الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.

جامعة ابي بكر بالقايد –تلمسان-

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية

# محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة

**موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس**

**من إعداد:**

**د. بوكليخة لطيفة**

**أستاذة محاضرة – أ –**

**السنة الجامعية 2022 – 2023**

# فهرس المحتويات


| العنوان |
| --- |
| فهرس المحتويات |
| الفصل التمهيدي |
| نشاة رياضيات المؤسسة |
| مفهوم رياضيات المؤسسة |
| اساليبها |
| مجالات تطبيق رياضيات المؤسسة |
| النموذج |
| 5-1-مكونات النموذج |
| 5-2-أنواع النماذج |
| 5-3-خطوات تصميم النموذج |
| الفصل الثاني: البرمجة الخطية |
| المحور الأول: البرمجة الخطية |
| مفهوم البرمجة الخطية |
| 1-1-استخدامات البرمجة الخطية |
| 1-2-عناصر البرمجة الخطية |
| 1-3-الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية |
| سلسلة تمارين محلولة |
| المحور الثاني: حل النماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية |
| حل نماذج البرمجة الخطية |
| 2-1-الطريقة البيانية |
| 2-2-في حالة التعظيم |
| 2-3- في حالة التدني |
| سلسلة تمارين محلولة |
| المحور الثالث: طريقة السمبلكس |
| عرض حل نماذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس |

| |
|---|
| **3-1-في حالة التعظيم** |
| **3-2-في حالة التدني** |
| **سلسلة تمارين محلولة** |
| **المحور الرابع: النموذج الثنائي وتحليل الحساسية** |
| **البرنامج المرافق** |
| **4-1-تحويل البرنامج الأصلي الى البرنامج الثنائي** |
| **4-2-استخراج حل البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الثنائي** |
| **تحليل الحساسية** |
| **سلسلة تمارين محلولة** |
| **الفصل الثاني: مشاكل النقل** |
| **مفهوم مسالة النقل** |
| **شروط استخدام مسائل النقل** |
| **صياغة البرنامج الخطي لمسالة النقل** |
| **طرق حل مسائل النقل** |
| **4-1- إيجاد الحل الأساسي الاولي** |
| **4-2-اختبار امثلية الحل وتحسينه** |
| **سلسلة تمارين محلولة** |
| **الفصل الثالث: البرمجة غير الخطية بالقيود وبدون قيود** |
| **تمارين مقترحة** |
| **المراجع** |

# فصل تمهيدي

- **نشأة رياضيات المؤسسة**
- **مفهوم رياضيات المؤسسة**
- **اساليبها.**
- **النموذج**

**– مكونات النموذج.**

**– انواع النموذج.**

## 1- نشأة رياضيات المؤسسة:

إن البحث في نشأة وتطور رياضيات المؤسسة يستلزم منا أولا وقبل كل شيء البدء في استعراض حركة الإدارة العلمية كمنطلق أساسي للاتجاهات الحديثة في علم الإدارة ثم نستعرض بعد ذلك نشأة وتطور بحوث العمليات كامتداد لهذا الاتجاه العلمي في الإدارة .إذْ شهدت بدايات القرن العشرين جهادا كبيرا لإضفاء الطابع العلمي على عمليات الإدارة؛ حيث بدأت حركة الإدارة العلمية في الظهور عام 1911 م عندما قدم **فردريك ونسلو تيلور** كتابه الشهير بعنوان (الإدارة العلمية) ، الذي دعا فيه إلى ضرورة استبدال طريقة الحكم الشخصي والتجربة والخطأ بطريقة أخرى تعتمد على البحث العلمي في كل ما يتعلق بالعمل.

كما زاد الاهتمام بإضافة طرق علمية لحل مشكلات الإدارة أثناء الحرب العالمية الثانية، عندما لجأ الأمريكيون والإنجليز إلى الأساليب الكمية في حل المشاكل التي واجهتهم حينئذ .حيث تم تكوين فريق من العلماء وفي مختلف المجالات والتخصصات (الرياضيات، والهندسة، والسلوكيات...الخ) لدراسة المشكلات واقتراح الحلول المناسبة، وتحديد أفضل الوسائل وأكثرها أمنا للإنزال العسكري، ونقل المؤن أ وفراد الجيش في أمريكا وانجلترا .وقد ح ف ز نجاح استخدام هذه الأساليب خلال الحرب العالمية الثانية في اتخاذ القرارات العسكري، وتوسيع قاعدة الاستعمالات من خلال استخدام المبادئ الأساسية في مختلف نواحي الإدارة غير العسكرية، وبالطبع تم استخدام هذه الطرق العلمية الجديدة في الصناعة والتجارة خاصة مع تنامي العرض والطلب بعد الحرب العالمية الثانية حيث ارتفع عدد المديرين المهتمين بمشكلات الإدارة وتقديرهم للطرق الحديثة في حلها .نتج عن ذلك أن احد طرق الوصول لحل مشكلة ما كانت باستخدام الطرق الرياضية من خلال مجموعة من النماذج .وحاليا زاد الاهتمام بعلم رياضيات المؤسسة في جميع أنحاء العالم والدليل على ذلك عدد الجامعات والكليات التي تقوم بتدريس عل م رياضيات المؤسسة وإن كان ذلك بمسم يات مختلفة مثل: بحوث العمليات، البرمجة الرياضية، وعلم القرار، وتحليل النظم، والهندسة المالية، وهندسة التسويق.

كما تطورت طرق الحل باستخدام رياضيات المؤسسة وأصبحت متعددة وقادرة على إيجاد حلول للمشاكل ال تي كان يصعب حلها فهناك ا لطريقة البيانية والتي تحل مشكلة من متغيرين عن طريق تمثيل العلاقة بينهما على محور متعامد ومتجانس أو ثلاثة متغيرات باستخدام الرسوم ثلاثية الأبعاد

والهندسة الفراغية أما إذا زاد عدد المتغيرات عن ذلك فيتم حلها عن طريق الجداول والعمليات الحسابية ( الطريقة المبسطة. )

## 2- مفهوم رياضيات المؤسسة:

- هي استخدام الأساليب والأدوات الكمية المختلفة لمعالجة المشكلات التي تتصف بمحدودية الموارد

وتعدد البدائل في ظل وظائف المؤسسة؛

- هي التحضير العلمي لاتخاذ القرارات.

3- **اساليبها:**تتسم رياضيات المؤسسة بتعدد وتنوع أساليبيا، وكل أسلوب له مجال استعماله منها :البرمجة الخطية، برمجة الأهداف، نموذج النقل، نماذج شبكات الأعمال، نماذج صفوف الانتظار، تحليل سلاسل ماركوف، نظرية المباريات، نماذج الرقابة عمى المخزون، البرمجة الديناميكية، نماذج المحاكاة.

## 4- مجالات تطبيق رياضيات المؤسسة:

أ –**تحديد المكان الأمثل** :حيث يتم تحديد المكان الأمثل من كافة الجوانب لإقامة مشروع مع ين، مثل إنشاء سد على نهر، أو إقامة جامعة، مصنع أو مستشفى...الخ، فعلى سبيل المثال لو أن هناك مشروع لإقامة طريق ل ي م ر من جبل، ف ي مكن لرياضيات المؤسسة أن تحدد الخيارات وهي أن تدلك على الاختيار الأمثل أ و هل يلتف الطريق حول الجب ل؟ هل نقوم بحفر نفق من داخل الجبل؟ أم نقوم بإنشاء جسور تمر من جانب الجبل؟ ومن هذه الخيارات يتم تحديد الخيار الأمثل.

ب –**الصناعة والتجارة والزراعة** : توزيع الإنتاج، استخدام أمثل ل لموار د ومراقبة المخزون.

ت –**النقل والمواصلات** :المواصلات البرية، الرحلات الجوية، حرك ة المرور، و استخدام الهاتف.

ث –**التخطيط** :تنظيم استخدام القوى العاملة، تخطيط المشروعات، تخطيط اقتصادي، جدولة الأعمال، تخطيط المدن .وكذلك متابعة المشاريع وإعداد الخطط الزمنية لتنفيذ المشاريع المختلفة

ج –**التسويق والمبيعات** : رس م سياسات تسعيرية وتسويقية، بحوث التسويق، الدعاية والإشهار، دراسة السوق، تحديد سياسات التوزيع.

ح –**المجال العسكري** :رسم الإستراتيجيات وتنظيم برامج التدريب بالمحاكاة وخطط الانسحاب، استخدام أمثل لل م ع د ات والمؤن والذخائر العسكر ية، إيجاد خطط لبرامج التسليح، تنظيم العمليات الحربية وتنظيم التعاون في ما بين الفروع المختلفة للقوات المسلحة.

خ –**المجالات الإدارية** :حيث يوفر هذا العلم المعلومات اللازمة لاتخاذ القرار المناسب وفي الوقت المناسب.

د –**مجال الإنتاج والتصنيع** :من خلال تقليل تكاليف الإنتاج إلى أقصى حد ممكن وتعظيم الأربَح.

ذ –**مجالات التعيين في التوظيف** :من خلال اختيار الشخص المناسب لوظيفة أو منصب معين.

5- **النموذج**: هو تمثيل أو تجريد مبسط لمواقع العلمي في صورة مجموعة من المعادلات، والرموز الرياضية، أي هو تمثيل رياضي للواقع من خلال التجريد والتبسيط،( لان الواقع أعقد من أن يصب في قالب رياضي دون أن يكون هناك تضحية بحقائق مموسة، والتجريد والتبسيط التي من خلال وضع الفرضيات ( الفرضية هي تخمين مؤقت نعتقد هو الأصوب لبلوغ ما نصبو إليه).

**5–1 مكونات النموذج**: يتكون النموذج من الثوابث والمعا لم

– **الثوابت** :هي قيم ثابتة تم اكتشافها ويعمل بها إلا في حالة إثبات عكس ذلك علميا مثل $\pi = 3.14$

وهي قيمة معتمدة منذ اكتشافها من طرف الفراعنة غداة تأسيس الأهرامات، و $e = 2.71$ وهي قيمة ثابتة منذ اكتشافها من طرف النيبر الالماني.

– **المعالم** :هي عبارة عن قيم ثابتة يتم اعتمادها وفق الغرض خلال أداء النموذج؛

– **المتغيرات** :هناك عدة تصنيفات، المتغيرات الداخلية والخارجية فالداخلية تتحدد قيمها من داخل النموذج وهي تؤثر في بعضها البعض مع تأثرها بالمتغيرات الخارجية ولا تؤثر فيها أما المتغيرات الخارجية فهي تتحدد من خارج النموذج وهي تؤثر في المتغيرات الداخلية ولا تتأثر بها؛

– **القيود** :عادة ما يعبر عنيا في صورة متباينات و/أو معادلات.

**5–2–انواع النماذج**: تنقسم الى:

- **تبعا لغرض النموذج** :النماذج الوصفية :يتم بناؤها لوصف المشكلة منها النماذج الإحصائية (المتوسطات)

النماذج المعيارية :وهي النماذج التي تعطي الحل الأمثل لمشكلة التي يمثلها النموذج وهي تعتبر بذلك من النماذج المثالية مثل نموذج البرمجة الخطية،

نماذج تنبؤيه :تكون لها القدرة عمى التنبؤ بما يحدث إذا ما اتخذ قرار معين وذلك عن طريق الربط بين المتغيرات التابعة والمستقلة مثل السلاسل الزمنية؛

- **تبعا لخصائص النموذج** :نماذج ساكنة :وهي التي لا تأخذ بعين الاعتبار التغير في الزمن، نماذج حركية وهي التي تتغير من فترة زمنية لأخرى؛
- **تبعا لدرجة التأكد** :نماذج تحديدية :تفترض حالة التأكد التام والمعرفة الكاملة عند تصميميا، – نماذج احتمالية :معاملات النموذج غير معلومة؛
- **تبعا لإجراءات الحل** :نماذج تحليلية :يتم حلها بأساليب رياضية أو تحليلية معروفة مثل طريقة السمبلكس،

نماذج المحاكاة :تصف ما يحدث خلال فترة زمنية مختارة تحت مجموعة من الظروف المتنوعة ويناسب هذا النموذج العلاقات المعقدة.

**4-3-خطوات تصميم نموذج:** يمر تصميم أي النموذج عبر الخطوات الاتية:

- الملاحظة؛

- تعريف المشكلة وصياغتها :والتي تتجلى في وجود خلل يتمثل في اختلاف الحالة القائمة عن الحالة المرغوبة؛

- تحديد الهدف أو مجموعة الأهداف المرغوب تحقيقها:مثل هدف واحد تعظيم الربح أو التقليل من التكاليف، أو أكثر من بهدف تعظيم الربح مع زيادة المبيعات؛

- صياغة الفروض المناسبة؛

- تحديد العوامل والعناصر الملائمة للمشكلة موضع الفحص( متغيرات، معالم، قيود)؛

- تجميع المعلومات والبيانات الخاصة بالنموذج؛

- تكوين نموذج رياضي؛

- حل النموذج؛
- تجربة النموذج وتعميمه؛
- مراقبة النموذج وتطبيقه بعد التأكد من ملاءمته.

# الفصل الأول: البرمجة الخطية

**المحور الأول: مفهوم البرمجة الخطية**

**المحور الثاني: حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية**

**المحور الثالث: حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس**

**المحور الرابع: النموذج الثنائي وتحليل الحساسية**

# الفصل الأول :البرمجة الخطية

## 1- مفهوم البرمجة الخطية:

تعرف البرمجة الخطية بأنها تقنية رياضية تستعمل لحل مجموعة من المشاكل، فهي تبحث في الحل أو الحلول لمشكلة اقتصادية، إنتاجية، تخزينية، تسويقية...) وذلك لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة المستعملة لاستخدامات مختلفة من أجل تحقيق هدف معين[1].

كما تعرف المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية بأنها طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادرة أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، بحيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متباينات خطية.

