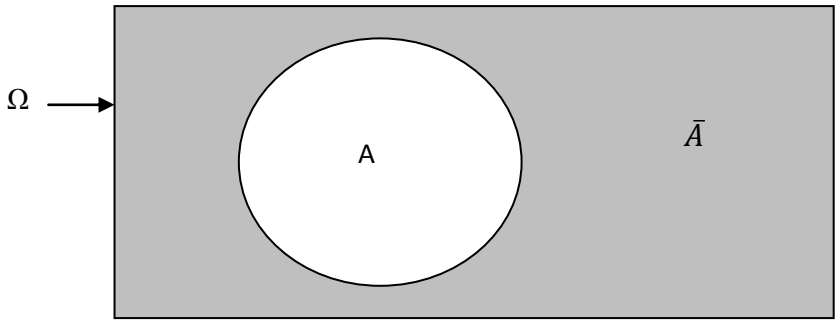
ج. الحدث العكسي:

يُعرف كذلك بالحادث المكمل أو المتمم، و ما من حادث إلا و له حادث عكسي، فإذا ما إعتبرنا A حادثاً متعلقاً بتجربة عشوائية معينة، فإن الحادث العكسي له، الذي نرمز له بـ" $\bar{A}$"، هو الحادث الحادث الذي ينفي وقوع A، فهو يقع إذا و فقط إذا لم يقع هذا الأخير، و بالتالي فالحادث العكسي يشمل كل نتائج التجربة العشوائية (كافة عناصر المجموعة الكلية أو جميع الحالات الممكنة) ما عدا تلك النتائج المكونة للحادث A (عناصر مجموعة A أو الحالات الملائمة لـA).

من خلال التعريف السابق يُمكن أن نستنتج نقطتين غاية في الأهمية و هما:

1) أي حادث و عكسه هما متانفيان دائما حيث يستحيل وقوعهما معاً طالما أنه ليست هناك و لا حالة ملائمة لهذا و ذاك في نفس الوقت، بمعنى أن ليس هناك تقاطع بينهما إطلاقاً بل التقاطع بينهما عبارة عن مجموعة خالية. (أنظر الشكل اللاحق)

2) طالما أن الحادث العكسي يشمل جميع نتائج فضاء العينة غير الملائمة لـ A فإن ذلك يعني أنه لو جمعنا و أضفنا عدد الحالات الملائمة لـ A مع عدد الحالات الملائمة للعكسي له $\bar{A}$ لحصلنا على العدد الإجمالي للحالات الممكنة، بمعنى أن إتحادهما سوف يُعطينا فضاء العينة Ω كاملاً. (أنظر الشكل اللاحق)



$A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup \bar{A} = \Omega$

II. الإحتمال:

1 - تعريف:

الإحتمال باختصار هو "عدد يصف إمكانية وقوع حادث ما"؛ فلو أننا قمنا مثلاً برمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة، و نهتم بالحصول على رقم فردي، و ليكن حادثاً A، لتبادر إلى ذهننا مباشرة أن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة العشوائية هو "ستة" (من 1 إلى 6) في حين أن عدد الحالات الملائمة للحادث محل إهتمامنا هي "ثلاثة" (1، 3، 5)؛ فإذا ما أردنا الآن حساب إحتمال وقوع هذا الحادث "الحصول على رقم فردي" لقلنا أن النسبة ثلاثة من ستة (3/6) تُعبر عن قياس منطقي و معقول لإمكانية وقوع هذا الحادث و بالتالي إحتمال الحصول

على رقم فردي. و هذه النسبة ما هي في الحقيقة إلا عدد الحالات الملائمة لـ A قسمة عدد الحالات الممكنة.

و عليه يُمكن أن نعرف الإحتمال بصفة عامة كما يلي:

إذا كان Ω فضاء عينة خاصاً بتجربة عشوائية معينة عدد عناصره، التي نطلق عليها بعدد الحالات الممكنة للتجربة، هو N. و كان A مثلاً حادثاً متعلقاً بهذه التجربة عدد عناصره، التي تُعرف بعدد الحالات الملائمة له، هو n؛ فإن إحتمال وقوع الحادث A هو: "عدد الحالات الملائمة لـ A مقسوماً على عدد الحالات الممكنة". و ذلك بفرض أن جميع نتائج فضاء العينة (أي جميع الحالات الممكنة) لها نفس الحظ في الوقوع (متساوية الإمكانية).

و بالتالي نكتب رياضياً:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_A}{N}$$

حيث يدل الحرف P على كلمة Probability.

مثال 13:

نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة. أوجد إحتمال:

1) الحصول على رقم لا يقل عن 4؛

2) الحصول على رقم لا يزيد عن 5؛

3) الحصول على رقم يزيد عن 3.

الجواب:

من أجل حساب الإحتمالات المطلوبة علينا دائماً معرفة عدد الحالات الممكنة (عدد عناصر Ω) أولاً، ثم بعد ذلك إن لم تكن الحوادث المعبر عنها في شكل أسئلة معرفة برموز فعلينا أن نفرض لها ترميزات مثل ما سبق بيانه عندما تكلمنا عن الحوادث، و من ثمة يجب تحديد عدد الحالات الملائمة لكل حادث، حتى تسهل فيما بعد الكتابة الرياضية و حساب الإحتمالات.

إذن:

عدد الحالات الممكنة $N = 6$ و $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

و نعتبر الحوادث التالية حسب ما هو مطلوب:

1) A: " الحصول على رقم لا يقل عن 4".

مجموعة العناصر الملائمة لـ A هي: $A = \{4, 5, 6\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "ثلاثة"$(n_A=3)$.

و بالتالي فإن إحتمال وقوع هذا الحادث و بالتالي الحصول على رقم لا يقل عن 4 هو:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2) B: " الحصول على رقم لا يزيد عن 5".

مجموعة العناصر الملائمة لـ B هي: $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "خمسة"$(n_B=5)$.

و عليه فإن إحتمال الحصول على رقم لا يزيد عن 5 هو:

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ B}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_B}{N} = \frac{5}{6}$$

3) C: " الحصول على رقم يزيد عن 3".

مجموعة العناصر الملائمة لـ C هي: $C = \{4, 5, 6\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "ثلاثة"($n_C=3$) .

و عليه فإن إحتمال الحصول على رقم يزيد عن 3 هو:

$$P(C) = \frac{n_C}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

☚ لا حظ أن الحادث C هو نفسه الحادث A لكن بصيغة أخرى.

مثال 14:

عند رمي قطعة نقدية متوازنة مرتين متتاليتين، ما إحتمال الحصول على:

1) P مرة واحدة فقط؛

2) P مرة واحدة على الأكثر؛

3) F مرتين على الأكثر.

الجواب:

عدد الحالات الممكنة هو أربعة:

$$\Omega = \{(P,P); (P,F); (F,P); (F,F)\}$$

و نعتبر الحوادث كما يلي:

1) A: "الحصول على P مرة واحدة فقط". $A = \{(P,F); (F,P)\}$

عدد الحالات الملائمة لـ A هو "2".

و عليه فإن الإحتمال المطلوب هو:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) B: "الحصول على P مرة واحدة على الأكثر ". $B = \{(P,F); (F,P); (F,F)\}$

عدد الحالات الملائمة لـ B هو "3".

و عليه فإن الإحتمال المطلوب هو:

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

3) C: "الحصول على F مرتين على الأكثر ". $C = \{(P,P); (P,F); (F,P); (F,F)\}$

عدد الحالات الملائمة لـ C هو "4".

و عليه فإن الإحتمال المطلوب هو:

$$P(C) = \frac{4}{4} = 1$$

☚ لاحظ أن هذا الحادث الأخير هو حادث أكيد و هو ما تؤكده نتيجة إحتماله التي وجدناها تساوي الواحد الصحيح؛ و هذا شيئ منطقي و أكيد كان بإمكاننا كتابة مباشرة أنه حادث أكيد حيث أنه لما نرمي قطعة نقدية مرتين فإننا لو حصلنا على F (و نفس الشيء لـ P) فسوف نحصل عليه مرتين على الأكثر بمعنى إما سوف لن نحصل عليه مطلقاً ولا مرة، أو نحصل عليه مرة واحدة قد تكون في الرمية الأولى أو الثانية، أو مرتين في كلا الرميتين كما توضحه مجموعة C التي تساوت في عناصرها مع المجموعة الكلية Ω.

مثال 15:

صندوق يحتوي على ستة كريات سوداء، أربعة بيضاء و عشرة حمراء. نسحب من هذا الصدوق كرية واحدة بالصدفة؛ فما إحتمال أن تكون سوداء؟ ثم ما إحتمال أن تكون حمراء؟

الجواب:

الصندوق به إجمالاً عشرون كرية، و بالتالي عند سحب كرية واحدة منه أمامنا عشرون إمكانية لذلك و هو ما يُمثل عدد الحالات الممكنة. أما الإحتمالات المطلوبة فهي:

1) A: "الحصول على كرية سوداء".

عدد الحالات الملائمة لـ A هو "6". إذن : $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

2) B: "الحصول على كرية حمراء ".

عدد الحالات الملائمة لـ B هو "10". إذن: $P(B) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

2 - خصائص الإحتمال:

أ. مثلما يُمكن ملاحظته في كافة الأمثلة السابقة المتعلقة بحساب الإحتمالات، فإن نتيجة أي إحتمال هي تتراوح بين "الصفر" و "الواحد" و لا يُمكن أبدا أن تخرج عن هذا المجال فهي محصورة فيه دائما. و إن وُجدت نتيجة خارج ذلك المجال فذلك يدل على وجود خطأ ما.

و يُمكن التعبير عن هذه الخاصية رياضياً و إستنتاجها كما يلي:

إذا كان A مثلاً حادثاً متعلقاً بتجربة عشوائية معينة فضاء عينتها Ω فإننا لو نظرنا في عدد الحالات الملائمة لهذا الحادث (n) من العدد الكلي الممكن لوجدنا هذا العدد إما "صفرا" كحد أدنى يدل على عدم وجود أي حالة ملائمة (و بالتالي تكون مجموعته عبارة

عن مجموعة خالية)، أو نجده يساوي عدد الحالات الممكنة كافة (N) كحد أقصى (مجموعته مطابقة لفضاء العينة)؛ و بقسمة كل الأطراف على عدد الحالات الممكنة (N) عند حسابنا للإحتمال سوف نجد أن إحتمال الحادث A يتراوح بين "الصفر" و "الواحد". أي:

$$\forall A \in \Omega: A \subseteq \Omega: 0 \leq n \leq N \Leftrightarrow \frac{0}{N} \leq \frac{n}{N} \leq \frac{N}{N}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

ب. إحتمال الحادث العكسي:

تحت عنوان الحادث العكسي سابقاً عرفنا أن ما من حادث إلا و له حادث عكسي، و عرفنا كذلك أن الحالات الملائمة للعكسي هي كافة الحالات الممكنة ماعدا تلك الملائمة للحادث المباشر، بمعنى هي المجموعة الكلية مطروحا منها مجموعة هذا الأخير كما (راجع الشكل السابق)؛ فإذا علمنا أن عدد الحالات الكلية الممكنة (مجموعة Ω) هو N، و عدد الحالات الملائمة للحادث A مثلاً هو n (مجموعة A)، فيمكننا حينئذ الحصول على عدد الحالات الملائمة للحادث العكسي لـ A و الذي نرمز له بـ $\bar{A}$ و هذا العدد يساوي: N-n، و إحتمال هذا الحادث العكسي هو:

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } \bar{A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_{\bar{A}}}{N} = \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n}{N} = 1 - P(A).$$

و بالتالي لدينا دائما العلاقة التالية: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ، و هذا طبيعي طالما أن إتحاد أي حادث و عكسه يُشكل لنا المجموعة الكلية Ω ، و أنهما متنافيان (غير متقاطعان أبداً).