### 1-1- استخدامات البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في مجالات عدة لأجل حل المشكلات التي تواجه متخذ القرار في المؤسسة، أهم

هذه المجالات ما يلي[2]:

- المساعدة في اتخاذ القرارات المختلفة، المتعلقة بالوظائف الرئيسية للمؤسسة .
- التخطيط و الرقابة على الإنتاج.
- المساعدة على تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل.
- تساعد في المفاضلة) الاختيار (بين طرق الإنتاج المتاحة.
- المساهمة في تحديد أفضل الطرق لتوزيع الإنتاج.
- توزيع الطاقة الإنتاجية المتاحة قوى عاملة، مواد أولية، مكائن، مستلزمات الإنتاج المختلفة على العمليات الصناعية بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد من خلال تحديد التوليفة المثلى للمنتجات.

تحديد برامج إنتاج بما يضمن تقليل التكاليف/تعظيم الأرباح مع الأخذ في الاعتبار الطلب المتوقع.

### 1-2- عناصر البرمجة الخطية:

---

1-محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الرابعة، الجزائر، 2011 ، ص9

**2-السعدي رجال، بحوث العمليات في الإدارة–المالية–التجارة، منشو ا رت جامعة منتوري، قسنطينة، 2005 – 2004 ، ص2**

– **دالة الهدف** :إن الهدف الذي نسعى إلى الوصول إليه من وراء حل المشكلة يتمثل في الوصول إلى الأمثلية (L'optimalité) و التي تأخذ أحد الوجهين: التعضيم Maximisation (الارباح، العوائد...)، تدنية (تقليل) minimisation (تكاليف، خسائر...)،[3] و يمكن أن نعبر عن هذا الهدف بمعادلة رياضية تسمى دالة الهدف.

– **القيود** :تعكس القيود في معظم الحالات محدودية الموارد، و تعبر عن مجموعة المحددات التي لا يستطيع متخذ القرار التحكم فيها.

– **المتغيرات** :و التي تعبر عن متغيرات القرار، و هي المجاهيل التي تعبر عن الشيء المطلوب تحديده في المشكلة قيد البحث.

## 1–3– الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية :

نقصد به تحويل المسألة من واقع كلامي مسرود في شكل تعابير أدبية إلى شكل مسألة مصاغة في قالب رياضي واضح، ولبناء النموذج الرياضي لبرنامج الخطي يمكن إتباع الاتي:

- **تحديد المتغيرات** ويعتبر أول خطوة في بناء النموذج الرياضي لبرنامج الخطي، إذ يجب تحديد المتغيرات الواجب تعظيمها في حالة التعظيم أو الواجب تدنئتها في حالة التدنية، حيث تدخل هذه المتغيرات في كتابة الشكل الرياضي في كل الخطوات اللاحقة.
- **تشكيل جدول المسالة** :بعد تحديد المتغيرات يجدر بنا تشكيل جدول المسألة بحيث يحتوي هذا الجدول على جميع عناصر المسألة من متغيرات وقيود والكميات المحددة لدالة الهدف.
- **تحديد دالة الهدف** :وهو إمكانية التعبير عن الهدف المنشود الذي نرغب في تحقيقه في صورة دالة خطية والحصول على قيمة رقمية له نسعى إلى إيجاد النهاية العظمى لها إذا كان الهدف المنشود هو تعظيم الربح، أو إيجاد النهاية الصغرى لها إذا كان الهدف هو تدنئة التكلفة، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات التي قمنا بتحديدها في الخطوة الأولى مضروبة في معامل خاص يعبر عن ربح الوحدة الواحدة في حالة التعظيم، أو يعبر عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة التدنية.

3–دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **بحوث العمليات**، دار اليازوري، الطبعة العربية، عمان، الأردن،2008 ، ص24 .

- **تحديد القيود** :وهو إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات والإمكانات المتاحة في صورة خطية توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة على شكل متراجحات أو معادلات أو كليهما.
- **شرط عدم السلبية** : إذ يجب أن تكون المتغيرات المشكلة للبرنامج الخطي غير سالبة أي موجبة أو معدومة.

**مثال(1-1)**:

تقوم مؤسسة ما بإنتاج الكراسي والطاولات وبيعها للمدارس، حيث أن إنتاج كرسي واحد يتطلب 3 صفائح خشبية و4 قطع من الحديد، وبعد بيعه يحقق ربحا قدره 250 دج، أما إنتاج الطاولة الواحدة فيتطلب 6 صفائح خشبية و7 قطع من الحديد، وبعد بيعها تحقق ربحا قدره 430 دج، حيث أن المؤسسة لا تتوفر إلا على 180 قطعة خشبية و320 قطعة من الحديد.

**المطلوب**: ما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها من كلا المنتجين، والتي تحقق لمؤسسة أكبر ربح ممكن؟

لدينا:

| | الخشب | الحديد | الربح |
|---|---|---|---|
| **الكراسي** | 3 | 4 | 250 |
| **الطاولات** | 6 | 7 | 430 |
| **الكمية المتاحة** | 180 | 320 | |

## 1- تحديد متغيرات القرار:

$x_1$: تمثل كمية الكراسي التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أكبر ربح؛

$x_2$: تمثل كمية الطاولات التي سوف تنتجها المؤسسة و تحقق لها أعظم ربح.

**2- صياغة دالة الهدف:** إن ربح المؤسسة ناتج عن إنتاج و بيع كل من الكراسي و الطاولات و عليه:

**2-1- إنتاج الكراسي:**

إنتاج 1 كرسي يحقق ربحا قدره $(1 \times 250)$

إنتاج 2 كرسي يحقق ربحا قدره $(2 \times 250)$

إنتاج $x_1$ كرسي يحقق ربحا قدره $(x_1 \times 250)$

**2-2- إنتاج الطاولات:**

إنتاج 1 طاولة يحقق ربحا قدره $(1 \times 430)$

إنتاج 2 طاولة يحقق ربحا قدره $(2 \times 430)$

إنتاج $x_1$ طاولة يحقق ربحا قدره $(x_2 \times 430)$

وعليه وبما أن هذه المؤسسة تسعى إلى تعظيم أرباحها فإنه يمكن صياغة دالة الهدف على النحو التالي:

$$Max\ Z = 250\ x_1 + 430\ x_2$$

**3- صياغة القيود الوظيفية:** فعلى المؤسسة أن تحترم ما تتوفر عليه من مواد أولية عند تعظيمها لأرباحها.

**3-1- المادة الأولية الأولى (الخشب):** تمثل كمية الخشب الكلية مجموع الخشب المستخدم في إنتاج الكراسي $(x_1 \times 3)$ و الخشب المستخدم لإنتاج الطاولات $(x_2 \times 6)$ و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 180 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$3\ x_1 + 6\ x_2 \leq 180$$

**3-2- المادة الأولية الثانية (الحديد):** تمثل كمية الحديد الكلية مجموع الحديد المستخدم في إنتاج الكراسي $(x_1 \times 4)$ و الحديد المستخدم لإنتاج الطاولات $(x_2 \times 7)$ و الذي يجب أن لا يتجاوز الكمية المتاحة و المقدرة بـ 320 قطعة. و هذا يمكن التعبير عنه رياضيا بالصياغة التالية:

$$4\,x_1 + 7\,x_2 \leq 320$$

**4- قيود عدم سلبية المتغيرات:** حيث أن إنتاج كل من الكراسي و الطاولات لا يمكن أن يكون بكميات سالبة، فإما يكون موجبا أو معدوما، و هو ما يُعبر عنه بالصياغة التالية:

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

و عليه و بتجميع الصيغ الرياضية المحصل عليها سابقا، نحصل على الشكل النهائي لنموذج البرمجة الخطية:

$Max\ Z = 250\,x_1 + 430\,x_2$ **دالة الهدف**

**تحت القيود**

$3\,x_1 + 6\,x_2 \leq 180$ قيد الخشب

$4\,x_1 + 7\,x_2 \leq 320$ قيد الحديد

$x_1 \geq 0$ قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى

$x_2 \geq 0$ قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية

## سلسلة تمارين رقم 01

**التمرين الأول**

تختص مؤسسة في إنتاج الطاولات والكراسي في قسمين للإنتاج التحضير والإتمام، تحتاج الطاولة الواحدة 4 ساعات في قسم التحضير وساعتين في قسم الإتمام، بينما يحتاج الكرسي الواحد ساعتين في قسم التحضير و 4 ساعات في قسم الإتمام؛ الطاقة الإنتاجية القصوى للقسمين حددت ب 60 ساعة في قسم التحضير، و 48 ساعة في قسم الإتمام .إذا كان الربح هو 800 دينار عن كل طاولة و600 دينار عن كل كرسي.

**المطلوب**: أوجد خطة الإنتاج المثلى التي تعظم الربح.

**التمرين الثاني**:

يقوم مصنع بإنتاج نوعين من السلع، حيث يقدر الربح الوحدوي للنوع الأول ب 80 دج وللنوع الثاني 60 دج،

ونظرا لنقص المواد الأولية فان الإنتاج اليومي لا يمكن أن يتجاوز 1600 وحدة من النوعين، ولنفس السبب لا يمكن أن يتجاوز 800 وحدة من النوع الأول ولا يمكن أن يتجاوز من النوع الثاني 1400وحدة.

**المطلوب**: أوجد خطة الإنتاج اليومي المثلى التي تجعل الأرباح في حدها الأقصى.

**التمرين الثالث**:

تلقت مؤسسة للأسمدة الزراعية طلبا بحجم 1000 طن من مبيد خاص لمكافحة الجراد، حيث يتكون هذا المبيد من ثلاثة مواد كيميائية هي: M1 .M2.M3.

وتقدر تكاليفها بـ: 5000 دج، 6000دج، 7000دج، للطن الواحد على التوالي، حيث تخضع العملة للشروط التالية:

- لا يمكن استخدام اكثر من 300طن من المادة M1.
- يجب استعمال 150 طن على الأقل من M2.
- يجب استعمال 200 طن على الأقل من M3.

**المطلوب:** حدد الكميات الواجب استخدامها من المواد الثلاثة لتلبية هذا الطلب، وذلك بغرض تخفيض التكاليف الى اقصى حد ممكن.

**التمرين الرابع:**

تمتلك شركة لتعدين النحاس منجمين، ينتج كل منهما ثلاث أنواع من الخام هي عالي الجودة والمتوسط

والمنخفض؛ لدى الشركة عقد لتوريد 12 طن من الخام مرتفع الجودة و 8 أطنان من الخام متوسط الجودة و 24 طن من الخام منخفض الجودة لشركة صهر النحاس.

- ينتج المنجم الأول 6 طن من الخام مرتفع الجودة و 2 طن من الخام متوسط الجودة و 4 طن من الخام منخض الجودة في الساعة.

ينتج المنجم الثاني 2 طن من الخام مرتفع الجودة و 2 طن من الخام متوسط الجودة و 12 طن من الخام منخض الجودة في الساعة.

**المطلوب** : تحديد عدد الساعات اللازمة لتشغيل كل منجم لتلبية الالتزامات التعاقدية بأقل تكلفة إذا علمت أن تكلفة تعدين الطن الخام الواحد في الساعة هي 2000 ون و 1600 ون في المنجمين الأول والثاني على التوالي.

## المحور الثاني: حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية

**2- حل نماذج البرمجة الخطية:** نعني بحل البرنامج الخطي، إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أوفي حالة تدنية.[4] و عليه فإن الحل يمثل كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية.

و يمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من الحلول:

- **الحل المقبول (*Solution réalisable*)**: هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية وقيود عدم سلبية المتغيرات؛
- **الحل غير المقبول (*Solution non réalisable*)**: هو كل قيم متغيرات القرار التي تحقق القيود الوظيفية و **لا** تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.
- **الحل الأمثل (*Solution Optimale*)**: نسمي حلاً أمثلاً كل حل مقبول و الذي يعطي لدالة الهدف أمثل قيم، أي أعظم قيمة في حالة *Max*، و أدنى قيمة في حالة *Min*.

**2-1- الطريقة البيانية:** تستخدم طريقة الرسم البياني لإيجاد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية، و تعتبر من أسهل الطرق و التي تُستعمل فقط في حالة وجود متغيرين و الاستغناء عن ثلاثة متغيرات لأن تمثيلها يتم في الفضاء و يصعب تحليله.[5]

**-خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية:** تتمثل خطوات الحل وفق الطريقة البيانية فيما يلي:

**الخطوة الأولى:** يتم رسم القيود على أنها معادلات، و ذلك كما يلي:

بالنسبة للقيد الأول يتم افتراض أن أحد المتغيرين معدوم و بالتالي يمكن حساب المتغير الآخر، و نفس الشيء يتم افتراض أن المتغير الثاني معدوم ليتم حساب المتغير الأول، و بهذا تكون لدينا نقطتان يتم من خلالهما رسم

[4] محمد راتول، **مرجع سابق**، ص 25.

[5] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B-** كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر، ص 37.

مستقيم القيد الأول. و بنفس الطريقة يتم رسم مستقيمات باقي القيود و بتقاطعها يتم الحصول على منطقة الحلول المقبولة (الممكنة)، و يجب ملاحظة اتجاه المتراجحات أو القيود.[6]

حيث أنه: [7]

- ❖ إذا كانت العلاقة في القيد $\leq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه كبر المتغيرات؛
- ❖ إذا كانت العلاقة في القيد $\geq$ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه صغر المتغيرات؛
- ❖ إذا كانت العلاقة في القيد $=$ فإن اتجاه الحل سوف يقع على الخط؛

- **الخطوة الثانية:** إيجاد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة زاوية ونختار أفضلها في كلتا الحالتين، فإذا كانت دالة الهدف تعظيم $(Max)$ يتم اختيار أكبر قيمة، وفي حالة كون دالة الهدف تدنية $(Min)$ يتم اختيار أصغر قيمة ومن ثم تحديد الحل الأمثل.

## 2-2- في حالة التعظيم:

**مثال 02-01:**

$$Max\ Z = 1000\ x_1 + 1200\ x_2$$

$$\begin{cases} 10\ x_1 + 5\ x_2 \leq 200 \\ 2\ x_1 + 3\ x_2 \leq 60 \\ x_1 \leq 34 \\ x_2 \leq 14 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**1- التمثيل البياني للقيود:** أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

[6] **عبد** الستار أحمد محمد الآلوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 64.

[7] صوار يوسف، طاوش قندوسي، **مرجع سبق ذكره**، ص 37.

### 1-1- القيد الأول:

$10\,x_1 + 5\,x_2 \leq 200$ يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x_1 + 5\,x_2 = 200$

نضع: A ( 0 , 40) $x_1 = 0 \Rightarrow 5\,x_2 = 200 \Rightarrow x_2 = 40$

نضع: B ( 20 , 0) $x_2 = 0 \Rightarrow 10\,x_1 = 200 \Rightarrow x_1 = 20$

### 1-2- القيد الثاني:

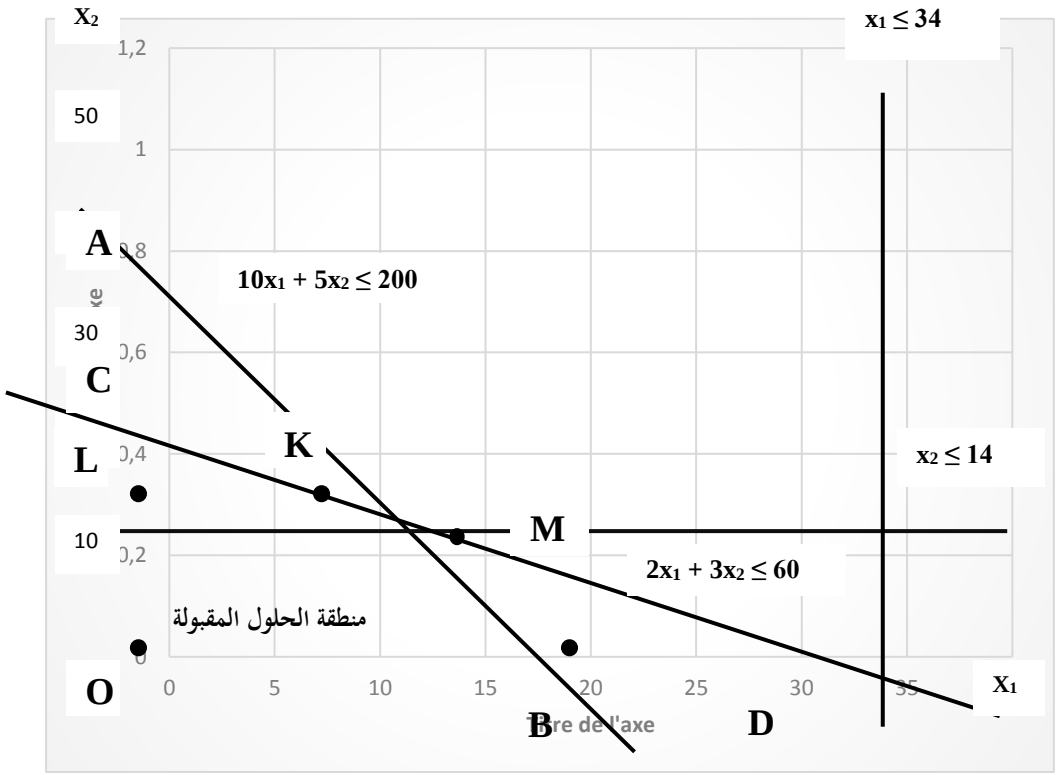
$2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 60$ يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2\,x_1 + 3\,x_2 = 60$

نضع: C ( 0 , 20) $x_1 = 0 \Rightarrow 3\,x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 20$

نضع: D ( 30 , 0) $x_2 = 0 \Rightarrow 2\,x_1 = 60 \Rightarrow x_1 = 30$

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_1 = 34$ و $x_2 = 14$، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد و متجانس.

**الشكل رقم 01: التمثيل البياني لقيود المثال 02-01**




**المصدر: من إعداد الباحثة بناءً على معطيات المثال**

عند رسم القيود نلاحظ أنها تقسم المستوي إلى قسمين: قسم يقع على يمين المستقيم و آخر يقع على يساره.

فلو أخذنا على سبيل المثال القيد الأول $10\ x_1 + 5\ x_2 \leq 200$ نلاحظ أنه يقسم المستوي إلى قسمين، أحدهما على يمين المستقيم و الآخر على يساره، و كلاهما يحتوي على عدد لانهائي من النقاط، فلو أخذنا أي نقطة من النقاط الواقعة على **اليمين** و عوضنا إحداثياتها في المتراجحة فإننا نلاحظ أنها لا تحقق القيد.

**مثل**: النقطة G(50,30) عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على: $10(50) + 5(30) > 200$ فهي لا تحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يمين (أعلى) المستقيم لا تحقق القيد و بالتالي فهي **ليست حلا** للمتراجحة.

أما لو أخذت النقاط الواقعة على يسار المستقيم و تم تعويضها في القيد فنلاحظ أنها تحقق القيد أعلاه.

**مثل**: النقطة N(10,10) (و التي تقع تحت المستقيم)، عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على $10(10) + 5(10) < 200$، و النقطة P(12,16) (و التي تقع على المستقيم) عند تعويضها في القيد أعلاه

نحصل على $200 = (16)5 + (12)10$ فكلاهما يحقق القيد، و عليه فإن جميع النقاط الواقعة يسار (تحت) القيد تحقق القيد، و بالتالي فهي **حل** للمتراجحة.

## 2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نسمي المنطقة OLKMB **منطقة الحلول المقبولة**، و هي تحتوي عدد لانهائي من النقاط، و التي تتوزع داخل المنطقة أو على حدودها، أو على النقاط الرأسية (*Points extrêmes*): O, L, K, M, B.

من أجل أي نقطة من منطقة الحلول المقبولة هناك قيمة لدالة الهدف Z، و ما يهمنا هو إيجاد النقطة التي تعطي لـ Z أعظم (أمثل) قيمة، و هاته النقطة تتواجد على أحد رؤوس منطقة الحلول المقبولة، لذلك نضطر إلى إيجاد و حساب إحداثيات النقط الرأسية، ليتم تعويضها في دالة الهدف و من ثَم اختيار النقطة الرأسية التي تعطي لـ Z القيمة الأمثل.

## 3- تحديد إحداثيات النقاط الرأسية و تقييم Z:

من الشكل أعلاه تتضح لنا إحداثيات النقاط:

$$\boldsymbol{O}\ (0\ ,\ 0) \ \Rightarrow\ Z = 1000\ (\boldsymbol{0}) + 1200\ (\boldsymbol{0}) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{Z = 0}$$

$$\boldsymbol{L}\ (0\ ,\ 14) \ \Rightarrow\ Z = 1000\ (\boldsymbol{0}) + 1200\ (\boldsymbol{14}) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{Z = 16800}$$

$$\boldsymbol{B}\ (20\ ,\ 0) \ \Rightarrow\ Z = 1000\ (\boldsymbol{20}) + 1200\ (\boldsymbol{0}) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{Z = 20000}$$

أما النقاط M و K فيتم حساب إحداثياتها جبريا.

بالنسبة للنقطة M فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $2x_1 + 3x_2 = 60$ و $10x_1 + 5x_2 = 200$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 200 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \ \ldots\ldots\ldots \times(-5) \end{cases}$$

بضرب المعادلة الثانية في (-5)، و جمع المعادلتين نحصل على:

$$10x_1 + 5x_2 + (-10x_1 - 5x_2) = 200 - 300$$

$$-10x_2 = 100 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{x_2 = 10}$$

بتعويض قيمة $x_2$ في إحدى المعادلتين (و لتكن المعادلة الثانية)، نحصل على:

$$2x_1 + 3(10) = 60 \Rightarrow 2x_1 = 60 - 30 \Rightarrow x_1 = 15$$

و منه: $M(15, 10) \Rightarrow Z = 1000(15) + 1200(10) \Rightarrow Z = 27000$

أما بالنسبة للنقطة K فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $x_2 = 14$ و $2x_1 + 3x_2 = 60$، و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$\begin{cases} x_2 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 = 60 \end{cases}$$

بتعويض قيمة $x_2$ في المعادلة الثانية نحصل على:

$$2x_1 + 3(14) = 60 \Rightarrow 2x_1 = 60 - 42 = 42 \Rightarrow x_1 = 9$$

و منه: $K(9, 14) \Rightarrow Z = 1000(9) + 1200(14) \Rightarrow Z = 25800$

و عليه فإن الحل الأمثل هو النقطة: $M(15, 10)$.

و بعد إيجاد الحل الأمثل للنموذج، يمكن أن نخلُص إلى أن البرنامج الإنتاجي الأمثل للمؤسسة هو كالتالي:

$x_1 = 15$ أي على المؤسسة إنتاج 15 وحدة من المنتج الأول؛

$x_2 = 10$ أي على المؤسسة إنتاج 10 وحدات من المنتج الثاني.

## 4- تحقيق قيود النموذج:

يتم في هذه المرحلة التأكد من ما إذا كان الحل الأمثل يحقق قيود النموذج من عدمه، و عليه يتم تعويض قيم الحل الأمثل في القيود الوظيفية و قيود عدم سلبية المتغيرات:

$$\begin{cases} +910\,(15) + 5\,(10) = 200 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{قيد محقق} \\ 2\,(15) + 3\,(10) = 60 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{قيد محقق} \\ 15 < 34 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{قيد محقق} \\ 10 < 14 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{قيد محقق} \\ 15 > 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{قيد محقق} \\ 10 > 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{قيد محقق} \end{cases}$$

و عليه يتضح أن جميع قيود النموذج محققة (بإشارات: تساوي، أقل تماما، أكبر تماما)، أي أن الحل الأمثل يحقق كل القيود.

## 2-3- في حالة التدنية:

**مثال 2-2-**

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z = 300\,x_1 + 400\,x_2$$

تحت قيود التالية:

$$\begin{cases} 5\,x_1 - 5\,x_2 \leq 60 \\ x_1 + 3\,x_2 \geq 12 \\ x_1 - 2\,x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 6 \\ x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**المطلوب:** – باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه؛

## 1- التمثيل البياني للقيود:

**أ- القيد الأول:** $5x_1 - 5x_2 = 60$

$x_1 = 0 \Rightarrow -5\,x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = -12 \Rightarrow A\,(0\,,\,-12)$

$x2 = 0 \Rightarrow 5\,x1 = 60 \Rightarrow x1 = 12 \Rightarrow B\,(12\,,\,0)$

**ب- القيد الثاني:** $x_1 + 3\,x_2 = 12$

$x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow C\,(0\,,\,4)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 12 \Rightarrow D\,(12\,,\,0)$

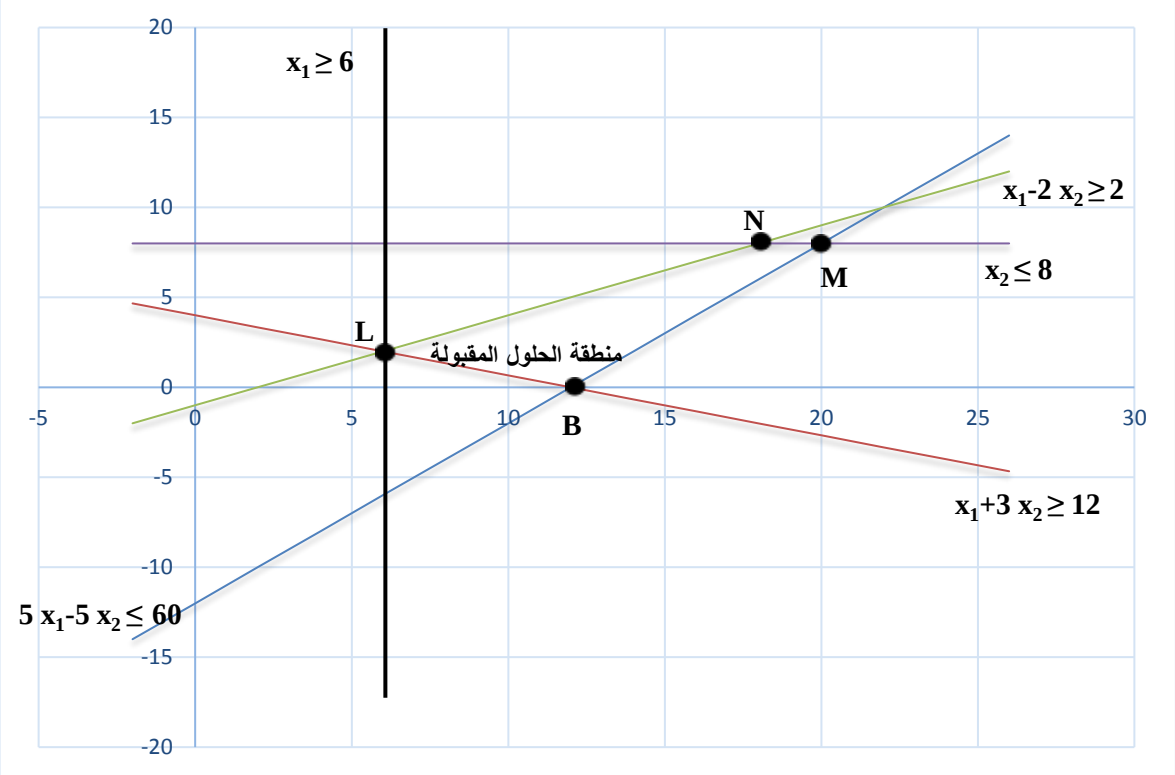
**جـ- القيد الثالث:** $x_1 - 2\,x_2 = 2$

$x_1 = 0 \Rightarrow -2\,x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow E\,(0\,,\,-1)$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow F\,(2\,,\,0)$

**د- القيد الرابع:** $x_1 = 6$

**هـ- القيد الخامس:** $x2 = 8$




**1-2- تحديد إحداثيات النقط الرأسية و قيمة دالة الهدف عندها:**

$$\mathbf{B}\ (12\ ,\ 0) \Rightarrow Z = 300\ (\mathbf{12}) + 400\ (\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{Z = 3600}$$

$$\mathbf{L}\ \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_1 - 2\,x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 2\,x_2 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \qquad \mathbf{L}\ (6,\ 2) \Rightarrow \mathbf{Z = 2600}$$

$$\mathbf{M}\ \begin{cases} x_2 = 8 \\ 5\,x_1 - 5\,x_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5\,(8) = 60 \\ x_1 = 4 \end{cases} \qquad \mathbf{M}\ (20,\ 8) \Rightarrow \mathbf{Z = 9200}$$

$$\mathbf{N}\ \begin{cases} x_2 = 8 \\ x_1 - 2\,x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2\,(8) = 2 \\ x_1 = 18 \end{cases} \qquad \mathbf{N}\ (18,\ 8) \Rightarrow \mathbf{Z = 8600}$$

وعليه فإن الحل الأمثل هو النقطة **L (6, 2)**.