ملاحظات:

- من خلال هذه العلاقة التالية إذا كان أحد الإحتمالين معلوم يُمكن مباشرة إيجاد إحتمال الآخر بطرحه من الواحد؛

☚ نلجأ عادة إلى حساب إحتمال الحادث العكسي كطريق مختصر لحساب إحتمال الحادث الأصلي (المباشر) بالإستفادة من العلاقة السابقة، لأنه عادة ما تكون الحالات الملائمة للعكسي أقل بكثير من تلك الملائمة للمباشر بمعلومية عدد الحالات الكلية طبعاً.

مثال 16:

نرمي قطعة نقدية متوازنة ثلاثة مرات متتالية. أحسب بطريقتين إحتمال الحصول على:

1) P مرتين على الأكثر؛

2) F مرتين على الأقل.

الجواب:

دائماً علينا تحديد و معرفة عدد الحالات الممكنة أولاً و كتابة فضاء العينة إذا كان هذا العدد مناسب حسب المثال كما في هذه الحال.

إذن و طالما نحن نرمي القطعة ثلاثة مرات فيُمكننا مباشرة معرفة عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة إعتماداً على قاعدة الضرب التي تُشكل مبدءاً أساسياً في عملية العد و التحليل التوفيقي، و العدد هنا هو: $8 = 2 \times 2 \times 2$ (حيث أن كل رمية تحتمل نتيجتان 2 ممكنتان).

الآن دعنا نحدد فضاء عينة هذه التجربة و حالاتها الممكنة:

$$\Omega = \{(P,P,P); (F,P,P); (P,F,P); (P,P,F); (F,F,P); (F,P,F); (P,F,F); (F,F,F)\}$$

و كما يُمكن ملاحظته فإن عدد الحالات الممكنة هو فعلاً ثمانية.

الآن نمر إلى حساب الإحتمالات المطلوبة بطريقتي الحادث المباشر و الحادث العكسي كما يلي:

1) A: "الحصول على Pile مرتين على الأكثر"

مرتين على الأكثر تعني إما عدم الحصول على P إطلاقاً أو الحصول عليها مرة واحدة (وهنا لدينا ثلاث حالات فقد تكون في الأولى أو الثانية أو الثالثة) أو مرتين (وهنا كذلك أمامنا ثلاث حالات فقد تكون في الأولى و الثانية، أو الأولى و الثالثة، أو الثانية و الثالثة). و بالتالي نحن أمام سبعة (7) حالات في المجموع ملائمة لـ A كما توضحه المجموعة التالية:

$$A = \{(F,P,P);(P,F,P);(P,P,F);\ (F,F,P);\ (F,P,F);\ (P,F,F);\ (F,F,F)\}$$

و منه إحتمال A هو:

$$P(A) = \frac{7}{8}$$

و هذه هي الطريقة الأولى في الحساب. أما الطريقة الثانية فهي طريقة الحادث العكسي، و هنا يجب علينا أولاً تثبيت الحادث العكسي. فلو تمعنا قليلاً في هذه التجربة و نتائجها الممكنة كما يوضحها فضاء العينة Ω لأدركنا، كما يُمليه منطق التجربة، أننا سوف نحصل على Pile ثلاثة مرات على الأكثر طالما نحن نرمي القطعة ثلاث مرات أصلاً، و ذلك يعني أننا سوف إما لا نحصل عليها مطلقاً و لا مرة، أو مرة واحدة، أو مرتين أو أخيراً ثلاث مرات.

لاحظ الآن أن المقصود من الحادث المباشر A بمرتين على الأكثر هو إما "صفر (ولا) مرة" أو "مرة واحدة" أو "مرتين" و كفى كما توضحه مجموعته أعلاه؛ فلم يتبق أمامنا إلا الحالة الأخيرة و هي التي تخص الحصول على Pile "ثلاثة مرات" و هذه هي الملائمة لعكس A. إذن نُثبت $\bar{A}$ حيث:

$\bar{A}$: "الحصول على Pile ثلاثة مرات". $\{(P,P,P)\} =$

و إحتمال هذا الحادث العكسي هو:

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{8}$$

و لو أردنا حساب إحتمال الحادث المباشر A مباشرة من خلال الحادث العكسي له يكون ذلك كاتالي:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

و هي نفس النتيجة السابقة طبعاً.

2) B: " الحصول على Face مرتين على الأقل"

مرتين على الأقل تعني مرتين فأكثر (إثنين أو ثلاثة)

مجموعة هذا الحادث هي:

$$B = \{(F,F,P);\ (F,P,F);\ (P,F,F);\ (F,F,F)\}$$

و عدد الحالات الملائمة له هو 4. إذن:

$$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

أما بطريقة الحادث العكسي، فعكس B هو:

$\bar{B}$: "الحصول على Face مرة واحدة على الأكثر".

و عرفنا ذلك باتباع نفس منهجية التفكير السابقة حيث أن B كان يقصد مرتين فأكثر (إثنين أو ثلاثة) و ما بقي إذن تحت مرتين هو إما "مرة واحدة" أو "ولا مرة" و هو المراد بقولنا مرة واحدة على الأكثر. و مجموعة هذا الحادث العكسي هي:

$$\bar{B} = \{(P,P,P);\ (F,P,P);(P,F,P);(P,P,F)\}$$

و إحتمال هذا الحادث العكسي هو:

$$P(\bar{B}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

و لو أردنا حساب إحتمال الحادث المباشر B مباشرة من خلال الحادث العكسي له يكون ذلك كاتالي:

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

و هي نفس النتيجة السابقة، و نتيجة كلا الحادثين متساوية لأن لهما نفس عدد الحالات الملائمة.

III. قوانين (قواعد) الإحتمال:

يوجد قانونين أساسيين في نظرية الإحتمالات لابد من معرفتهما و الإلمام الجيد بهما حيث تدور عليهما العديد من المسائل، ألا و هما "قانون الجمع" و "قانون الضرب". فما المقصود بكل منهما؟ و كيف يتم حسابه؟

من أجل ذلك سوف نفترض القيام بتجربة عشوائية ما فضاء عينتها Ω بعدد حالات ممكنة قدره N، و نعتبر الحادثين A و B متعلقان بهذه التجربة طبعاً عدد الحالات الملائمة لهما هي n_A و n_B على التوالي. فأحياناً نحتاج لحساب إحتمال وقوع أحدهما على الأقل، أو كذلك إحتمال وقوع الإثنين معاً، و هو ما سنراه في ما يلي:

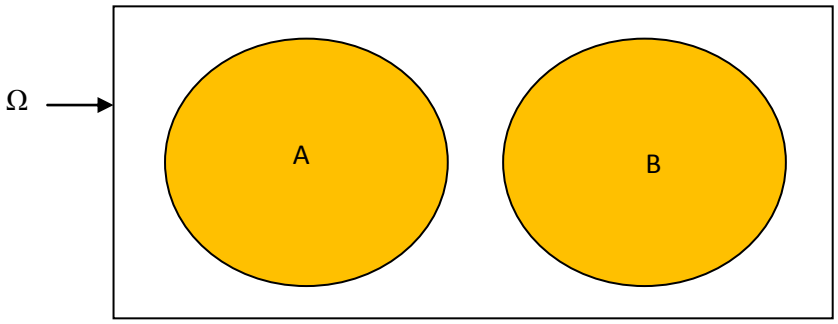
1. قانون الجمع:

سبق و ذكرنا تحت عنوان العمليات على الحوادث أن جمع و ضم حادثين إلى بعضهما البعض يعني وقوع أحدهما على الأقل، و بلغة المجموعات فذاك يعني "إتحادهما U"، و هو ما يُعبر عنه بقولنا "أو" (هذا أو ذاك أو ممكن كلاهما).

و عليه فإن قانون الجمع يهتم بدراسة إحتمال وقوع أحد الحوادث على الأقل، بمعنى أنه يُجيبنا على السؤال " $P(A \cup B) =?$"، و حيث أن ذلك مبني على إتحاد المجموعات فإننا نُميز في هذا الصدد بين حالتين:

أ. الحوادث المتنافية:

من خلال نظرية المجموعات نعلم أن المقصود بمجموعتين متنافيتين هو عدم وجود عناصر مشتركة بينهما بمعنى أن ليس هناك تقاطع. إذن نقول عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا لم يكن ممكناً وقوعهما معاً (في آن واحد) حيث أنهما غير متقاطعان ($A \cap B = \emptyset$) كما يوضحه الشكل أسفله:



$$A \cap B = \emptyset$$

فعدد الحالات المعبرة عن إتحاد هذين الحادثين هو عدد الحالات الملائمة لـ A مضافاً إليه عدد الحالات الملائمة لـ B، و الإحتمال نحصل عليه من خلال العلاقة التالية:

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} = P(A) + P(B)$$

باختصار إحتمال الإتحاد في هذه الحالة هو مجموع الإحتمالات و هو يعني وقوع واحد فقط هنا طالما أنهما متنافيان (غير ممكن الإثنين معاً)

ب. الحوادث غير المتنافية:

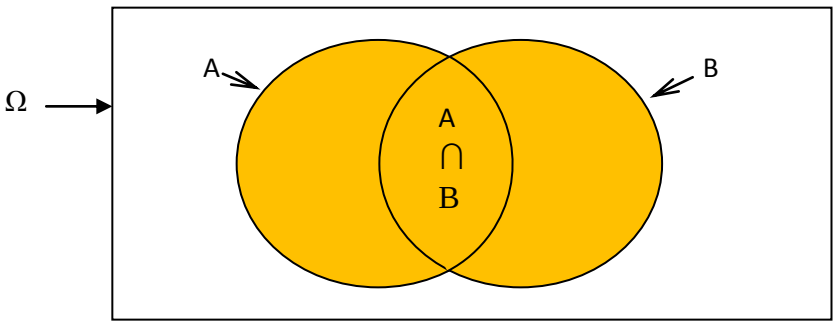
بخلاف الحالة السابقة فإن التقاطع موجود هنا، أي هناك عناصر مشتركة بين المجموعات و بالتالي فإن الحوادث يُمكن أن تقع معاً. فإذا كان ($A \cap B \neq \emptyset$) دعنا نرمز لعدد الحالات الملائمة لهذا التقاطع المعبر عن العناصر المشتركة بـ $n_{(A\cap B)}$ ، أما الإحتمال في هذه الحالة فيساوي:

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B - n_{(A\cap B)}}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} - \frac{n_{(A\cap B)}}{N}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

لاحظ أنه يتم طرح عدد حالات التقاطع مرة واحدة حتى لا يتم إحتسابها مرتين (مرة مع A و مرة مع B) في الإتحاد و منه تُخصم قيمة إحتمال هذا التقاطع عند حسابنا للإحتمال النهائي.