# سلسلة تمارين رقم 02

## التمرين الأول:

تختص مؤسسة في إنتاج الطاولات والكراسي في قسمين للإنتاج التحضير والإتمام، تحتاج الطاولة الواحدة 4

ساعات في قسم التحضير وساعتين في قسم الإتمام، بينما يحتاج الكرسي الواحد ساعتين في قسم التحضير و 4 ساعات في قسم الإتمام؛ الطاقة الإنتاجية القصوى للقسمين حددت ب 60 ساعة في قسم التحضير، و 48 ساعة في قسم الإتمام .إذا كان الربح هو 800 دينار عن كل طاولة و 600 دينار عن كل كرسي.

**المطلوب**: أوجد خطة الإنتاج المثلى التي تعظم الربح.

## التمرين الثاني:

تملك شركة لتعدين النحاس منجمين، ينتج كل منهما ثلاث أنواع من الخام هي عالي الجودة والمتوسط والمنخفض؛ لدى الشركة عقد لتوريد 12 طن من الخام مرتفع الجودة و 8 أطنان من الخام متوسط الجودة و 24 طن من الخام منخفض الجودة لشركة صهر النحاس.

- ينتج المنجم الأول 6 طن من الخام مرتفع الجودة و 2 طن من الخام متوسط الجودة و 4 طن من الخام منخفض الجودة في الساعة.
- ينتج المنجم الثاني2 طن من الخام مرتفع الجودة و 2 طن من الخام متوسط الجودة و 12 طن من الخام منخفض الجودة في الساعة.

**المطلوب** : تحديد عدد الساعات اللازمة لتشغيل كل منجم لتلبية الالتزامات التعاقدية بأقل تكلفة إذا علمت أن تكلفة تعدين الطن الخام الواحد في الساعة هي 2000 ون و 1600 ون في المنجمين الأول والثاني على التوالي.

## التمرين الثالث:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z= 300\ x_1+400\ x_2$$

*Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} 5\,x_1-5\,x_2 \le 60 \\ x_1+3\,x_2 \ge 12 \\ x_1-2\,x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 6 \\ x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

**المطلوب: –**باستخدام الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه؛

## حل السلسلة 02

### التمرين الأول:

1- كتابة النموذج الرياضي للمسالة:

نفترض ان $x_1$: عدد الطاولات الواجب انتاجها.

$x_2$ : عدد الكراسي الواجب انتاجها.

**دالة الهدف:**

$$Max\ Z= 800\,x_1+600\,x_2$$

**القيود:**

القيد الأول: قيد قسم التحضير $4\,x_1+2\,x_2 \le 60$

القيد الثاني: قيد قسم الاتمام $2\,x_1+4\,x_2 \le 48$

**شرط عدم السلبية:** $x_1, x_2 \ge 0$

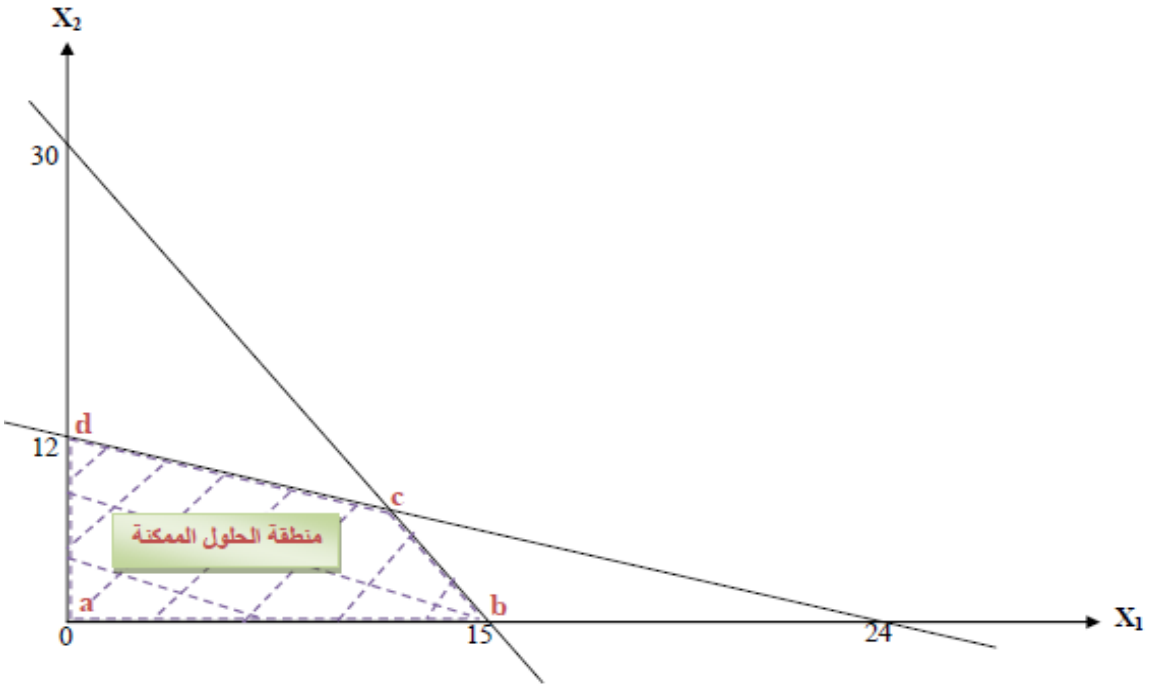
2- حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية:

تحويل القيود الى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:

$4x_1+2x_2=60$ $(x_1=0,\ x_2=30)$ $(x_1=15,\ x_2=0)$

$2x_1+4x_2=48$ $(x_1=0,\ x_2=12)$ $(x_1=24,\ x_2=0)$

**التمثيل البياني:**




عند النقطة **a**: $a\ (0,0) \Rightarrow Z = 800\ (\mathbf{0}) + 600\ (\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{Z = 0}$

عند النقطة **b** $b\ (15,0) \Rightarrow Z = 800\ (\mathbf{15}) + 600\ (\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{Z =}\ 12000$

عند النقطة **c**: $c\ (12,6) \Rightarrow Z = 800\ (\mathbf{12}) + 600\ (\mathbf{6}) \Rightarrow \mathbf{Z = 132000}$

لايجاد احداثيات النقطة c نقوم بحل جملة معادلتي القيدين كما يلي:

$4x_1+2x_2=60 \ldots\ldots(1)$

$2x_1+4x_2=48 \ldots(2)$

بضرب المعادلة (2) في (-2) وجمعها مع المعادلة (1) نجد $-6x_2 = -36 \Rightarrow x_2 = \frac{36}{6}$=6

بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $x_2 = 60 - 2 * 6/4$ =12

عند النقطة d: $d(0,12) \Longrightarrow Z_d = 800 * 0 + 600 * 12 = 7200$

**الحل الأمثل:** عند النقطة c(12.6) وبذلك تكون خطة الإنتاج المثلى التي تعظم الربح هي انتاج 12 طاولة و6 كراسي لتحقيق ربح قدره 13200 وحدة نقدية.

**التمرين الثاني:**

1- كتابة النموذج الرياضي للمسالة:

نفترض ان $x_1$: عدد الساعات الازمة لتشغيل المنجم الأول.

$x_2$: عدد الساعات الازمة لتشغيل المنجم الثاني.

$$Min\ Z = 2000(12)x_1 + 1600(16)x_2$$

$$6x_1+2\ x_2 \geq 12$$

$$2\ x1+2x_2 \geq 8$$

$$4x_1+12\ x_2 \geq 24$$

**شرط عدم السلبية:** $x_1, x_2 \geq 0$

**2- حل النموذج الرياضي بالطريقة البيانية:**

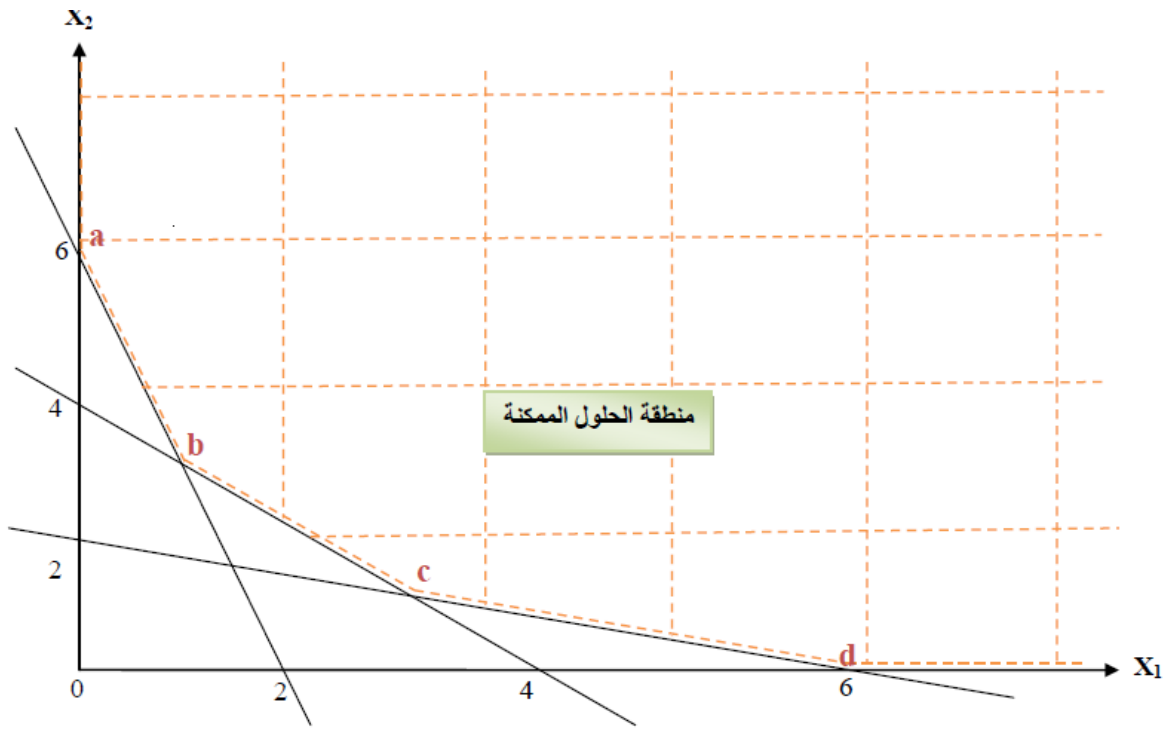
**تحويل القيود الى معادلات وإيجاد نقاط التقاطع مع المحاور:**

$6x_1+2\ x_2 \geq 12$ (x1=0, x2=6) (x1=2, x2=0)

$2\ x1+2x_2 \geq 8$ (x1=0, x2=4) (x1=4, x2=0)

$4x_1+12\ x_2 \geq 24$ (x1=0, x2=2) (x1=6, x2=0)

التمثيل البياني:




**حساب قيمة دالة الهدف عند النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة:**

**عند النقطة a:** $a(0.6) \Rightarrow Z_a = 24000 * 0 + 256000 + 6 = \mathbf{1536000}$

**عند النقطة b**: لإيجاد احداثيات النقطة b تقوم بحل معادلتي القيدين الأول والثاني كما يلي:

$$\mathbf{6x_1+2\ x_2 = 12.....(1)}$$

$$\mathbf{2\ x1+2x_2 =8.....(2)}$$

بضرب المعادلة (2) في (-3) وجمعها مع المعادلة (1) نجد: $-4x_2 = -12 \Longrightarrow x_2 = \frac{-12}{-4}$ =3

بالتعويض في المعادلة (2) نجد x1=8-2*3/2=1

$$b_{(1.3)}=Zb=24000*1+256000*3=792000$$

**عند النقطة c**: لإيجاد احداثيات النقطة c نقوم بحل معادلتي القيدين الثاني والثالث كما يلي:

$$2\,x1+2x_2 = 8\ldots\ldots(2)$$

$$4x_1+12\,x_2 = 24\ldots..(3)$$

من المعادلة (2) نجد: $X1=8-2X2/2=4-X2\ldots\ldots(4)$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد: $4(4-X2)+12X2=24 \rightarrow X2=1$

نعوض في المعادلة (4) نجد: $X1=4-X2=4-1=3$

$$c(3.1) \rightarrow Zc=24000*3+256000*1=328000$$

**عند النقطة d**: $d(6.0) \rightarrow Zd=24000*6+256000*0=144000$

**الحل الأمثل**: عند النقطة $d(6.0)$ وبذلك تكون الساعات الازمة لتشغيل كل منجم لتلبية الالتزامات التعاقدية باقل تكلفة هي تشغيل المنجم الأول 6 ساعات وعدم تشغيل المنجم الثاني.

**التمرين الثالث:**

**1- تحديد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه:**

**1-1- التمثيل البياني للقيود:**

**أ- القيد الأول:** $5x_1 - 5x_2 = 60$

$x_1 = 0 \Rightarrow -5\,x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = -12 \Rightarrow$ A (0 , -12)

$x_2 = 0 \Rightarrow 5\,x_1 = 60 \Rightarrow x_1 = 12 \Rightarrow$ B (12 , 0)

**ب- القيد الثاني:** $x_1 + 3\,x_2 = 12$

$x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow$ C (0 , 4)

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 12 \Rightarrow$ D (12 , 0)

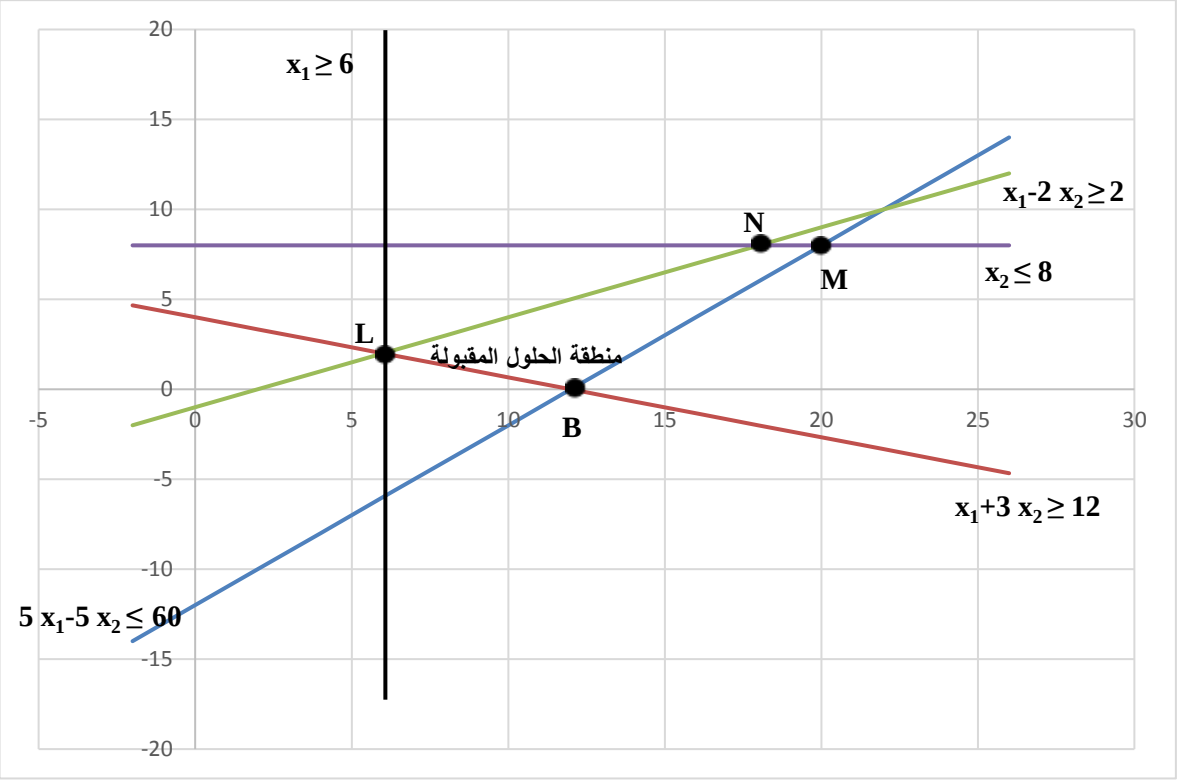
**جـ- القيد الثالث:** $x_1 - 2\,x_2 = 2$

$x_1 = 0 \Rightarrow -2\,x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -1 \Rightarrow$ E (0 , -1)

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow$ F (2 , 0)

**د– القيد الرابع:** $x_1 = 6$

**هـ– القيد الخامس:** $x_2 = 8$




**1–2– تحديد إحداثيات النقط الرأسية و قيمة دالة الهدف عندها:**

***B*** *(12 , 0)* $\Rightarrow$ *Z = 300 (**12**) + 400 (**0**)* $\Rightarrow$ ***Z = 3600***

$$L \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_1 - 2\,x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 2\,x_2 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

***L*** *(6, 2)* $\Rightarrow$ ***Z = 2600***

$$M \begin{cases} x_2 = 8 \\ 5\,x_1 - 5\,x_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5\,(8) = 60 \\ x_1 = 4 \end{cases}$$

***M*** *(20, 8)* $\Rightarrow$ ***Z = 9200***

$$\begin{cases} x_2 = 8 \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2\,(8) = 2 \\ \end{cases}$$

$N \quad x_1 - 2x_2 = 2 \Rightarrow \quad x_1 = 18 \qquad N(18, 8) \Rightarrow Z = 8600$

و عليه فإن الحل الأمثل هو النقطة $L(6, 2)$.

# المحور الثالث:طريقة السبملكس Simplex

## 3- عرض حل نماذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس:

تناولنا فيما سبق إمكانية إيجاد الحل بيانيا وقد اتصف الحل بالسهولة نظرًا لوجود متغيرين اثنين فقط، أما في حالة تعدد المتغيرات فإنه من غير الممكن استخدام الطريقة البيانية، في هذه الحالة يجب استخدام طريقة أخرى هي طريقة السمبلكس.[8]

طورت طريقة السمبلكس عام 1947 من طرف العالم Dantzig لحل مسألة البرمجة الخطية التي يتجاوز عدد المتغيرات فيها متغيران، و ذلك باتباع الخطوات التالية:

-إيجاد الحل الابتدائي.

-اختبار أمثلية الحل.

- حسين الحل لإيجاد الحل الأمثل.

### 3-1- في حالة التعظيم:

**مثال تطبيقي:**

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي التالي :باستخدام طريقة السمبلكس

$$Max\ Z = 70\,x_1 + 40\,x_2 + 60\,x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1000 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

**أولا: كتابة النموذج على الشكل المعياري:**

8-منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات :مدخل علمي لاتخاذ القرارات**، دار وائل، الطبعة الأولى، عمان، الأردن2009 ، ص 103.

$Max\ Z = 70\ x_1+40\ x_2+60\ x_3$ $Max\ Z = 70\ x_1+40\ x_2+60\ x_3+0S_1+0S_2+0S_3$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1=1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+S2=800 \\ x_1+3x_2+x_3+S_3=400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3+S_1+0S_2+0S_3=1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3+0S_1+S_2+0S_3=800 \\ x_1+3x_2+x_3+0S_1+0S_2+S_3=400 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

**ثانيا: تشكيل جدول السمبلكس الاول:**

**يمكن تشكيل جدول الحل الأساسي الأول**

| $C_j$ → | | 70 | 40 | 60 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | **$R_i$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓ $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 0 | ← $S_1$ | 4 | 2 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1000 | 1000/4 = 250 |
| 0 | $S_2$ | 2 | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 800 | 800/2 = 400 |
| 0 | $S_3$ | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 1 | 400 | 400/1 = 400 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | Z = 0 | |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 70 | 40 | 60 | 0 | 0 | 0 | | |

نلاحظ من خلال جدول الحل الأساسي الأول أن المتغيرات داخل الأساس هي المتغيرات التي تشكل مصفوفة الوحدة، أما المتغيرات خارج الأساس فهي المتغيرات الأصلية التي نبحث عن قيمها المثلى التي تحقق

أعظمية دالة الهدف.

في جدول الحل الأساسي الأول في حالة التعظيم نجد دائما تكون قيمة دالة الهدف **Z = 0** وقيم المتغيرات **x1=0**وx2**=0**، طبعا نقوم بتحسين قيمة دالة الهدف إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو الوصول إلى حالة

من الحالات الخاصة والتي سيتم التطرق إليها لاحقا.

**ثالثا :تحسين الحل إلى غاية الوصول إلى الحل الأمثل أو حالة من الحالات خاصة**

أولا وقبل تشكيل جدول الحل الأساسي الثاني يجب أن نختبر أمثلية الحل، ويتم اختبار أمثلية الحل في حالة التعظيم من خلال قيم السطر الأخير من جدول الحل الأساسي **Cj - Zj** ، فإذا كانت كلها قيم سالبة أو معدومة يكون الحل أمثل، أما إذا كان أحد أو بعض قيم **Cj – Z** موجب فإن الحل غير أمثل ويتطلب تحسين.

في مثالنا نجد أن قيم **Cj – Z** بعضها موجبة وبعضها الأخر معدوم لذا فالحل غير أمثل ويتطلب تحسين.

لاجراء التحسين نتبع الخطوات التالية:

**الخطوة الأولى** :تحديد أكبر قيمة موجبة في الصف السفلي من جدول السمبلكس( قيم**Cj – Zj** واطلق على العمود الذي تظهر فيه هذه القيمة بعمود الارتكاز، واذا وجد أكثر من رقم متساوي فاختر أحدهما[9].

في مثالنا أكبر قيمة من قيم الصف **Cj – Zj** هي 70 التالي يكون عمود الارتكاز هو العمود الذي يضم الرقم 70 كما هو مبين في آنفا في الجدول الأساسي الأول.

**الخطوة الثانية** :كون نسباً بقسمة كل رقم من العمود ***Bi*** على العدد الموجب في عمود الارتكاز والذي يقع في صفه، العنصر في عمود الارتكاز الذي يؤدي إلى أصغر نسبة يطلق عميه عنصر الارتكاز، إذا أدى أكثر من رقم إلى نفس النسبة فاختر أحدهما، وإذا لم يوجد في عمود الارتكاز أي رقم موجب يكون البرنامج ليس له حل.

في مثالنا أصغر نسبة هي 1000/4 وبالتالي يكون عنصر الارتكاز هو 250 كما هو موضح في الجدول الاساسي الاول.

**الخطوة الثالثة** :استخدم العمليات الأولية في تحويل عنصر الارتكاز إلى واحد، واختصار كل العناصر الأخرى

في عمود الارتكاز إلى الصفر وقسمة كل عناصر صف الارتكاز على عنصر الارتكاز .وفي مثالنا يتم تحويل عنصر الارتكاز 4 إلى 1 و تحويل كل عناصر عمود صف الارتكاز إلى الصفر، بمعنى تحويل 1 إلى0

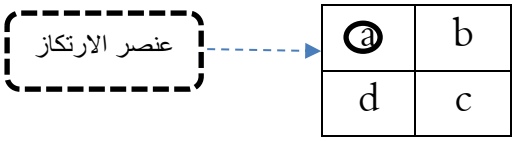
---

[9]- ريتشارد برونسون، **بحوث العمليات**، ساسلة ملخصات شوم، ترجمة حسن حسني الغبارى ومحمد ابراهيم يونس الدار الدولية، القاهرة، مصر، 2003، ص 58

وقسمة كل عناصر صف الارتكاز على عنصر الارتكاز.

بقية العناصر الأخرى تحسب على النحو التالي:

مثلا نريد حساب قيمةc في الجدول الاساسي الموالي:




نقوم بحساب قيمة c على النحو التالي:

$$\text{العنصر الجديد} = \frac{(a\times c)-(b\times d)}{a}$$

**الخطوة الرابعة** نستبدل المتغيرة التي ستخرج من الأساس (التي تقع في صف عنصر الارتكاز) بالمتغيرة التي ستدخل للأساس (التي تقع في عمود الارتكاز).

وفي مثالنا المتغيرة التي تخرج من الأساس هي المتغيرةS1 وتحل محلها المتغيرة X1

من خلال كل ما سبق يمكن تشكيل الجدول الأساسي الثاني على النحو التالي:

| $C_j$ → | | 70 | 40 | 60 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | ↓$x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | $R_i$ |
| 70 | $x_1$ | 1 | 1/2 | 1 | 1/4 | 0 | 0 | 250 | 500 |
| 0 | $S_2$ | 0 | 1 | -1 | -1/2 | 1 | 0 | 300 | 300 |
| 0 | ←$S_3$ | 0 | 5/2 | 0 | -1/4 | 0 | 1 | 150 | 60 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 70 | 35 | 70 | 70/4 | 0 | 0 | Z = 17500 | |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 0 | 5 | -10 | -70/4 | 0 | 0 | | |

-تتم قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول الثاني كما يلي:

**متغيرات الأساس**: $x_1=250,\ S_2=300,\ S_3=150$

**متغيرات خارج الأساس:** $x_2=0,\ x_3=0,\ S_1=0$

و عليه و بالاعتماد على الخطوات السابقة يتم الانتقال من أول حل أساس مقبول ذو $Z=0$ إلى حل أساس مقبول آخر ذو $Z=17500$، أي يتم تحسين الحل الأول.

–بعدها يتم تحديد قيمة $Z$ إن كانت مثلى، و ذلك إن كانت جميع معاملاتها سالبة أو معدومة، و في حالتنا هذه، قيمة $Z$ ليست مثلى لأن هناك قيمة موجبة (5)، و عليه يتم إنشاء جدول سمبلكس ثالث بغية تحسين الحل مرة أخرى، و ذلك بدءً بحساب قيم $R_i$ و تحديد المتغيرة الداخلة و الخارجة.