الشكل الموالي يُبين هذه الوضعية:



$A \cap B \neq \emptyset$

مثال 17:

نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة و نعتبر الحوادث التالية:

A: "الحصول على رقم أقل من 4"؛

B: "الحصول على رقم زوجي"؛

C: " الحصول على الرقم 6"؛

D: " الحصول على رقم لا يقل عن 4".

المطلوب:

1 - أحسب إحتمال كل حادث من الحوادث السابقة.

2 - أحسب إحتمال $(A \cup B)$ ؛ $(A \cup C)$ ؛ ثم $(A \cup D)$.

الجواب:

أصبح الآن معروفاً أن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هو "ستة" و فضاء العينة المرافق لها هو:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

1. حساب الإحتمالات:

A: "الحصول على رقم أقل من 4".

مجموعة العناصر الملائمة لـ A هي: $A = \{1, 2, 3\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "ثلاثة" ($n_A=3$).

و بالتالي فإن إحتمال وقوع هذا الحادث و بالتالي الحصول على رقم يقل عن 4 هو:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

B: "الحصول على رقم زوجي".

مجموعة العناصر الملائمة لـ B هي: $B = \{2, 4, 6\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "ثلاثة" ($n_B=3$) .

و عليه فإن إحتمال الحصول على رقم زوجي هو:

$$P(B) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ B}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_B}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

C: " الحصول على الرقم 6" هناك حالة واحدة فقط تلائم هذا الحادث $C = \{6\}$؛

و عليه فإن إحتمال الحصول على الرقم 6 هو:

$$P(C) = \frac{1}{6}$$

D: " الحصول على رقم لا يقل عن 4".

مجموعة D هي: $\Omega = \{4, 5, 6\}$ و إحتماله هو:

$$P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2. حساب إحتمال الإتحادات المطلوبة: $(A \cup B)$ ؛ $(A \cup C)$ ؛ ثم $(A \cup D)$.

أ. $P(A \cup B) = ?$

أولاً علينا تعريف (ما المراد بـ؟) الحادث AUB الذي يُعبر بدوره عن إتحاد الحادثين A و B، فاعتماداً على هذين الأخيرين فإن إتحادهما هو:

$A \cup B$: "الحصول على رقم أقل من 4 أو زوجي".

يُمكننا حساب هذا الإحتمال بطريقتين كما يلي:

-الطريقة الأولى:

مباشرة نُدرك أن المجموعة المعبرة عن حادث الإتحاد هذا هي: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ، عدد الحالات الملائمة له هي "خمسة"، و عليه:

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

-الطريقة الثانية:

بتطبيق قانون الجمع السابق، مع ملاحظة أنه يوجد تقاطع بين الحادثين A و B، و بالتالي سوف نُطبق العلاقة الثانية من القانون و قبل ذلك علينا تحديد المقصود بتقاطع هذين الحادثين و إحتماله كما يلي:

$A \cap B$: "الحصول على رقم أقل من 4 و زوجي " و ليس هناك سوى الرقم 2 الملائم و منه حالة واحدة لهذا التقاطع. فإحتماله إذن هو:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

و كان لدينا سلفاً كل من إحتمال A و B؛ ففي الأخير إحتمال الإتحاد المطلوب بتطبيق القانون هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

و هي نفس نتيجة الطريقة الأولى طبعاً.

ب. $P(A \cup C) = ?$

بنفس المنهجية و التفكير السابقين سوف نكتب مباشرة:

$A \cup C$: "الحصول على رقم أقل من 4 أو الرقم 6".

يُمكننا حساب هذا الإحتمال بطريقتين كذلك:

-الطريقة الأولى:

المجموعة المعبرة عن حادث هذا الإتحاد هي: $A \cup C = \{1, 2, 3, 6\}$ ، عدد الحالات الملائمة له هي "أربعة"، و عليه:

$$P(A \cup C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

-الطريقة الثانية:

بتطبيق قانون الجمع السابق، مع ملاحظة أنه يوجد لا يوجد تقاطع بين الحادثين A و C، بمعنى أن الحادثين متنافيين إذ لا يُمكن الحصول على رقم أقل من 4 و الرقم 6 في آن واحد، ($A \cap C = \emptyset$). إذن:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

و هي نفس النتيجة السابقة.

ج. $P(A \cup D) =?$

$A \cup D$: "الحصول على رقم أقل من 4 أو لا يقل عن 4".

-الطريقة الأولى:

مجموعة هذا الإتحاد هي: $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، عدد الحالات الملائمة له هي "ستة"، و عليه:

$$P(A \cup D) = \frac{6}{6} = 1$$

☚ لاحظ أن إحتمال هذا الحادث يساوي "1" فهو إذن حادث أكيد، و هذا شيئ بديهي فعند رمينا لزهرة نرد مرة واحدة من المؤكد أننا سوف نحصل على رقم أقل من 4 أو لا يقل عن 4، و لهذا كانت مجموعة هذا الإتحاد هي نفسها المجموعة الكلية Ω.

-الطريقة الثانية:

لا يوجد هناك تقاطع بين الحادثين A و D، فهما متنافيين إذ لا يُمكن الحصول على رقم أقل من 4 و لا يقل عن 4 في آن واحد، ($A \cap D = \emptyset$). إذن:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{6}{6} = 1$$

و هي نفس النتيجة السابقة.

☚ طالما أن هذين الحادثين متنافيين من جهة، و أن إتحادهما يعطينا المجموعة الكلية Ω (فضاء العينة) فإن هذا النوع من الحوادث يُعرف بـ "الحوادث الشاملة". أي أنها تشمل و تُغطي كافة الحالات الممكنة (المجموعة الكلية).

2. قانون الضرب:

مثلما سبق بيانه، فإنه إذا كنا في قانون الجمع نبحث عن إحتمال الإتحاد "∪" المدلول عليه بكلمة "أو" و رياضياً بالجمع "+"؛ فإننا في قانون الضرب هنا نبحث عن إحتمال التقاطع "∩" المدلول عليه بكلمة "و" و رياضياً برمز الضرب "×".

إذن ما إحتمال وقوع الحادثين A و B معاً (في آن واحد)؟ أي: $P(A \cap B) = ?$.

من أجل الإجابة على هذا السؤال و إستخلاص قانون الضرب سوف نتطرق أولاً إلى ما يُعرف بـ "الإحتمال الشَرطي".

أ. الإحتمال الشَرطي:

-مقدمة:

مثال 19: (تمهيدي)

دعنا ننطلق من تجربة أن أحدهم قام برمي زهرة نرد و أنك تهتم أنت بالحصول على رقم زوجي فإن:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A: "الحصول على رقم زوجي". $A = \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

فأنت تعلم عند عملية الرمي أن إحتمال حصول ماتهتم به (رقم زوجي) هو "$\frac{1}{2}$". الآن تصور معي أنه، بعد الرمي، تم إخبارك أن النتيجة كانت "رقماً لايزيد عن 3" لكن دون معرفتك للنتيجة بالضبط.

فما علاقة هذه المعلومة المكتسبة (علمك أن الرقم لايزيد عن ثلاثة) بما تهتم به أنت (الحصول على رقم زوجي)؟ و ما الشيئ الذي تغير في ذهنك و في طريقة حسابنا للإحتمال محل إهتمامنا؟

حتى نُجيب نفرض الحادث B كما يلي:

B: "الحصول على رقم لا يزيد عن 3".

و حيث أننا قد علمنا أن نتيجة الرمية هي بالفعل رقم لا يزيد عن 3 فإننا نقول أن الحادث B قد وقع فعلاً، و بوقوع هذا الحادث فإن تفكيرك أصبح مقتصراً على المجموعة $\{1, 2, 3\}$، التي هي مجموعة B، و التي أصبحت في الواقع تُشكل فضاء عينة جديد حيث تم إستبعاد الأرقام 4، 5 و 6 من الفضاء الأولي Ω. و الرقم الزوجي الوحيد في هذا الفضاء الجدبد B

(الذي حالاته ثلاثة) هو "2" فقط (حالة واحدة ملائمة هنا)؛ و بالتالي فإن إحتمال حصولك على رقم زوجي في ظل هذه المعلومة المكتسبة هو (واحد من ثلاثة أي $\frac{1}{3}$).

هذا هو الإحتمال الشرطي و الذي نقصد منه " أنك تحسب إحتمال حادث ما علماً أن (شرط أن) حادثاً آخراً قد وقع فعلاً". و رياضياً نكتب هذا الإحتمال الشرطي المعبر عن الشرط كالتالي: (بالتطبيق على مثالنا السابق).

$$P(A/B) = \frac{1}{3}$$

و هو إحتمال الحصول على رقم زوجي علماً أن الرقم لا يزيد عن 3.

☚ لا حظ أن ما هو معلوم (الحادث الذي وقع) يكون دائماً تحت الشرط (/).

-صيغة حساب الإحتمال الشرطي:

في المثال التمهيدي السابق لدينا باختصار:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A: "الحصول على رقم زوجي". $A = \{2, 4, 6\}$ ؛ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B: "الحصول على رقم لا يزيد عن 3". $B = \{1, 2, 3\}$ ؛ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

و توصلنا إلى أن: $P(A/B) = \frac{1}{3}$

لوضع صيغة لحساب الإحتمال الشرطي نقوم بحساب إحتمال تقاطع هذين الحادثين:

$A \cap B$: "الحصول على رقم زوجي لا يزيد عن 3 " و ليس هناك سوى الرقم 2 الملائم و منه حالة واحدة لهذا التقاطع ($A \cap B = \{2\}$). فإحتماله إذن هو:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

و لو تمعنا في إحتمال الشرط لوجدنا أنه ماهو إلا:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

و هي نفس النتيجة السابقة.

و كخلاصة فإننا نتوصل إلى أن:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{❶}$$

و يُقرأ إحتمال A شرط B.

و كذلك إحتمال B شرط A هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{❷}$$

☚ في كلتا الصيغتين السابقتين يُفترض أن المقام أكبر تماماً من الصفر.

ب. قانون (قاعدة الضرب):

إعتماداً على هاتين الصيغتين نتوصل إلى قانون أو قاعدة الضرب كما يلي:

$$\text{❶} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$$

و:

$$\text{❷} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$$

و هو ما يُمكننا وضعه في قانون واحد:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$

هذا هو قانون (قاعدة) الضرب.

☚ لاحظ في المثال التمهيدي السابق أنه كان لدينا إبتداءاً: $P(A) = \frac{1}{2}$ و بمعلومية وقوع الحادث B أصبح هذا الإحتمال: $P(A/B) = \frac{1}{3}$ ؛ و بالتالي فإن وقوع B قد أثر في إحتمال وقوع A (إحتمال هذا الأخير تغير) و هذا ما يقودنا للحديث عن إستقلالية الحوادث.

ج. إستقلالية الحوادث:

نقول عن الحادثين A و B مثلاً أنهما مستقلان إذا لم يكن لوقوع أحدهما أي تأثير في إحتمال وقوع الآخر.

من هذا التعريف يُمكن بنا أن نستنتج العلاقات التالية:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{❶}$$

وقوع B لم يؤثر في إحتمال وقوع A.

و كذلك:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{❷}$$

وقوع A لم يؤثر في إحتمال وقوع B.

و بالتالي فإن قاعدة الضرب، في حال الحوادث المستقلة، سوف تُختزل لتُصبح:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

☚ تُعرف هذه المعادلة الأخيرة بـ " شرط إستقلالية الحوادث" و هي كافية للتحقق من ذلك.

مثال 20:

نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاثة مرات في الهواء، و نعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "الحصول على P في الرمية الأولى"

B: "الحصول على P في الرميتين الأخرتين"

1 - إذا علمت أن نتيجة الرمية الأولى هي Pile، فما إحتمال أن تكون نتيجة الرميتين الأخرتين كذلك Pile؟

2 - هل الحادثان A و B مستقلان؟

الجواب:

لدينا عدد الحالات الممكنة هو "ثمانية" كما يوضحه فضاء عينة هذه التجربة:

$$\Omega = \{(P,P,P);(F,P,P);(P,F,P);(P,P,F);\ (F,F,P);\ (F,P,F);\ (P,F,F);\ (F,F,F)\}$$

بغرض الإجابة على السؤالين السابقين علينا أولاً حساب إحتمال كل حادث:

A: "الحصول على P في الرمية الأولى"

$$A = \{(P,F,P);(P,P,F);\ (P,F,F);\ (P,P,P)\}$$

و منه إحتمال A هو:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

B: "الحصول على P في الرميتين الأخرتين" (الثانية و الثالثة)

$$B = \{(P,P,P);(F,P,P)\}$$

إذن:

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

1 - من صيغة السؤال نُدرك أن هذا إحتمال شرطي، حيث أننا نريد حساب إحتمال أن تكون نتيجة الرميتين الأخرتين كذلك Pile شرط أن نتيجة الرمية الأولى هي Pile فهذه الأخيرة قد عُلمت، بمعنى هنا أن الحادث الذي

وقع و يكون تحت الشرط هو الحادث A، و بناءاً عليه نريد حساب إحتمال B. $P(B/A) =?$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

فلابد إذن من إيجاد إحتمال التقاطع:

$(A \cap B)$: " الحصول على P في الرمية الأولى و في الرميتين الأخرتين" (بمعنى في الرميات الثلاث).

$$(A \cap B) = \{(P, P, P)\}$$

إذن:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

و بالتالي فإن الإحتمال الشرطي المطلوب هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

2 - يُمكننا التحقق من إستقلالية A و B (من عدمها) بطريقتين:

الطريقة الأولى:

لاحظ مباشرة من خلال نتيجة الإحتمال الشرطي في السؤال الأول أن:

$$P(B/A) = \frac{1}{4} = P(B)$$

مما يدل على أن وقوع الحادث A لم يكن له أي تأثير على إحتمال وقوع B وبقي كما هو $\frac{1}{4}$ ، و بالتالي نستنتج أن الحادثين A و B مستقلان.

الطريقة الثانية:

من خلال شرط الإستقلالية الذي رأيناه سابقاً نتحقق هل المساواة محققة أو لا:

$$P(A \cap B) =^{?} P(A) \times P(B)$$

لدينا:

$$P(A \cap B) =^{?} P(A) \times P(B)$$

$$\frac{1}{8} =^{?} \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

المساواة محققة أي أن شرط الإستقلالية متوفر، و بالتالي نفس الإستنتاج السابق: A و B مستقلان عن بعضهما البعض.

مثال 21:

نرمي قطعتين نقديتين متوازنتين، و نعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "الحصول على F مرة واحدة فقط"

B: " الحصول على F مرة واحدة على الأقل"

1) -أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A \cap B)$، $P(A \cup B)$ ، $P(\bar{A})$، $P(\bar{B})$.

2) هل الحادثان A و B مستقلان أم لا؟

الجواب:

عدد الحالات الممكنة هو أربعة:

$$\Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$$

1) A: "الحصول على F مرة واحدة فقط". $A = \{(P,F);(F,P)\}$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

B: " الحصول على F مرة واحدة على الأقل ". $B = \{(P,F);(F,P);\ (F,F)\}$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

$A \cap B$: " الحصول على F مرة واحدة فقط ". $A \cap B = \{(P,F);(F,P)\}$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$A \cup B$: " الحصول على F مرة واحدة على الأقل ".

$$A \cup B = \{(P,F);(F,P);\ (F,F)\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

$\bar{A}$: " عدم الحصول على F أو الحصول عليها مرتين". $\bar{A} = \{(P,P);(F,F)\}$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\bar{B}$: " عدم الحصول على F ". $\bar{B} = \{(P,P)\}$

$$P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

2) هل الحادثان A و B مستقلان أم لا؟

ندرس ذلك مباشرة من خلال شرط الإستقلالية:

$$P(A \cap B) =^{?} P(A) \times P(B)$$

$$\frac{1}{2} =^{?} \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{8}$$

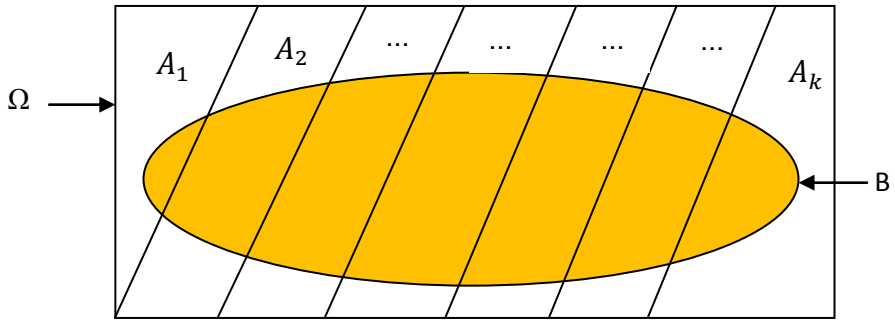
و بالتالي نستنتج أن الحادثين A و B غير مستقلين. (طالما أن المساواة غير محققة)

IV. نظرية الإحتمالات الكلية و نظرية "بايز Bayes":

إذا كانت الحوادث $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ حوادث شاملة، أي:

- $P(A_i) > 0$ من أجل $i = 1,2, \dots, k$ ؛
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ (لكل $i \neq j$ بمعنى أنها حوادث متنافية مثنى مثنى) ؛
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k = \Omega$ (إتحادها جميعاً يُعطينا فضاء العينة).

و كان B حادثاً من هذا الفضاء Ω كما يُوضحه الشكل التالي:



1 - نظرية الإحتمالات الكلية:

السؤال المطروح هنا: ما إحتمال الحادث B؟

نُجيب على هذا السؤال مبرهنين هذه النظرية فيما يلي:

لاحظ أن B هو محتوى في Ω و بالتالي فإن التقاطع بينهما هو B نفسه. $(B \subset \Omega \Rightarrow B \cap \Omega = B)$

$$P(B) = P(B \cap \Omega)$$

$$= P[B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k)]$$

$$= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_k)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_k)$$

من خلال قاعدة الضرب لدينا:

$$P(B \cap A_i) = P(B/A_i).P(A_i) \qquad i = 1, \dots, k$$

إذن:

$$P(B) = P(B/A_1).P(A_1) + P(B/A_2).P(A_2) + \cdots + P(B/A_k).P(A_k)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i).P(A_i)$$

هذه العلاقة الأخيرة هي علاقة الإحتمال الكلي أو التام.

2 - نظرية "بايز Bayes":

تحت هذه النظرية سنُجيب على التساؤل التالي:

-إذا علمت أن الحادث B قد وقع فعلاً، فما إحتمال وقوع أي حادث من الحوادث A_i؟

لاحظ أن هذا التساؤل عبارة عن إحتمال شرطي طالما هناك حادث قد وقع و عُلم، فنحن نبحث عن:

$$P(A_i/B) = ?$$

و بتطبيق كل من قانون الإحتمال الشرطي، قاعدة الضرب، و علاقة الإحتمال الكلي السابقة نحصل على:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B/A_i).P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B/A_i).P(A_i)}$$

تُعرف هذه الصيغة الأخيرة بنظرية "بايز" أو علاقة الإحتمال السببي.

مثال 22:

في مصنع معين هناك ثلاثة أقسام تضمن الإنتاج اليومي من قطع ميكانيكية معينة، حيث يقوم القسم الأول بإنتاج 60% من الإنتاج اليومي منها 2% غير صالحة و القسم الثاني إنتاجه 30% من القطع اليومية منها 5% فاسدة بينما يُنتج القسم الثالث البقية منها 6% فاسدة.

بغرض المراقبة اليومية للإنتاج تقوم مصالح الجودة بإختيار مجموعة من القطع من أجل إختبار مدى سلامتها؛ فبفرض أننا قمنا بإختيار قطعة من الإنتاج اليومي للمصنع:

1) ما إحتمال أن تكون فاسدة؟
2) إذا تبين أنها فاسدة، ما إحتمال أن تكون قد أُنتجت من طرف القسم الأول؟

الجواب:

على حسب نص و مضمون المثال دعنا نفترض الحوادث التالية:

A: "القطعة تم إنتاجها من طرف القسم الأول"

B: "القطعة تم إنتاجها من طرف القسم الثاني"

C: "القطعة تم إنتاجها من طرف القسم الثالث"

ثم لدينا أمر آخر ألا و هو صلاح القطعة من عدمه، فلنفرض هذا الأمر حادثاً آخراً بدوره.

D: "القطعة المنتجة فاسدة"

و بالتالي تسهل الآن عملية كتابة معطيات المثال رياضياً على نحو موال:

$P(A) = 0.6$ $\quad P(D/A) = 0.02$

$P(B) = 0.3$ $\quad P(D/B) = 0.05$

$P(C) = 0.1$ $\quad P(D/C) = 0.06$

1) إحتمال أن تكون فاسدة: $P(D) = ?$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$= P(D/A) \times P(A) + P(D/B) \times P(B) + P(D/C) \times P(C)$$

$$= (0.02) \times (0.6) + (0.05) \times (0.3) + (0.06) \times (0.1)$$

$$= 0.033 = 3.3\%$$

2) هذا إحتمال شرطي طالما أننا قد علمنا أن القطعة فاسدة بمعنى أن الحادث D قد وقع و نبحث إحتمال A بناءاً على ذلك. إذن:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A) \times P(A)}{P(D)}$$

$$= \frac{0.012}{0.033} = 0.36$$

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية.

بغرض فهم مغزى المتغير العشوائي دعنا ننطلق من هذا المثال التمهيدي.