تمثل $x_2$ المتغيرة الداخلة في هذه الحالة لأنها توافق أكبر معامل لـ $Z$ و $S_3$ هي المتغيرة الخارجة لأنها توافق أدنى قيمة لـ $R_i$، و عليه فإن نقطة تقاطع سطر الارتكاز (المتغيرة الخارجة) و عمود الارتكاز (المتغيرة الداخلة) تمثل نقطة الارتكاز P=5/2

ويكون الجدول الأساسي الثالث على النحو التالي:

| $C_j$ ⟶ ↓ | | 70 | 40 | 60 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | **$R_i$** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **$x_1$** | **$x_2$** | **$x_3$** | **$S_1$** | **$S_2$** | **$S_3$** | | |
| 70 | **$x_1$** | 1 | 0 | 1 | 3/10 | 0 | -1/5 | 220 | |
| 0 | **$S_2$** | 0 | 0 | -1 | -2/5 | 1 | -2/5 | 240 | |
| 40 | **$x_2$** | 0 | 1 | 0 | -1/10 | 0 | 2/5 | 60 | |
| **$Z_j = \sum C_j x_j$** | | 70 | 40 | 70 | 17 | 0 | 2 | Z = 17800 | |
| **$Z = C_j - Z_j$** | | 0 | 0 | -10 | -17 | 0 | -2 | | |

من جدول السمبلكس الثالث نجد أن حل الأساس المقبول المحسن هو:

$$x_1=220,\quad x_2=60,\quad S_2=240,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_3=0 \Rightarrow Z = 17800$$

– بالنسبة لـ $Z$ نجد أنه لا يمكننا تحسين الحل مرة أخرى لأن النموذج تعظيم، و إذا أخذنا المتغيرة $x_3$ فإننا سوف نُخفض $Z$ بـ (10–) لكل وحدة من $x_3$، لذا نتوقف؛

–بما أن جميع معاملات متغيرات النموذج لـ $Z$ سالبة أو معدومة فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل (لأن اختيار أي وحدة أخرى سوف يؤدي إلى تخفيض قيمة دالة الهدف)؛

–إذا كانت معاملات متغيرات النموذج من نوع تعظيم $Max$ سالبة أو معدومة، فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل، أما في النموذج من نوع تدنية $Min$ فإننا نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كافة المعاملات موجبة أو معدومة.

إن الهدف من طريقة السمبلكس هو الوصول إلى الحل الأمثل كالطرق السابقة، إلا أن هذه الطريقة تنطلق من أول حل أساس مقبول و تمر على بعض حلول الأساس المقبولة إلى أن تصل إلى الحل الأمثل.

## 3–2–في حالة التدنية:

**مثال:** ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3$$

$$Soumise\ aux\ contraintes$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**الحل:**

**أولا: كتابة النموذج على الشكل المعياري:**

$$Min\ Z = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - S_1 = 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - S_2 = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

**ثانيا: إيجاد أول حل أساس مقبول:**

بما أن النموذج يحتوي على 5 متغيرات، و 2 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساي مقبول عن طريق عدم 3متغيرات (3=2-5)و لتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) $x_1=0$، $x_2=0$، $x_3=0$ و بعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: $S_1=(-80)$ ، $S_2=(-60)$، و الذي يعتبر حل أساس غير مقبول، لأن $S_1$ و$S_2$ لا تحققان قيود عدم سلبية المتغيرات، أي أن النموذج لا يتوفر على حل أساس مقبول، و عليه لا يمكن تطبيق طريقة السمبلكس لاشتراطها على توفر أول حل أساس مقبول.

و حتى يتسنى لنا توفير حل الأساس المقبول يتوجب علينا الاستعانة بمتغيرات جديدة تسمى المتغيرات المساعدة (الوهمية، الاصطناعية)، حيث تضاف متغيرة واحدة على مستوى كل قيد ليصبح النموذج كالتالي:

$$Min\ Z = 30x_1+24x_2+18x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 - S_1+\boldsymbol{t_1} = 80 \\ 3x_1+3x_2+3x_3 - S_2+\boldsymbol{t_2} = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

$$t_1, t_2 \geq 0$$

بعد إضافة المتغيرات الوهمية $t_1$ و $t_2$ يصبح النموذج مكونا من 7 متغيرات و 2 معادلات، و عليه يمكن إيجاد أول حل أساس مقبول و ذلك عن طريق عدم متغيرات 5 متغيرات (5=2-7) فيصبح حل الأساس المقبول الأول كالتالي:

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad x_3=0, \quad S_1=0, \quad S_2=0, \quad S_3=0$$

$$t_1=80 \quad t_2=60$$

نضيف متغيرات الفجوة والاصطناعية إلى دالة الهدف، بمعامل 0 لمتغيرات الفجوة و معامل $M$ التي تمثل كمية موجبة كبيرة إلى المتغيرات الاصطناعية، أما إذا كان النموذج من نوع $Max$ فيتم إضافة معامل $(-M)$ إلى المتغيرات الاصطناعية.[10] فتكون دالة الهدف كما يلي:

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+0\ S_1+0\ S_2+\mathbf{M}\ t_1+\mathbf{M}\ t_2$$
$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+0\ S_1+0\ S_2+\mathbf{M}\ (t_1+t_2)$$

بعدها يتم استخراج قيم المتغيرات الاصطناعية من القيود الوظيفية لتعويضها في دالة الهدف:

$$\mathbf{t_1} = 80 - 5x_1 - 2x_2 - x_3 + S_1$$

$$\mathbf{t_2} = 60 - 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + S_2$$

$$\mathbf{t_1 + t_2} = 140 - 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + S_1 + S_2$$

بتعويض قيم المتغيرات الوهمية في دالة الهدف نحصل على:

$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3+\mathbf{M}\ (140 - 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + S_1 + S_2)$$
$$Min\ Z = 30\ x_1+24\ x_2+18\ x_3 + 140\ M - 8x_1\ M - 5x_2\ M - 4x_3\ M + M\ S_1 + M\ S_2$$

وعليه يصبح النموذج في صيغته النهائية كالتالي:

$$Min\ Z = (30-8M)\ x_1+(24-5M)\ x_2+(18-4M)\ x_3 + M\ S_1 + M\ S_2+140\ M$$

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3 - S_1+t_1 = 80 \\ 3x_1+3x_2+3x_3 - S_2+t_2 = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

$$t_1, t_2 \geq 0$$

[10] محمد عبد العال النعيمي و آخرون، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011، ص 57.

### ثالثا: تشكيل جدول السمبلكس الأول:

| $C_j$ → | | 30 | 24 | 18 | 0 | 0 | M | M | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | ↓$x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $t_1$ | $t_2$ | | |
| M | $t_1$ | 5 | 2 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | 80 | 16 |
| M | ← $t_2$ | 3 | 3 | 3 | 0 | -1 | 0 | 1 | 60 | 20 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 8M | 5M | 4M | -M | -M | M | M | 140M | |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 30-8M | 24-5M | 18-4M | M | M | 0 | 0 | | |

بما أن النموذج عبارة عن تدنية $Min$ فإنه يتم في هذه الحالة اختيار المتغيرة الداخلة عن طريق اختيار أقل معامل سالب لـ $M$ في قيم $Z$ و في مثالنا هذا $(-8)$ هو أدنى معامل سالب و الذي يوافق المتغيرة $x_1$؛

- يتم بعدها قسمة قيم الشعاع $B$ على معاملات المتغيرة الداخلة، للحصول على $R_i$ وبناء على ذلك تصبح المتغيرة الخارجة هي التي توافق أقل حاصل قسمة موجب، لتكون في مثالنا هذا $t_1$ ثم تحديد عنصر الارتكاز.
- بما أن معاملات Z تضم قيما سالبة فإن 140M ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات موجبة أو معدومة باعتبار أن النموذج عبارة عن تدنية.

### رابعا: تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

| $C_j$ → | | 30 | 24 | 18 | 0 | 0 | M | M | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | ↓$x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $t_1$ | $t_2$ | | |
| 30 | $x_1$ | 1 | 2/5 | 1/5 | -1/5 | 0 | 1/5 | 0 | 16 | 80 |
| M | ← $t_2$ | 0 | 9/5 | 12/5 | 3/5 | -1 | -3/5 | 1 | 12 | 5 |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 30 | 12+9/5M | 6+12/5M | -6+3/5M | -M | 6-3/5M | M | 480+12M | |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 0 | 12-9/5M | 12-12/5M | 6-3/5M | M | -6+8/5M | 0 | | |

بما أن معاملات Z تضم قيما سالبة فإن 480+12M ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات موجبة أو معدومة و ذلك بتشكيل جدول سمبلكس ثالث.

**خامسا: تشكيل جدول السمبلكس الثالث:**

| $C_j$ ⟶ ↓ | | 30 | 24 | 18 | 0 | 0 | M | M | **B** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $t_1$ | $t_2$ | **rayon** | $R_i$ |
| 30 | $x_1$ | 1 | 1/4 | 0 | -1/4 | 1/12 | / | / | 15 | |
| 18 | $x_3$ | 0 | 3/4 | 1 | 1/4 | -5/12 | / | / | 5 | |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 30 | 21 | 18 | -3 | -5 | / | / | 450+90 = 540 | |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | / | / | | |

نلاحظ من خلال جدول السمبلكس الثالث أن قيم معاملات $Z$ كلها موجبة أو معدومة، وبالتالي فإن الحل الأخير المتوصل إليه هو الحل الأمثل ($Z$=540).

# سلسلة تمارين رقم 03

## التمرين الأول:

باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

$$\textbf{Min } Z = -6x_1 - 7x_2 - 8x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 200 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

$$\textbf{Max } Z = 7x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 80 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

$$\textbf{Max } Z = 40x_1 + 60x_2 - 20x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 220 \\ x_2 + x_3 \leq 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

## حل التمرين الاول:

### اولا:

$$\textbf{Max } Z = 40x_1 + 60x_2 - 20x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 220 \\ x_2 + x_3 \leq 100 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

**الحل الأمثل هو:** $x_1=40,\quad x_2=30,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=70$

### ثانيا.

$$\textbf{Max } Z = 7x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 100 \end{cases}$$

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \le 80$$

$$x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \le 40$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

**الحل الأمثل هو: الحل الأمثل هو:** $x_1=22,\quad x_2=6,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_2=24,\quad S_3=0$

**ثالثا:**

$$\textbf{Min } Z = -6\,x_1 - 7\,x_2 - 8\,x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 \le 100 \\ 3\,x_1 + 4\,x_2 + 2\,x_3 \le 120 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 \le 200 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

**الحل الأمثل هو:** $\mathbf{x}_1=10,\quad x_2=0,\quad x_3=45,\quad S_1=45,\quad S_2=0,\quad S_3=0$

**التمرين الثاني:**

باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

$Min\ Z=100\,x_1+120\,x_2+200\,x_3$
*Soumise aux contraintes*
$$\begin{cases} x_1 + 3\,x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3 \ge 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4\,x_3 \ge 8 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$Min\ Z= 100\,x_1+80\,x_2+40\,x_3$
*Soumise aux contraintes*
$$\begin{cases} 4\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \ge 7 \\ 2\,x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 \ge 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2\,x_3 \ge 6 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$Min\ Z= 80\,x_1+120\,x_2+84\,x_3$
*Soumise aux contraintes*
$$\begin{cases} 5x_1 + 15\,x_2 + 7\,x_3 \ge 20 \\ 10\,x_1 + 12\,x_2 + 21\,x_3 \ge 15 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 \ge 18 \\ x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

**حل التمرين الثاني:**

$Min\ Z=100\ x_1+120\ x_2+200\ x_3$

*Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} x_1 + 3\ x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4\ x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$Min\ Z=100\ x_1+120\ x_2+200\ x_3+M\ t_1+M\ t_2+M\ t_3$

*Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} x_1 + 3\ x_2 + 2x_3 - S_1 + t_1 = 6 \\ 2\ x_1 + 4\ x_2 + 6\ x_3 - S_2 + t_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4\ x_3 - S_3 + t_3 = 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0 \geq 0,\quad t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0,\ t_3 \geq 0 \end{cases}$$

| $C_j \rightarrow$ | | 100 | 120 | 200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | **B** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | ↓$x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | **rayon** | $R_i$ |
| M | $t_1$ | 1 | 3 | 2 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 06 | 02 |
| M | $t_2$ | 2 | 4 | 6 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 07 | 7/4 |
| M | ← $t_3$ | 1 | 2 | 4 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 08 | 04 |
| $Z_j$ | | 4M | 9M | 12M | - M | - M | - M | M | M | M | **Z = 21 M** | |
| $C_j - Z_j$ | | 100-4M | 120-9M | 200-12M | M | M | M | 0 | 0 | 0 | | |

| $C_j \rightarrow$ | | 100 | 120 | 200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | **B** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | ↓$S_2$ | $S_3$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | **rayon** | $R_i$ |
| M | $t_1$ | -1/2 | 0 | -5/2 | -1 | 3/4 | 0 | 1 | / | 0 | 3/4 | 01 |
| 120 | ← $x_2$ | 1/2 | 1 | 3/2 | 0 | -1/4 | 0 | 0 | / | 0 | 7/4 | / |
| M | $t_3$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1/2 | -1 | 0 | / | 1 | 9/2 | 08 |
| $Z_j$ | | 60-1/2M | 120 | 180-3/2M | - M | - 30+5/2M | - M | M | / | M | **210+21/4 M** | |
| $C_j - Z_j$ | | 100-4M | 0 | 20+3/2M | M | 30-5/2M | M | 0 | / | 0 | | |

| $C_j \rightarrow$ | | 100 | 120 | 200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | **B** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | ↓$x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | **rayon** | $R_i$ |
| 0 | $S_2$ | -2/3 | 0 | -10/3 | -4/3 | 1 | 0 | / | / | 0 | 01 | / |
| 120 | $x_2$ | 1/3 | 1 | 2/3 | -1/3 | 0 | 0 | / | / | 0 | 02 | 03 |
| M | ← $t_3$ | 1/3 | 0 | 8/3 | 2/3 | 0 | -1 | / | / | 1 | 04 | 3/2 |
| $Z_j$ | | 40+1/3M | 120 | 80+8/3M | - 40+2/3M | 0 | - M | / | / | M | **Z = 240+4 M** | |
| $C_j - Z_j$ | | 60-1/3M | 0 | 120-8/2M | 40-2/3M | 0 | M | / | / | 0 | | |

| $C_j$ ⟶ | | 100 | 120 | 200 | 0 | 0 | 0 | M | M | M | **B** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $t_1$ | $t_2$ | $t_3$ | ***rayon*** | $R_i$ |
| 0 | $S_2$ | -1/4 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -5/4 | / | / | / | 06 | |
| 120 | $x_2$ | 1/4 | 1 | 0 | -1/2 | 0 | 1/4 | / | / | / | 01 | |
| 200 | $x_3$ | 1/8 | 0 | 1 | 1/4 | 0 | -3/8 | / | / | / | 3/2 | |
| $Z_j$ | | 145 | 120 | 200 | - 10 | 0 | - 45 | / | / | / | **Z = 420** | |
| $C_j - Z_j$ | | - 45 | 0 | 0 | 10 | 0 | 45 | / | / | / | | |