مثال 23:

عندما نرمي زهرة نرد متوازنة ثلاثة مرات متتالية فإن نعلم أن عدد الحالات الممكنة هو "ثمانية" كما يوضحه فضاء العينة. لو نهتم الآن بـ"عدد مرات الحصول على Pile" من خلال هذه التجربة و هو الاهتمام الذي نرمز له بـX لأمكننا معرفة و تلخيص القيم التي يُمكن أن يأخذها X المعبر عن العدد محل إهتمامنا في الجدول التالي:

$\Omega =$	(F,F,F)	(P,F,F)	(F,P,F)	(F,F,P)	(P,P,F)	(P,F,P)	(F,P,P)	(P,P,P)
X: "عدد مرات "Pile	0	1	1	1	2	2	2	3

إذن لاحظ أن X يُمكن أن يأخذ القيم {0، 1، 2، 3} و هذه المجموعة قيمها متغيرة من 0 إلى 3 فقد تكون 0 أو 1 أو....، و بالتالي فإن X يُعتبر "متغيراً" كما أن هذه القيم التي يُمكن أن يأخذها هذا المتغير مبنية على الصدفة و العشوائية طالما أن التجربة هي أصلاً عشوائية فنحن نعلم القيم الممكنة لـ X لكن لا نعلم بالضبط أي قيمة سوف يأخذها فإحتمال ذلك يعود إلى عدد الحالات الملائمة لكل قيمة من جملة الحالات الممكنة كما سنرى لاحقاً. و بناءاً على ذلك فإننا نقول أن X متغيراً عشوائياً يُمكن أن يأخذ إحدى القيم المذكورة. أي: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

1 - تعريف:

المتغير العشوائي هو كلّ تطبيق على فضاء العينة، بمعنى أنّه الدالة مجال تعريفها فضاء، الهينة Ω ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية، كلمة متغير تعني أنّه يأخذ قيما مختلفة

وكلمة عشوائي تعني أن هذه القيم التي يمكن أن يأخذها مبنية على الصدفة والعشوائية.

نرمز إلى المتغير العشوائي بالرّمز ونكتب: $X: \Omega \to R$

هناك نوعان من المتغيرات العشوائية، متغيرات عشوائية متقطعة ومتغيرات عشوائية مستمرة وذلك بحسب فضاء العينة الذي يعرّف عليه هذا المتغيّر، فإذا كان فضاء العيّنة منفصلا أي قابل للعدّ قلنا أن المتغير العشوائي متقطع وإذا كان فضاء العينة متصلا أي غير قابل للعدّ قلنا أن المتغير العشوائي مستمر.

2- المتغيرات العشوائية المتقطعة:

أ- تعريف: هي المتغيرات التي تأخذ قيمًا منفصلة عن بعضها البعض باحتمالات معينة.

ب- التوزيع الاحتمالي: هو جدول أو قانون أو دالة تبين العلاقة بين قيم المتغير العشوائي X واحتمالات المقابلة لتلك القيم.

مثال: جدول التوزيع الاحتمالي للمثال السابق هو:

$X= x_i$	0	1	2	3	$\sum$
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$P\ (X = 0) = \ P\ \{(F.F.F)\} = \ {}^{1}/_{8}$$

$$P\ (X = 1) = \ P\ \{(P.F.F), (F.P.F), (F.F.P)\} = \ {}^{3}/_{8}$$

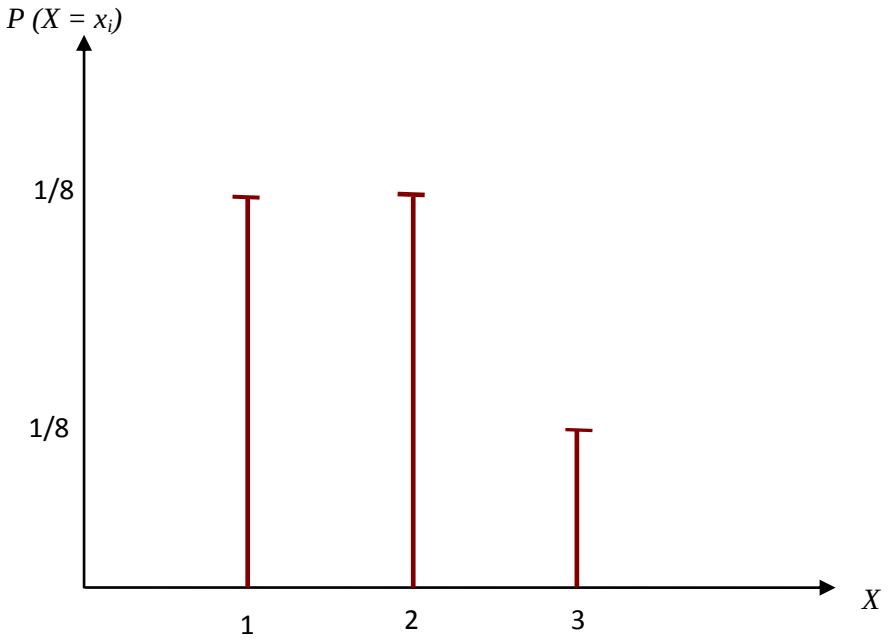
$$P\ (X = 2) = \ P\ \{(P.P.F), (F.P.P), (P.F.P)\} = \ {}^{3}/_{8}$$

$$P\ (X = 3) = \ P\ \{(P.P.P)\} = \ {}^{1}/_{8}$$

$$\boxed{0 \leq P(X = x_i) \leq 1}$$

$$\sum P(X = x_i) = 1$$

التمثيل البياني:



ج- دالة التوزيع المتجمّع: F(X)

نعرّف دالة التوزيع المتجمّع الدالة F المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R نحو المجال:

[0 -1] أي:

$$F: R \rightarrow [0-1]$$

$$x: F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x)$$

مثال: دالة التوزيع المتجمّع للمثال السابق تأخذ الشكل التالي:

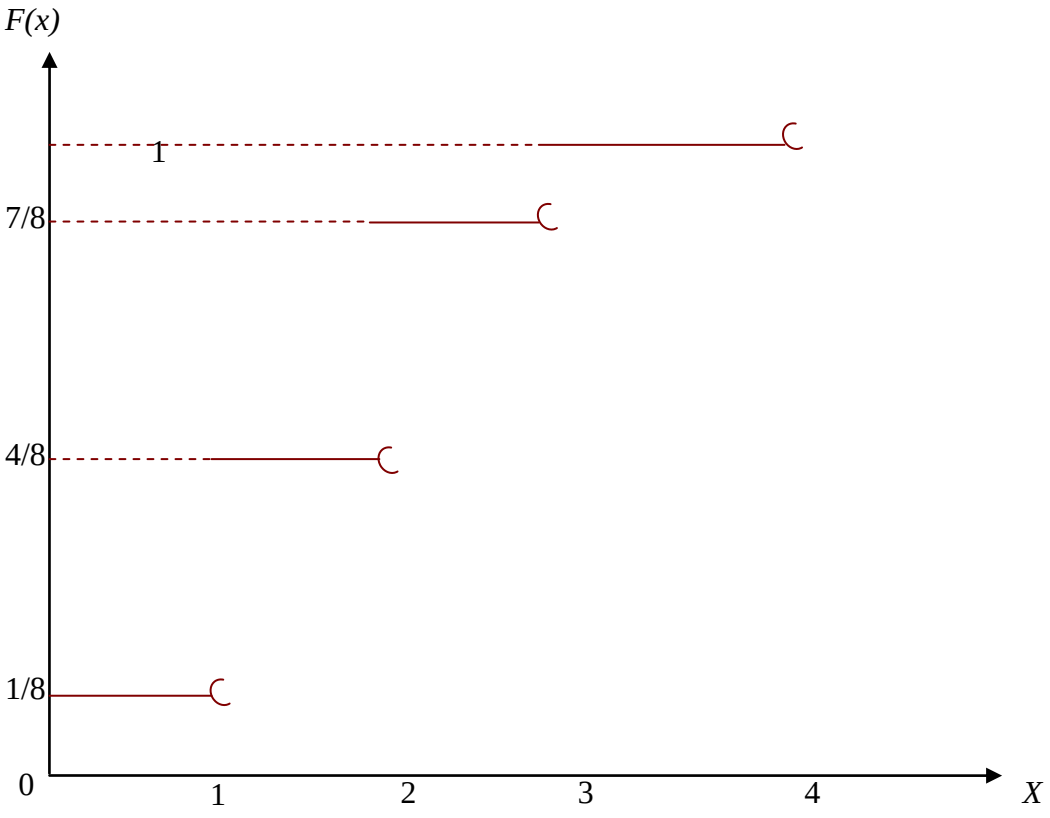
$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 8/8 = 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$F(0) = P(X = 0) = 1/8$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = F(1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = 1$$



خصائص دالة التوزيع المتجمّع:

$$\forall x \in R : 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$x \leq y : F(x) \leq F(y)$$

د- حساب الاحتمالات:

نعتبر X و a , b عددان حقيقيان لدينا:

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$
$$= F(b) - F(a).$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a)$$
$$= F(b) - P(X < a).$$

$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a)$$
$$= P(X < b) - F(a).$$

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

مثال:

بالرجوع إلى المثال السابق لدينا الاحتمالات التالية:

$$P(X \leq 2) = F(2) = {}^{7}/_{8}$$

$$P(X < 2) = P(X \leq 1) = F(1) = \frac{4}{8}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$= 1 - F(1)$$

$$= 1 - {}^{4}/_{8} = \frac{4}{8}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{7}{8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$P(1 < X < 3) = P(X < 3) - P(X \leq 1)$$

$$= P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$$

$$= F(2) - F(1)$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(1 \leq X < 3) = P(X < 3) - P(X < 1)$$

$$= F(2) - F(0)$$

$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = ?$$

$$P(1 < X \leq 3) = ?$$

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X < 1)$$

$$= F(3) - P(X \leq 0)$$

$$= F(3) - F(0)$$

$$= 1 - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{7}{8}$$

$$P(1 < X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1)$$

$$= F(3) - F(1)$$

$$= 1 - \frac{4}{8}$$

$$= \boxed{\frac{4}{8}}$$

3- المتغيرات العشوائية المستمرة:

نقول عن المتغير العشوائي X أنّه مستمر إذا كان بإمكانه أن يأخذ أي قيمة داخل مجال معيّن.

ونعرّف دالة التوزيع المتجمّع لهذا المتغير المستمرّ الدالة F المعرفة على R نحو المجال [0-1] أي:

$$F: R \rightarrow [0-1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(X \leq x)$$

أ- دالة كثافة الاحتمال $f(x)$:

إذا كانت دالة التوزيع المتجمّع F قابلة للاشتقاق نقول أن المتغير العشوائي X مستمر تماما ومشتقة دالة التوزيع المتجمّع تُعرف بدالة كثافة الاحتمال أي:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

وتأخذ دالة التوزيع المتجمّع الشكل التالي:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

ب- خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\forall x \in R : f(x) \geq 0$$

إذا كان x معرف على المجال $[x_1 - x_2]$ فإنّ : $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = 1$

ج- حساب الاحتمالات:

نعتبر a وb عددان حقيقيان حيث $b > a$ فإنّ:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

مثال2:

مدّة صلاحية نوع معين من المصابيح بالأيام متغير عشوائي كثافة احتماله.

$$f(x) = e^{-2kx} \qquad x \geq 0 \qquad k \text{ ثابت}$$

1) عين قيمة الثابت k؟

2) أحسب احتمال أن لا تفوق مدّة اشتغال مصباح من النوع السابق 20 يوماً؟

3) إذا علمت أن مصباح من النوع السابق قد فاتت مدّة اشتغاله 15 يوماً. فما احتمال أن لا تفوق 30 يوماً؟

4) أحسب احتمال أن لا تفوق مدّة اشتغال 3 مصابيح من النوع السابق 20 يوم.