**الحل الأمثل هو:** $x_1=0,\quad x_2=01,\quad x_3=3/2,\quad S_1=0,\quad S_2=06,\quad S_3=0$

# المحور الرابع: النموذج الثنائي وتحليل الحساسية

## 4- البرنامج المرافق:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية نموذج الثنائية والتي تعرف بتحويل نموذج البرمجة الخطية الأولي إلى نموذج الثنائية، و يختص هذا الأخير بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات و إتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته و حله، و تستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية.[11]

### 4-1- تحويل البرنامج الأصلي الى البرنامج الثنائي:

يمكن تلخيص خطوات تحويل النموذج الأصلي إلى نموذج ثنائي بالشكل التالي:[12]

- إذا كانت دالة الهدف في البرنامج الأصلي في صيغة تعظيم **Max: Z** فإنها تقلب إلى صيغة التدنية **Min: W** في النموذج الثنائي، والعكس صحيح.
- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي تمثل قيم الطرف الأيمن للقيود في البرنامج الثنائي، لذا فعدد المتغيرات في البرنامج الأصلي يكون مساويا لعدد القيود في البرنامج الثنائي.
- قيم الطرف الأيمن للقيود في البرنامج الأصلي تمثل معاملات دالة الهدف، وعميه يكون عدد القيود في البرنامج الأصلي مساوياً لعدد المتغيرات في البرنامج الثنائي.
- إذا كانت متغيرات البرنامج الأصلي هي **X1 :، X2 ، X3 ،...، Xn** ، فإن متغييرات البرنامج الثنائي هي **Y1، Y2، Y3 ،...، Ym .**
- إشارة المتغيرات في البرنامج الأصلي تحدد إشارة القيود في البرنامج الثنائي.
- إشارة القيود في البرنامج الأصلي تحدد إشارة القيود في البرنامج الثنائي.

---

[11] أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، الطبعة الثانية، 2014، ص 159.

[12] منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات–مدخل علمي لاتخاذ القرارات–**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009، ص 152.

و عليه تكون الصيغ القانونية للنموذجين الأولي و الثنائي كما يلي: [13]

$$\begin{cases} Max\ Z = C'x \\ s/c \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Min\ W = b'y \\ s/c \begin{cases} A'y \ge C \\ y \ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

| المسألة الاصلية | المسألة الثنائية |
|---|---|
| دالة الهدفMax | دالة الهدفMIN |
| دالة الهدف MIN | دالة الهدفMax |
| الطرف الأيمن للقيود $B_i$ | معاملات دالة الهدف |
| معاملات دالة الهدف | الطرف الأيمن للقيود $B_i$ |
| مصفوفة المعاملات في القيود | منقول مصفوفة المعاملات في القيود |
| عدد القيود | عدد المتغيرات |
| قيد(=) | متغير كيفي |
| قيد(≥) | متغيرة (≤) |
| قيد (≤) | متغيرة (≥) |
| عدد المتغيرات | عدد القيود |
| متغيرة كيفي | قيد (=) |
| متغيرة (≤) | قيد(≥) |
| متغيرة (≥) | قيد (≤) |

و للتوضيح أكثر سوف نأخذ المثال التالي:

**مثال 04-01**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 100\ x_1 + 200\ x_2 + 300\ x_3$$

[13] محمد راتول، **مرجع سبق ذكره**، ص 81.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3 \leq 1000 \\ 5x_1+5x_2+7x_3 \leq 1500 \\ 8x_1+9x_2+4x_3 \leq 2000 \\ 5x_1+2x_2+x_3 \leq 2500 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن النموذج يحتوي على 3 متغيرات و التي تمثل 3 أنواع من المنتجات، تعتمد المؤسسة في إنتاج هذه المنتجات على 4 موارد متاحة، حيث أنها تسعى من خلال هذه العملية إلى تعظيم الأرباح المترتبة عن بيع هذه المنتجات، في المقابل سيسعى مشتري هذه المنتجات إلى تدنية تكاليف شرائها مع تحفيز صاحب المؤسسة على البيع، فتصبح دالة الهدف الخاصة بهذا المشتري من نوع تدنية:

$$Min\ W = 1000y_1+1500y_2+2000y_3+2500y_4$$

حيث تمثل $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ أسعار المواد الأولية.

في الوقت نفسه ستقوم المؤسسة ببيع المنتجات في حال ما إذا كان العائد المحقق من بيعها أكبر من العائد على الإنتاج، فتصاغ هذه العملية كما يلي:

$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \geq 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \geq 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \geq 300 \end{cases}$$

و عليه فإن النموذج المرافق للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$Min\ W = 1000y_1+1500y_2+2000y_3+2500y_4$$

$$\begin{cases} 2y_1+5y_2+8y_3+5y_4 \geq 100 \\ y_1+5y_2+9y_3+2y_4 \geq 200 \\ 4y_1+7y_2+4y_3+4y_4 \geq 300 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

**مثال 04-02**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \leq 100 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 150 \end{cases}$$

$$3x_1 + 9x_2 \leq 220$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**الحل:**

النموذج المرافق للنموذج الأولي أعلاه يكون من الشكل:

$$Min\ W = 100\ y_1 + 150\ y_2 + 220\ y_3$$

$$\begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 5 \\ 6y_1 + 4y_2 + 9y_3 \leq 6 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

**ملاحظات:**

ظهور القيد رقم $i$ بإشارة أكبر أو تساوي $\geq$ في نموذج التعظيم الأولي $(Max)$ يؤثر على المتغيرة رقم $i$ فتكون أقل أو تساوي الصفر في نموذج التدنية الثنائي$(y_i \leq 0)$، في هذه الحالة تقوم بتحويل إشارة المتراجحة من الشكل اقل او تساوي بضرب طرفيها في القيمة $(-1)$ .

ظهور القيد رقم $i$ بإشارة تساوي $(=)$ في نموذج التعظيم الأولي $(Max)$ يؤثر على المتغيرة رقم $i$ فتكون غير محددة الإشارة في نموذج التدنية الثنائي $(y_i \in R)$.يمكن تحويل في هذه الحالة القيد الى متراجحتين احداهما اقل او تساوي والأخرى اكبر او تساوي.

ظهور المتغيرة رقم $j$ غير محددة الإشارة $(y_i \in R)$ في نموذج التعظيم الأولي $(Max)$، يؤثر على القيد رقم $j$ فيظهر بالإشارة $(=)$ في نموذج التدنية الثنائي. يمكن معالجة ذلك المتغير بفرق متغيرين $(X_j = X_j' - X_j'')$

ظهور المتغيرة رقم $j$ بإشارة أقل أو تساوي الصفر $(x_j \leq 0)$ في نموذج التعظيم الأولي $(Max)$، يؤثر على القيد رقم $j$ فيظهر بالإشارة أقل أو تساوي $(\leq)$ في نموذج التدنية الثنائي

## 4-2-استخراج حل البرنامج الخطي الأصلي من جدول السمبلكس الأخير للبرنامج الثنائي:

مثال 04-03

ليكن نموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$Max\ Z = 40\,x_1 + 60\,x_2 - 20\,x_3$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 220 \end{cases}$$

$$x_1 + x_3 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

وجدول الحل الأمثل للنموذج أعلاه هو التالي:

| $C_j$ → | | 40 | 60 | -20 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 60 | $x_2$ | 0 | 1 | -1/6 | 2/9 | -1/6 | 0 | 30 | |
| 40 | $x_1$ | 1 | 0 | 1/3 | -1/9 | 1/3 | 0 | 40 | |
| 00 | $S_2$ | 0 | 0 | 7/6 | -2/9 | 1/6 | 1 | 70 | |
| $Z_j$ | | 40 | 60 | 10/3 | 80/9 | 10/3 | 0 | Z=3400 | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | - 50/3 | - 80/9 | - 10/3 | 0 | | |

**المصدر: من إعداد الباحثة بناء على معطيات المثال**

الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأولي أعلاه هو التالي:

**أ- متغيرات القرار:** بما أن النموذج الأولي على شكله النموذجي فإن: $y_i$ هي $Z_j$ لمتغيرة الفجوة $S_i$، و عليه:

$$y_1 = 80/9, \quad y_2 = 10/3, \quad y_3 = 0$$

**ب- متغيرات الفجوة:** بما أن النموذج من الشكل $(Max)$ فإن: $k_i = -(C_j - Z_j)$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 50/3$$

## 5- تحليل الحساسية:

ان الحصول على الحل الأمثل ليس هو اخر مرحلة من مراحل البرنامج الخطي حيث هناك مرحلة ما بعد الحصول على الحل الأمثل وهي مرحلة دراسة مدى إمكانية تغير هذا الحل الأمثل المتحصل عليه حيث ان القواعد والاسس التي تم بناء النموذج الخطي على أساسها يمكنها ان تتغير وهذا ما يمكنه ان يؤثر على امثلية الحل حيث ان أي تغيير يمكن ان يحدث في أي عنصر من عناصر البرامج الخطي يتطلب منا إعادة حل النموذج لمعرفة هل حافظ الحل الأول على أمثليه الا ان يتطلب جهدا ووقتا خاصة في حالة وجود العديد من المتغيرات والقيود وكذلك في حالة تكرار حدوث التغيرات في عناصر النموذج، غير انه يمكننا معرفة هذا الامر دون اللجوء الى إعادة الحل وهذا في حالة ما اذا قمنا بإجراء تحليل لحساسية الحل الأمثل ومنه يمكننا تعريف الحساسية كما يلي:

يقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى تأثر الحل الأمثل بالتغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها. و هذه التغيرات يمكن أن تكون:[14]

- على معاملات متغيرات دالة الهدف$(C_j)$؛
- على قيم الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) $(b_j)$؛
- على استخدامات الموارد$(a_{ij})$.

### 5-1- التغير في معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف "مدى الامثلية":

يهدف مدى الامثلية الى تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف والتي ضمن حدودها يبقى الحل امثل ولتحديد مدى الامثلية نتبع الخطوات التالية:

أ- من جدول السمبلكس للحل النهائي الأمثل تقوم باستبدال معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الامثلية بمعامل مجهول القيمة ونرمز له بالرمز $C_i$ حيث $(i=1,2,3.....n)$.

ب- نعيد حساب صف$Z_j$ وصف $C_j - Z_j$.

[14] سالم إلياس،مطبوعة بعنوان: **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة**، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، 2016-2017، ص 22.

ت- من صف $C_j - Z_j$ نقوم باختبار امثلية الحل حيث يجب ان تكون جميع قيم $C_j - Z_j$ اقل من او تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل (MAX) او ان تكون جميع قيم $C_j - Z_j$ اكبر من او تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من الشكل (MIN).

ث- يتم حل المتراجحات التي تكونت في الخطوة السابقة ومن نتيجة هذا الحل نحدد حدود المعامل $C_j$

بغرض التعرف اكثر سوف ناخذ المثال التالي:

**مثال 05-01**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 100\,x_1 + 60\,x_2 + 80\,x_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 1200 \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 1000 \end{cases}$$

$$4x_1 + 12x_2 + 8x_3 \leq 3800$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

و الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أعلاه يقدمه الجدول التالي:

| $C_j$ ⟶ | | 100 | 60 | 80 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 100 | $x_1$ | 1 | 0 | 1/2 | 1/3 | -1/4 | 0 | 150 | |
| 60 | $x_2$ | 0 | 1 | 1 | -1/3 | 1/2 | 0 | 100 | |
| 00 | $S_3$ | 0 | 0 | -6 | 8/3 | -5 | 1 | 2000 | |
| $Z_j$ | | 100 | 60 | 110 | 40/3 | 5 | 0 | Z=21000 | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | -30 | -40/3 | -5 | 0 | | |

بافتراض أن معامل متغيرة الأساس $x_1$ قد تغير بمقدار (موجب أو سالب) يساوي $\Delta C_1$ فيصبح $C'_1$ حيث أن: $C'_1 = C_1 + \Delta C_1$ أي: $C'_1 = 100 + \Delta C_1$، و بتعويض القيمة الجديدة في جدول الحل الأمثل نحصل على:

| $C_j \longrightarrow$ | | $100+\Delta C_1$ | 60 | 80 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\downarrow$ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| $100+\Delta C_1$ | $x_1$ | 1 | 0 | 1/2 | 1/3 | –1/4 | 0 | 150 | |
| 60 | $x_2$ | 0 | 1 | 1 | –1/3 | 1/2 | 0 | 100 | |
| 00 | $S_3$ | 0 | 0 | –6 | 8/3 | –5 | 1 | 2000 | |
| $Z_j$ | | $100+\Delta C_1$ | 60 | $100+1/2\Delta C_1$ | $40/3+1/3\Delta C_1$ | $5-1/4\Delta C_1$ | 0 | Z=21000 | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | $-30-1/2\Delta C_1$ | $-40/3-1/3\Delta C_1$ | $-5+1/4\Delta C_1$ | 0 | | |

يبقى الجدول أعلاه جدول الحل الأمثل إذا تحقق شرط الأمثلية $C_j - Z_j \leq 0$ للمتغيرات خارج الأساس، أي:

$$-30-1/2\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \quad \Delta C_1 \geq -60$$

$$-40/3-1/3\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \quad \Delta C_1 \geq -40$$

$$-5+1/4\Delta C_1 \leq 0 \Rightarrow \quad \Delta C_1 \leq 20$$

مما سبق نستنتج أن: $(-40 \leq \Delta C_1 \leq 20)$ أي أن الحل يبقى أمثلا ما دامت قيمة تغير معامل متغيرة الأساس $x_1$ أقل أو تساوي 20، و أكبر أو تساوي (40–).