الجواب:

$$f(x) = e^{-2kx} \qquad x \geq 0$$

X: "مدّة اشتغال المصابيح بالأيّام"

1) k = ?

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-2kx}\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2k}\int_0^{+\infty} -2ke^{-2kx}\ dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2k}[e^{-2kx}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2k}(0-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2k} = 1 \Leftrightarrow 2k = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-x}} \qquad x \geq 0$$

2) $P(X \leq 20)$ =?

$$P(X \leq 20) = \int_0^{20} f(x)\ dx$$

$$= \int_0^{20} e^{-x}\ dx$$

$$= -\int_0^{20} -e^{-x}\ dx = -[e^{-x}]_2^{20}$$

$$= -(e^{-20} - e^0)$$

$$\boxed{P(X \leq 20) = 1 - e^{-20}}$$

3) $P(X \leq 30 / X \geq 15)$ =?

B A

$$P(B / A) = P(X \leq 30 / X \geq 15) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(15 \leq X \leq 30)}{P(X \geq 15)}$$

$$P(15 \leq X \leq 30) = \int_{15}^{30} f(x)\ dx = \int_{15}^{30} e^{-x}\, dx$$

$$= -[+e^{-x}]_{15}^{30}$$

$$= -(e^{-30} - e^{-15})$$

$$\boxed{P(15 \leq X \leq 30) = e^{-15} - e^{-30}}$$

$$P(X \geq 15) = \int_{15}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{15}^{+\infty} e^{-x}\ dx$$

$$= -[e^{-x}]_{15}^{+\infty}$$

$$= -(0 - e^{-15})$$

$$\boxed{P(X \geq 15) = e^{-15}}$$

$$\boxed{P(B\ /\ A) = P(X \leq 30\ /\ X \geq 15) = \frac{e^{-15} - e^{-30}}{e^{-15}}}$$

4) $P(X \leq 20\ ) = 1 - e^{-20}$

A': مدّة اشتغال (3 مصابيح) لا تفوق 20 يوماً"

A'_1: مدّة اشتغال المصباح (1) لا يفوق 20 يوم"

A'_2: مدّة اشتغال المصباح (2) لا يفوق 20 يوم"

A'_3: مدّة اشتغال المصباح (3) لا يفوق 20 يوما"

$$P(A') = P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = P(A'_1).P(A'_2).P(A'_3)$$

$$\boxed{P(A') = [1 - e^{-20}]^3}$$

4) القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية:

أ- التوقع (الأصل) الرياضي:

هو يعبر عن القيمة النموذجية التي تتمركز حولها قيم المتغير العشوائي.

- **حالة متغير عشوائي متقطع:**

نفرض أن X متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي كالتالي:

$X= x_i$	x_1	x_2	…..	x_n	$\sum$
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	……..	$P(X = x_n)$	1

التوقع الرياضي لهذا المتغير يعرف بالعلاقة التالية:

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X - x_2) + \cdots .. + x_n P(X - x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

مثال1: ليكن X متغيرا عشوائيا توزيعه الاحتمالي كالآتي:

$X= x_i$	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(X = x_i)$	0,04	0,06	0,25	0,35	0,19	0,11	1

$$E(X) = 1(0{,}04) + 2(0{,}6) + \cdots + 6(0{,}11)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = 3{,}92 = 1$$

- **حالة متغير عشوائي مستمر:**

إذا كان X متغير عشوائي مستمرا دالة كثافة احتماله f(x) فإنّ توقعه الرياضي يعرّف ب

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

مثال2:

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا دالة كثافة احتماله هي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^2 x\, f(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_0^2 x \left(\frac{1}{2}x\right) dx$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\ dx$$

$$E(X) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{8}{6}$$

$$E(X) = \frac{4}{3}$$

- خصائص التوقع الرياضي: $E(X) = \sum x_i\, P(X = x_i)$

1) إذا كان a وb عددان ثابتان فإنّ:

$$E(aX \pm b) = a\, E(X) \pm b$$

$$E(aX \pm b) = \sum [ax_i \pm b)\, P(X = x_i)]$$

$$= \sum [ax_i P\ (X = x_i) \pm b\, P(X = x_i)]$$

$$= \sum ax_i P\ (X = x_i) \pm \sum bP\ (X = x_i)$$

$$= a \sum x_i P\ (X = x_i) \pm b \sum P\ (X = x_i)$$

$$= a\ E(X) + \ b$$

* si a = 0 $\Rightarrow$ E(b) = b

* si b = 0 $\Rightarrow$ E(aX) = a E(X)

2) إذا كان X و Y متغيران عشوائيان فإنّ:

$$E(X + Y) = \ E(X) + \ E(Y)$$

3) إذا كان X و Y مستقلان فإنّ:

$$E(X\ Y) = \ E(X) - \ E(Y)$$

ب- التباين: V(X)

هو متوسط (التوقع) مربّع انحرافات قيم المتغير العشوائي عن قيمتها المتوسطة (القيمة المتوقعة):

$$\boldsymbol{V(X) = \ E[X - \ E(X)]^2}$$

$$V(X) = \ E[X^2 - 2X\ E(X) + \ [E(X)]^2]$$

$$= \ E(X^2) - \ 2\ E(X)E(X) + \ [E(X)]^2$$

$$= \ E(X^2) - \ 2\ [E(X)]^2 + \ [E(X)]^2$$

$$\boldsymbol{V(X) \ = \ E(X^2) - \ [E(X)]^2}$$

حيث:

إذا كان X متقطع $\leftarrow$ $E(\ \ ^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\ P(X = x_i)$

إذا كان X مستمر $\leftarrow$ $E(\ \ ^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$

مثال 3: بالرجوع إلى المثال 1 ما هي قيمة التباين؟

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = ?$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 \, P\,(X = x_i)$$

$$= (1)^2\,(0{,}04 + (2)^2(0{,}06) + \cdots + (6)^2(0{,}11)$$

$$\boxed{E(X^2) = 16{,}84}$$

$$V(X) = 16{,}84 - (3{,}92)^2$$

$$\boxed{V(X) = 1{,}47} \qquad \sigma(X) = 1{,}25$$

مثال4:

بالرجوع إلى المثال 2 ما هي قيمة التباين:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad 0 \le x \le 2$$

$$E(X^2) = ?$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3\,dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{4} - 0\right]$$

$$= \frac{16}{8} = 2$$

donc

$$V(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\boxed{V(X) = \frac{2}{9}} \qquad \boxed{\sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

- **خصائص التباين:**

1) إذا كان a ثابت:

$$V(a) = E(a^2) - [E(a)]^2$$

$$= a^2 - a^2 = 0$$

$$\boxed{V(a) = 0}$$

2) إذا كان a ثابت:

$$V(aX) = ?$$

$$V(aX) = E[(aX)^2] - [E(aX)]^2$$

$$= E[a^2X^2] - [aE(X)]^2$$

$$= a^2E[X^2] - a^2[E(X)]^2$$

$$= a^2(E[X^2] - [E(X)]^2)$$

$$\boxed{V(aX) = a^2V(X)}$$

X و Y مستقلان $\leftarrow$ $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

الفصل الخامس: التوزيعات الإحتمالية الشهيرة.

1- التوزيع ذي الحدين: La distribution Binomial

أ- تجربة (توزيع) بارنولي

هي كل تجربة تحتمل نتيجتها إمّا النجاح أو الفشل ونجربها مرّة واحدة كأن نرمي قطعة نقدية مثلا ونهتم بالحصول على F.

نرمز لاحتمال النجاح بـp واحتمال الفشل q ويساوي q = 1-p

ونكتب : المتغير العشوائي X الذي يخضع إلى توزيع بواسون: $X \nearrow B(1.p)$

وقانونه الاحتمال:

$$P(X = x) = p^x \, q^{1-x} \qquad x = 0\,,1$$

X = x	0	1	$\sum$
P(X=x)	1-p =q	p	1

* توقع بارنولي: E(X):

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x_i \, P(X = x_i) = \sum_{x=0}^{1} x[p^x(1-p)^{1-x}]$$

$$= (0)\,(1\text{-}p) + (1)\,(p) = \boxed{p}$$

التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \sum_{x=0}^{1} x^2 \, P(X = x) - [E(X)]^2$$

$$= (0)(q) + (1)^2(p) - [p]^2$$

$$= p - p^2 = p\,(1-p)$$

$$\boxed{V(X) = pq}$$

لنفرض الآن أننا نقوم بتكرار تجربة برنولي n مرة، كل مرة تحتمل نجاح أو فشل كما أن هذه التجارب مستقلة عن بعضها البعض وبالتالي احتمال النجاح p (بالمقابل احتمال الفشل q) يبقى ثابت من تجربة إلى أخرى.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثّل عدد مرات النجاح في n محاولة ونكتب:

$$X \nearrow B\,(n.p)$$

مثال: نرمي قطعة نقدية ثلاث مرات ونهتم بالحصول على fasse

X = x	الحالات الملائمة	P(X=x)
0	(Pile, Pile, Pile)	q^3
1	(F.P.P), (P.F.P), (P.P.F)	$3pq^2$
2	(P.F.F), (F.F.P), (F.P.F)	$3p^2q$
3	(F.F.F)	P^3

$$X \nearrow B\,(n.p)$$

والقانون الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين هو:

$$P(X = x) = C_n^x\, p^x\, q^{n-x}$$

x = 0,1, ……,n

- **<u>توقع ذي الحدّين وتباينه:</u>**

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots\ldots\ldots + E(X_n)$$

$$= p + p + \ldots\ldots\ldots + p = np$$

$$E(X) = np$$

(مستقلة pour i = 1-n X_i)

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(x_i)$$

$$= pq + pq + \dots\dots\dots + pq$$

$$V(X) = npq$$

$$E(X) = np = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$V(X) = npq = 3\left(\frac{1}{2}\right).\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

مثال2:

في امتحان معين وضعت 4 إجابات لكلّ سؤال من بينها إجابة واحدة فقط صحيحة، أجاب طالب عشوائيا على عشرة (10) أسئلة من هذا النوع.

فما احتمال حصوله على 5 إجابات صحيحة على الأقلّ؟

X "عدد مرات الإجابة الصحيحة" التوزيع الاحتمالي لX

$$X \nearrow B\,(n.p)$$

$$P(X = x) = C_{10}^{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-x}$$

X= 0,1,……,10

$$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \dots\dots\dots + p(X = 10)$$

$$P(X \geq 5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} + C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_{10}^{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}$$

إذا كان السحب بالإرجاع يكون التوزيع ذي الحدين ويكون احتمال النجاح يكون معلوم.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X > 3) = P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$$

$$= 1 - P(X \leq 3).$$

2- توزيع بواسون Poisson:

يهتم هذا التوزيع بوصف عدد مرات النجاح (عدد تكرارات حادث) لتجارب عشوائية معينة التي تقع ضمن فترة زمنية أو مساحة أو حجم أو منطقة محددة بمتوسط معلوم ويرمز له λ، على أن يكون احتمال النجاح يتناسب مع طول الفترة أو الحجم المعيّن.

نقول عن المتغير العشوائي الذي يمثل عدد تكرارات الحادث ضمن الوحدة المعينة أنه يتبع توزيعا بواسونيا ذو المعلمة λ وقانونه هو $X \nearrow P(\lambda)$

$$\boxed{P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}} \qquad x = 0, 1, \ldots\ldots\ldots$$

مثال1:

متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون أحد المحلات التجارية في الدّقيقة هو 3 زبائن ما احتمال أن يدخل 4 زبائن إلى هذا المحل خلال دقيقة معينة؟.

الحل:

X " عدد الزبائن الداخلين في الدّقيقة"

$$X \nearrow P(\lambda=3)$$

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!} = e^{-3}\frac{3^{x}}{x!} \qquad x = 0, 1, \ldots\ldots..$$

$$P(X=4) = e^{-3}\ \frac{3^4}{4!} = 0{,}16$$

مثال2:

إذا علمت أن متوسط عدد حوادث السيارات بمنطقة معينة هو 5 حوادث في اليوم.

- ما احتمال عدم وقوع أي حادث خلال يوم معين؟
- ما احتمال وقوع 3 حوادث على الأكثر خلال يوم معين؟
- ما احتمال وقوع حادث على الأقل خلال يوم معين؟
- ما احتمال وقوع أكثر من حادثين خلال يوم معين؟
- ما احتمال وقوع 10 حوادث خلال أسبوع معين؟

الجواب:

X "عدد حوادث السيارات في اليوم"

❖ التوزيع الاحتمالي لX: $X \nearrow P\ (\lambda=5)$

$$P(X=x) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-5} \qquad x = 0\ ,1, \ldots\ldots$$

$$P(X=0) = e^{-5}\ \frac{5^0}{0!} = e^{-5}$$

$$P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= e^{-5} + e^{-5}\ \frac{5^1}{1!} + e^{-5}\ \frac{5^2}{2!} + e^{-5}\ \frac{5^3}{3!}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$$

$$= 1 - P(X \leq 1)$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(x=1)]$$

$$= 1 - [e^{-5} + 5e^{-5}]$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$$

$$= 1 - \left[e^{-5} + 5e^{-5} + e^{-5}\frac{5^2}{2!}\right]$$

Y "عدد حوادث السيارات في الأسبوع"

$$Y \nearrow P(35)$$

$\lambda = 5 \times 7 = 35$

$$P(Y = y) = e^{-35}\frac{35^y}{y!} \qquad y = 0,1,\ldots..$$

$$P(Y = 10) = e^{-35}\frac{35^{10}}{10!}$$

3- التوزيع الهندسي الزائدي Hyper géométrique

نعتبر مجتمع عدد عناصره N عنصر من بينهم N_1 عنصر يحملون صفة معينة وN_2 عنصر لا يحملون هذه الصفة ($N_1 + N_2 = N$).

نسحب من هذا المجتمع عينة ذات n عنصر ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل "عدد العناصر التي تحمل الصفة المسحوبة" إذا كان سحب بدون إرجاع فإنّ هذا المتغير X سوف يتبع توزيعا هندسيا زائدا.

ونكتب $X \nearrow H(n ; N_1, N_2)$

وقانونه الاحتمالي هو:

$$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} \cdot C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$$

ومن خصائصه:

$$E(X) = np \qquad (p = \frac{N_1}{N})$$

$$V(X) = npq.\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

مثال1:

صندوق يحتوي على 10 كريات بيضاء و5 حمراء، فسحب من هذا الصندوق بالصدفة 3 كريات بدون إرجاع، نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

- ما هو التوزيع الاحتمالي لX؟
- ماحتمال سحب كريتين حمراوتين؟
- ماهو العدد المتوقع للكريات الحمراء المسحوبة؟

الجواب:

X "عدد الكريات الحمراء المسحوبة" $X \nearrow H\,(0{,}3\ ;0{,}5\ ;10)$

$$P(X = x) = \frac{C_5^x .\ C_{10}^{3-x}}{C_{15}^3}$$

$$P(X = 2) = \frac{C_5^2 .\ C_{10}^1}{C_{15}^3}$$

$$E(X) = np = 3\left(\frac{5}{15}\right) = 1$$

$$V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3\left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{10}{15}\right)\left(\frac{15-3}{15-1}\right)$$

مثال2:

تتكون هيئة إدارية من 7 أعضاء دائمين و5 غير دائمين نختار من هذه الهيئة 8 أعضاء لتكوين لجنة.

- أحسب احتمال أن لا يقلّ عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة عن 3؟

- ما هو العدد المتوقع للأعضاء الدائمين في اللجنة؟

الجواب:

X "عدد الأعضاء الدائمين في اللجنة".

$X \nearrow H\,(8\,;7\,,5)$

التوزيع الاحتمالي لX:

$$P(X = x) = \frac{C_7^x .\ C_5^{8-x}}{C_{12}^8}$$

$$x = 3,4,\ldots 7$$

$P(X \geq 3) = 1$ حادث أكيد

$$E(X) = 8\left(\frac{7}{12}\right) = 4{,}66 \approx 5.$$

4) التوزيع الطبيعي La distribution Normale

أ-تعريف:

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يخضع لتوزيع طبيعي إذا كانت دالة كثافة احتماله تأخذ الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2} \qquad x \in R, m \in R$$

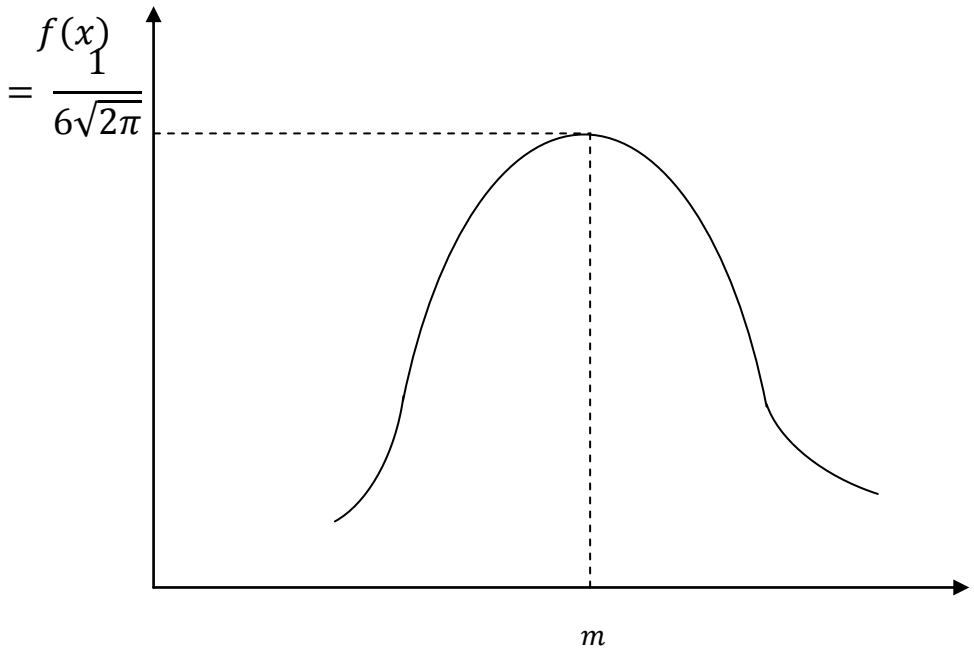
$$\sigma > 0$$

مع توقع X إذا كان X يخضع لتوزيع طبيعي

$$\mathrm{E}(X) = m = \mu$$

$V(X) = \sigma^2$

تأخذ دالة التوزيع الطبيعي شكل الجرس وهو متناظر حول المتوسط (m) كما يلي:



ونكتب: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$

$$X \nearrow N(\mathrm{m};\sigma)$$

ب/ التوزيع الطبيعي القياسي وحساب الاحتمالات:

لحساب الاحتمالات ننتقل من لتوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي القياسي أي من وحدات طبيعية Xإلى وحدات قياسية T (أو يرمز له بـ Z)

أي: $T = \frac{X-m}{\sigma}$ $\qquad X \nearrow N(\mathrm{m};\sigma)$

$$T \nearrow N(0,1)$$

$$E(T) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X) - m = 0$$

$$V(T) = V\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(E) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

مثال1:

- $P(T \leq 2{,}5) = 0{,}9938$
- $P(T \geq 1{,}18) = 1 - P(T \leq 1{,}18)$

$$= 1 - 0.8810 = 0.119$$

بالتناظر

- $P(T \leq -0{,}78) = P(T \geq 0{,}78)$

$$= 1 - P(T \leq 0{,}78)$$

$$= 1 - 0{,}7823$$

$$= 0{,}2177$$

- $P(T \geq -0{,}78) = P(T \geq 0{,}78)$

$$= 0{,}7823$$

ما ينبغي تذكره:

النتيجة من الجدول: $P(T \leq t)$

$P(T \geq t) = 1 - P(T \leq t)$

$P(T \leq -t) = 1 - p(T \leq t)$

$P(T \geq -t) = P(T \leq t)$

مثال2:

يخضع عمر نوع من البطاريات إلى توزيع طبيعي بمتوسط حسابي قدره 1000 ساعة وانحراف معياري 50 ساعة، تم اختيار بطارية من هذا النوع عشوائيا

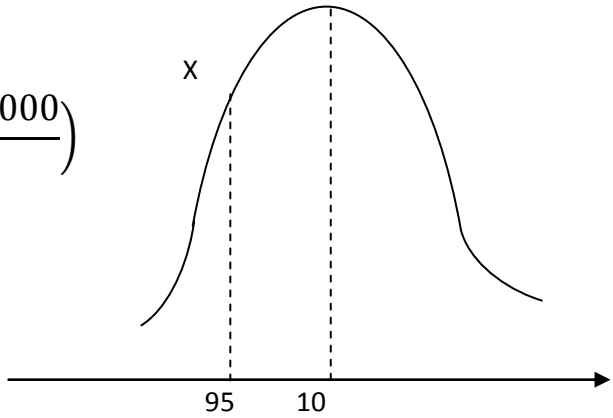
-أحسب احتمال أن لا تفوق مدة صلاحيتها 950 ساعة؟

$X \nearrow N(1000, 50)$

تصحيح المثال 2:

X:"عمر صلاحية البطاريات بالساعة"

$$P(X \leq 950) = P\left(\frac{X-1000}{50} \leq \frac{950-1000}{50}\right)$$

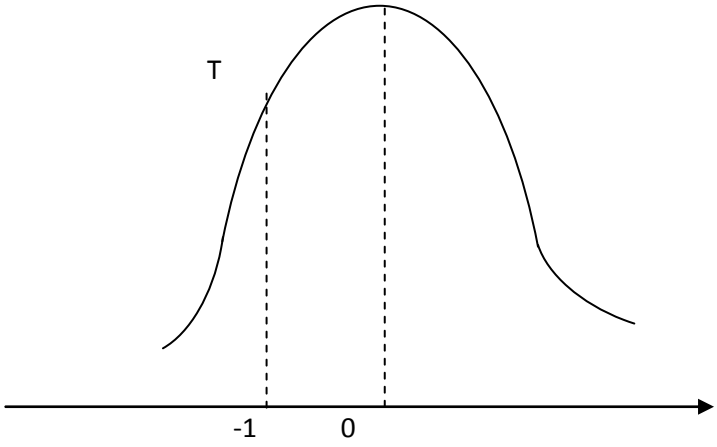


$$= P(T \leq -1)$$

$$= 1 - P(T \leq 1)$$

$$= 1 - 0{,}8413$$

$$= 0{,}1587$$



مثال 3:

تخضع الأجور الفردية في منطقة معينة إلى توزيع طبيعي بمتوسط قدره 10000دج وانحراف معياري800دج.

أحسب احتمال أن يفوق أجر شخص من هذه المنطقة 11000دج؟

X: الأجور الفردية في المنطقة" $X \nearrow N(10000, 800)$

$$P(X \geq 11000) = P\left(\frac{X - 10000}{800} \geq \frac{11000 - 10000}{800}\right)$$

$$= P(T \geq 1.25)$$

$$= 1 - P\ (T \leq 1.25)$$

$$= 1 - 0{,}8944$$

$$= 0{,}1056$$

مثال4:

إذا كانت علامات الطلبة في مقياس الإحصاء تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط حسابي قدره 14 وانحراف معياري 2.

ما احتمال أن تكون علامة طالب أختير عشوائيا:

1- أكثر من 17

2- أكثر من 13

3- أكثر من 12

4- بين 15 و17

5- أقل من 9

6- بين 10 و 15.

تصحيح المثال 4:

$X \nearrow N\ (14\ ,2)$

X "علامات الطلبة في الإحصاء"

$$P(X \geq 17) = P\left(\frac{X-14}{2} \geq \frac{17-14}{2}\right)$$

$$= P(T \geq 1.5)$$

$$= 1 - P\,(T \leq 1.5)$$

$$= 1 - 0{,}9332$$

$$= 0{,}0668$$

$$P(X \geq 13) = P\left(\frac{X-14}{2} \geq \frac{13-14}{2}\right)$$

$$= P(T \geq -0.5)$$

$$= P(T \leq 0.5)$$

$$= 0{,}6915$$

$$P(X \geq 12) = P\left(\frac{X-14}{2} \geq \frac{12-14}{2}\right)$$

$$= P(T \geq -1)$$

$$= P(T \leq 1)$$

$$= 0{,}8413$$

$$P(15 \leq X \leq 17) = P\left(\frac{15-14}{2} \leq \frac{X-14}{2} \leq \frac{17-14}{2}\right)$$

$$= P(0{,}5 \leq T \leq 1.5)$$

$$= P(T \leq 1.5) - P\,(T \leq 0{,}5)$$

$$= 0{,}9332 - 0{,}6915$$

$$= 0{,}2417$$

$$P(X \leq 9) = P\left(\frac{X-14}{2} \leq \frac{9-14}{2}\right)$$

$$= P(T \leq -2.5)$$

$$= 1 - P\,(T \leq 2.5)$$

$$= 1 - 0{,}9938$$

$$= 0{,}0062$$

$$P(10 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{10-14}{2} \leq \frac{X-14}{2} \leq \frac{15-14}{2}\right)$$

$$= P(-2 \leq T \leq 0.5)$$

$$= P(T \leq 0.5) - P\,(T \leq -2)$$

$$= P(T \leq 0.5) - [1 - P\,(T \leq 2)]$$

$$= P(T \leq 0.5) - 1 + P\,(T \leq 2)$$

$$= 0{,}6915 - 1 + 0{,}9772$$

$$= 0{,}6687$$

تم بحمد الله.

مراجع ساعدت في إعداد هذه المطبوعة:

1 - السعدي رجال، نظرية الإحتمالات: مبادئ الحساب الإحتمالي (دروس و تمارين)، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008.

2 - دومينيك سالفاتور، الاقتصاد القياسي و الإحصاء التطبيقي، سلسلة شوم، دار ماك غراوهيل، 1985.

3 - نصيب رجم، الإحصاء التطبيقي، دار العلوم للنشر و التوزيع، عنابة، الجزائر، 2004 .

4 - عبد الحفيظ مصطفى، نظرية الاحتمالات، مبادئ و تطبيقات، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004.

5 - جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الإحتمالات، دار المسيرة للنشر و التوزيع و الطباعة، عمان، الطبعة الأولى 2011.

6 - لرقام جميلة، دروس في الإحتمالات، دار الحديث للكتاب، الجزائر، 2011.

7 -شبيجل، شيلر، سرينيقاسان، الاحتمالات و الإحصاء، ملخصات إيزي شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2004 .

8 - د. أنور اللحام، محمد شفيق ياسين، مبادئ الإحصاء و الإحتمال لطلاب السنوات الأولى، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.

9 -جيلالي جلاطو، نظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية مع تمارين ومسائل محلولة، دار هومة للطباعة والنشر والتوزيع، الجزائر، 2014.

10 -محمد صبحي أبوصالح، "مبادئ الإحصاء"، دار البازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.

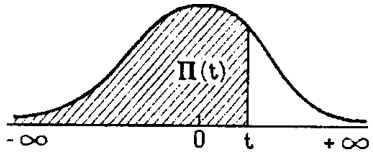
11 -محمود علي متولي عجوز، الإحصاء والاحتمالات وبحوث العمليات، المكتب الجامعي الحديث، الإسكندرية، مصر، 2009.

ملحق الجدول الإحصائي للتوزيع الطبيعي

TABLES STATISTIQUES

Table A : Fonction de répartition de la loi normale réduite

1. TABLE DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à x)



$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\, dt\ .$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE X

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(x)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

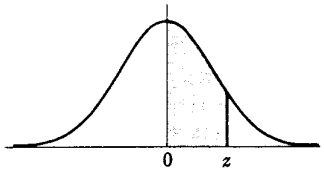
Nota — La table donne les valeurs de $F(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemples : pour $x = 1{,}37$ $F(x) = 0{,}9147$
pour $x = -1{,}37$ $F(x) = 0{,}0853$

Table B : Fonction de répartition de la loi normale réduite

(Probabilité de trouver une valeur comprise entre 0 et z)

Aires sous la courbe normale réduite comprises entre 0 et *z*



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	,0000	,0040	,0080	,0120	,0160	,0199	,0239	,0279	,0319	,0359
0,1	,0398	,0438	,0478	,0517	,0557	,0596	,0636	,0675	,0714	,0754
0,2	,0793	,0832	,0871	,0910	,0948	,0987	,1026	,1064	,1103	,1141
0,3	,1179	,1217	,1255	,1293	,1331	,1368	,1406	,1443	,1480	,1517
0,4	,1554	,1591	,1628	,1664	,1700	,1736	,1772	,1808	,1844	,1879
0,5	,1915	,1950	,1985	,2019	,2054	,2088	,2123	,2157	,2190	,2224
0,6	,2258	,2291	,2324	,2357	,2389	,2422	,2454	,2486	,2518	,2549
0,7	,2580	,2612	,2642	,2673	,2704	,2734	,2764	,2794	,2823	,2852
0,8	,2881	,2910	,2939	,2967	,2996	,3023	,3051	,3078	,3106	,3133
0,9	,3159	,3186	,3212	,3238	,3264	,3289	,3315	,3340	,3365	,3389
1,0	,3413	,3438	,3461	,3485	,3508	,3531	,3554	,3577	,3599	,3621
1,1	,3643	,3665	,3686	,3708	,3729	,3749	,3770	,3790	,3810	,3830
1,2	,3849	,3869	,3888	,3907	,3925	,3944	,3962	,3980	,3997	,4015
1,3	,4032	,4049	,4066	,4082	,4099	,4115	,4131	,4147	,4162	,4177
1,4	,4192	,4207	,4222	,4236	,4251	,4265	,4279	,4292	,4306	,4319
1,5	,4332	,4345	,4357	,4370	,4382	,4394	,4406	,4418	,4429	,4441
1,6	,4452	,4463	,4474	,4484	,4495	,4505	,4515	,4525	,4535	,4545
1,7	,4554	,4564	,4573	,4582	,4591	,4599	,4608	,4616	,4625	,4633
1,8	,4641	,4649	,4656	,4664	,4671	,4678	,4686	,4693	,4699	,4706
1,9	,4713	,4719	,4726	,4732	,4738	,4744	,4750	,4756	,4761	,4767
2,0	,4772	,4778	,4783	,4788	,4793	,4798	,4803	,4808	,4812	,4817
2,1	,4821	,4826	,4830	,4834	,4838	,4842	,4846	,4850	,4854	,4857
2,2	,4861	,4864	,4868	,4871	,4875	,4878	,4881	,4884	,4887	,4890
2,3	,4893	,4896	,4898	,4901	,4904	,4906	,4909	,4911	,4913	,4916
2,4	,4918	,4920	,4922	,4925	,4927	,4929	,4931	,4932	,4934	,4936
2,5	,4938	,4940	,4941	,4943	,4945	,4946	,4948	,4949	,4951	,4952
2,6	,4953	,4955	,4956	,4957	,4959	,4960	,4961	,4962	,4963	,4964
2,7	,4965	,4966	,4967	,4968	,4969	,4970	,4971	,4972	,4973	,4974
2,8	,4974	,4975	,4976	,4977	,4977	,4978	,4979	,4979	,4980	,4981
2,9	,4981	,4982	,4982	,4983	,4984	,4984	,4985	,4985	,4986	,4986
3,0	,4987	,4987	,4987	,4988	,4988	,4989	,4989	,4989	,4990	,4990
3,1	,4990	,4991	,4991	,4991	,4992	,4992	,4992	,4992	,4993	,4993
3,2	,4993	,4993	,4994	,4994	,4994	,4994	,4994	,4995	,4995	,4995
3,3	,4995	,4995	,4995	,4996	,4996	,4996	,4996	,4996	,4996	,4997
3,4	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4997	,4998
3,5	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998	,4998
3,6	,4998	,4998	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999
3,7	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999
3,8	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999	,4999
3,9	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000	,5000

Table C : Fonction de répartition de la loi normale réduite

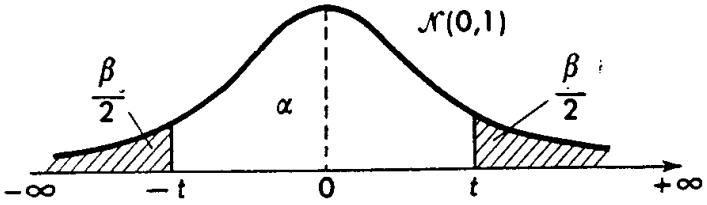
(Probabilité d'appartenir à un intervalle de confiance)

La table donne la probabilité β pour que l'écart-réduit Z égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée t, c'est-à-dire la probabilité extérieure à l'intervalle $(-t, +t)$.

$$\beta = 1 - \alpha$$

ou

$$\beta = \Pr\{-t \leqslant Z \leqslant +t\}$$



$$\beta = 2[1 - \Pi(t)]$$

β	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,064	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Ex : Pour $Z = 1{,}96$ la probabilité est $\beta = 0{,}00 + 0{,}05 = 0{,}05$.

TABLE POUR LES PETITES VALEURS DE β

β	0,001	0,000 1	0,000 01	0,000 001	0,000 000 1	0,000 000 01	0,000 000 001
Z	3,290 53	3,890 59	4,417 17	4,891 64	5,326 72	5,730 73	6,109 41