لدينا: $-40 \leq \Delta C_1 \leq 20$

بإضافة القيمة 100 للطرفين نحصل على:

$$100 - 40 \leq 100+\Delta C_1 \leq 20+100$$

$$60 \leq 100+\Delta C_1 \leq 120$$

نعلم أن: $C'_1 = 100 + \Delta C_1$ ، و عليه تكون: $\mathbf{60 \leq C'_1 \leq 120}$

أي أن الحل المتوصل إليه يبقى أمثلا ما دام معامل المتغيرة $x_1$ أقل أو يساوي 120، و أكبر أو يساوي 60، أما إذا تعدى هاتين القيمين فإنه لا يصبح حلا أمثلا.

**ملاحظة: في حالة كون متغير خارج الأساس في الحل الأمثل (غير داخل في الحل) يتم تحديد مدى الامثلية لمعاملة في دالة الهدف بالقاعدة التالية:**

**القيمة المقابلة له في الصف** $(Z_i) \geq C_j \leq$ غير محدود

## سلسلة تمارين رقم 04

**التمرين الأول**: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$Max\ Z = 20\ x_1 + 15\ x_2 + 18\ x_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \le 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \le 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \le 84 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

**الحل الأمثل**: $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=20$

$$Min\ W = 30\ y_1 + 24\ y_2 + 18 y_3$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 80 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \ge 84 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$

**الحل الأمثل**: $y_1=13,\ y_2=0,\ y_3=15$

$$Max\ Z = 10\ x_1 + 15\ x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 60 \end{cases}$$

$$0x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

**الحل الأمثل**: $x_1=8,\ x_2=6$

$$Min\ W = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3 + 4200y_4$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \ge 66 \\ 4y_1 + 3y_2 + 2\ y_3 \ge 84 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0$$

**الحل الأمثل**: $y_1=18,\ y_2=0,\ y_3=6,\ y_4=0$

**المطلوب**:

**1-** أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأصلية، و العكس؛

**التمرين الثاني**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 30 \\ 2\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 48 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 32 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

**المطلوب**:

**1–** تطبيق طريقة السمبلكس يسمح لنا بالحصول على الجدول التالي:

| $C_j$ ⟶ | | 05 | 03 | 06 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| 05 | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 3/2 | -5/2 | 07 | |
| 06 | $x_3$ | 0 | 0 | 1 | -1/2 | -1/2 | 3/2 | 09 | |
| 03 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 1/2 | 07 | |
| $Z_j$ | | 5 | 3 | 6 | 1 | 3 | -2 | Z = 110 | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | 0 | -1 | -3 | 2 | | |

هل جدول السمبلكس أعلاه يمثل الحل الأمثل؟ اشرح.

**2–** أوجد جدول الحل الأمثل؛

**3–** شكّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي أعلاه؛

**4–** انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي

**التمرين الثالث**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 600\,x_1 + 800\,x_2 + 500\,x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 \leq 500 \\ 2x_1+2x_2+x_3 \leq 400 \\ x_1+3x_2+2x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

أثناء عملية تطبيق طريقة السمبلكس تم التوصل إلى الجدول أدناه:

| $C_j \rightarrow$ / $\downarrow$ | | 600 | 800 | 500 | 00 | 00 | 00 | $\rightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $B$ |
| 600 | $x_1$ | 1 | 0 | 4/5 | 3/10 | 0 | -1/5 | 110 |
| 00 | $S_2$ | 0 | 0 | -7/5 | -2/5 | 1 | -2/5 | 120 |
| 800 | $x_2$ | 0 | 1 | 2/5 | -1/10 | 0 | 2/5 | 30 |
| $Z_j$ | | 600 | 800 | 800 | 100 | 0 | 200 | $Z =$ 90000 |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 00 | 00 | -300 | -100 | 0 | -200 | |

**المطلوب:1–** هل الحل المتوصل إليه هو حل أمثل؟ و لماذا؟ قدم الحل الأمثل للنموذج أعلاه؛

**2–** بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار $\Delta C_2$ ، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا. و في حال انخفاض هذا الربح بمقدار $(-420)$ هل يبقى الحل أمثلا؟

**حل التمرين الأول:**

**1– إيجاد النموذج الثنائي للنموذج الأولي:**

$$Max\ Z = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3 \quad \Rightarrow \quad Min\ W = 80y_1 + 120y_2 + 84y_3$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \le 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \le 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \le 84 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5y_1 + 15y_2 + 7y_3 \ge 20 \\ 10y_1 + 12y_2 + 21y_3 \ge 15 \\ 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 \ge 18 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$Max\ Z = 10x_1 + 15x_2 \quad \Rightarrow \quad Min\ W = 40y_1 + 60y_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 2x_2 \le 60 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \\ Min\ W = 30y_1 + 24y_2 + 18y_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2y_1 + 6y_2 \ge 10 \\ 4y_1 + 2y_2 \ge 15 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0 \\ Max\ Z = 80x_1 + 84x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 80 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \ge 84 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$Max\ Z = 66x_1 + 84x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 4200 \\ x_1 + 3x_2 \le 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 2600 \\ x_1 \le 4200 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Min\ W = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3 + 4200y_4$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \ge 66 \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 84 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0 \end{cases}$$

**حل التمرين الثاني:**

**1- لا**، جدول السمبلكس أعلاه **لا** يمثل الحل الأمثل، لأن قيم $(C_j - Z_j)$ لا تحقق شرط الأمثلية.

**1- إيجاد جدول الحل الأمثل:**

| $C_j$ → | | 05 | 03 | 06 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | ⬇ $S_3$ | | $R_i$ |
| 05 | $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 1/2 | 3/2 | -5/2 | 07 | / |
| 06 | ⬅ $x_3$ | 0 | 0 | 1 | -1/2 | -1/2 | 3/2 | 09 | 06 |
| 03 | $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/2 | -1/2 | 1/2 | 07 | 14 |
| $Z_j$ | | 5 | 3 | 6 | 1 | 3 | -2 | Z = 110 | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | 0 | -1 | -3 | 2 | | |

| $C_j$ → | | 05 | 03 | 06 | 0 | 0 | 0 | **B rayon** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | $R_i$ |
| 05 | $x_1$ | 1 | 0 | 5/3 | -1/3 | 2/3 | 0 | 22 | |
| 00 | $S_3$ | 0 | 0 | 2/3 | -1/3 | -1/3 | 1 | 06 | |
| 03 | $x_2$ | 0 | 1 | -1/3 | 2/3 | -1/3 | 0 | 04 | |
| $Z_j$ | | 5 | 3 | 22/3 | 1/3 | 7/3 | 0 | Z = 122 | |
| $C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | -4/3 | -1/3 | -7/3 | 0 | | |

**الحل الأمثل للنموذج الأولي هو:** $x_1=22,\quad x_2=04,\quad S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=06$

**2- تشكيل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي:**

$$Min\ W=30\ y_1+48\ y_2+32\ y_3$$

*Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

**3- قراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي انطلاقا من جدول السمبلكس:**

$$y_i = -Z_j \Rightarrow y_1 = -1/3,\quad y_2 = -7/3,\quad y_3 = 0$$

$$k_i = -(C_j - Z_j) \Rightarrow x_1 = 0,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 4/3$$

**حل التمرين الثالث:**

**1- نعم** الحل المتوصل إليه هو **حل أمثل**، حيث:

$$x_1 = 110,\ x_2 = 30,\ x_3 = 0$$

$$S_1 = 0,\ S_2 = 120,\ S_3 = 0$$

**2- بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار $\Delta C_2$ :**

| $C_j \rightarrow$ / $\downarrow$ | | 600 | 800+$\Delta C_2$ | 500 | 00 | 000 | 00 | $\rightarrow$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $B$ |
| 600 | $x_1$ | 01 | 00 | 4/5 | 3/10 | 000 | -1/5 | 110 |
| 00 | $S_2$ | 00 | 00 | -7/5 | -2/5 | 001 | -2/5 | 120 |
| 800+$\Delta C_2$ | $x_2$ | 00 | 01 | 2/5 | -1/10 | 000 | 2/5 | 30 |
| $Z_j$ | | 600 | 800+$\Delta C_2$ | 800+2/5 $\Delta C_2$ | 100-1/10$\Delta C_2$ | 000 | 200+2/5 $\Delta C_2$ | $Z$ = 90000 |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 00 | 00 | -300-2/5$\Delta C_2$ | -100+1/10 $\Delta C_2$ | 000 | -200-2/5$\Delta C_2$ | |

**تحديد مجال تغير $\Delta C_2$ لكي يبقى الحل أمثلا:**

لكي يبقى الحل أمثلا يجب تحقق معيار الأمثلية لنموذج التعظيم: $C_j - Z_j \leq 0$ و عليه:

$-300-2/5\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow -2/5\Delta C_2 \leq 300 \Rightarrow 2/5\Delta C_2 \geq -300 \Rightarrow \Delta C_2 \geq -750$

$-100+1/10\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow 1/10\Delta C_2 \leq 100 \Rightarrow \Delta C_2 \leq 1000$

$-200-2/5\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow -2/5\Delta C_2 \leq 200 \Rightarrow 2/5\Delta C_2 \geq -200 \Rightarrow \Delta C_2 \geq -500$

إذن: $\mathbf{-500 \leq \Delta C_2 \leq 1000}$

**في حال انخفاض هذا الربح بمقدار (– 420) نعم يبقى الحل أمثلا (تنخفض قيمته):**

| $C_j$ ↓ / → | | 600 | 380 | 500 | 00 | 00 | 00 | → |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $B$ |
| 600 | $x_1$ | 01 | 00 | 4/5 | 3/10 | 00 | -1/5 | 110 |
| 00 | $S_2$ | 00 | 00 | -7/5 | -2/5 | 01 | -2/5 | 120 |
| 380 | $x_2$ | 00 | 01 | 2/5 | -1/10 | 00 | 2/5 | 30 |
| $Z_j$ | | **600** | **380** | **632** | **142** | **00** | **32** | **Z = 77400** |
| $Z = C_j - Z_j$ | | **00** | **00** | **-132** | **-142** | **00** | **-32** | |

# الفصل الثاني: مشاكل النقل

**المحور الأول: مفهوم مسائل النقل**

**المحور الثاني: شروط استخدام مسائل النقل**

**المحور الثالث: صياغة البرنامج الخطي لمسالة النقل**

**المحور الرابع: طرق حل مسائل النقل**

## المحور الأول: مفهوم مسائل النقل

أدى ازدياد حجم الشركات وانتشار فروعها محليا ودوليا في مناطق عديدة إلى تحمل تكاليف باهظة لنقل المنتجات من مواقع إنتاجيا إلى مواقع تخزينها أو استهلاكها، لكن المبادئ الاقتصادية تقتضي ضرورة ترشيد نفقات النقل وتخفيضيا إلى أدنى حد ممكن خصوصا في ظل المنافسة الشرسة بين الشركات، الأمر الذي عجل بظهور مشاكل النقل، وقد ظهر نموذج النقل كأداة كمية تهتم بتحديد الحجم الأمثل من الوحدات التي يتم نقلها من المصانع إلى المستودعات أو المخازن وبالشكل الذي يجعل تكلفة النقل في حدودها الدنيا[15].

تعود الجذور التاريخية لمشاكل النقل إلى عام 1941 حيث قدم F.L.Hitchcock حيث قدم دراسة بعنوان توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محمية، وقام كذلكT.C.Kopmans في عام 1947بنشر دراسة تحت عنوان الاستثمار الأمثل لنظام النقل[16].

### 1- مفهوم مسالة النقل:

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت.[17] فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليها شرط تساوي العرض مع الطلب.[18]

---

[15]- جلال إبراهيم العبد ، **إستخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية** ، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2004 ، ص181

[16]- أحمد محمد الهزاع الصمادي، **أساسيات بحوث العمليات**، دار قنديل، عمان، الأردن، 2008 ، ص131.

[17] حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مدخل إلى بحوث العمليات**، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007، ص 281.

[18] يحياوي إلهام، **محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير،جامعة الحاج لخضر، باتنة، دون سنة النشر، ص 29.

## 2- شروط استخدام مسائل النقل:

ان استخدام مسائل النقل وحل أي مسالة على انها مسالة نقل يتطلب توفر مجموعة من الشروط والتي قد يمكن علاج بعضها في حالة عدم توفره مع وجود بعض الشروط لا بد ان تكون متوفرة ولا لايمكن استخدام مسائل النقل وتتمثل هذه الشروط في مايلي:

1- ان تكون سعة المنابع معلومة ويعني ذلك ان يكون لدينا علم بالكميات المتوفرة في كل منبع يمكن نقل السلع منه.

2- ان تكون سعة المصبات معلومة وذلك يعني ان تتوفر لدينا معلومات حول الكميات المطلوبة من طرف كل مصب يمكن نقل السلعة له.

3- ان تكون تكلفة نقل كل وحدة من السلع من المنابع الى المصبات معلومة.

4- ان تكون كمية السلع المعروضة في المنابع تساوي الكمية المطلوبة في المصبات.

## 3- صياغة البرنامج الخطي لمسالة النقل

تُعرض مشاكل النقل في حالة التعظيم وحالة التدنية، لكن هذه الأخيرة أكثر شيوعاً لذا سنبدأ بعرضيا أولا، على أن يتم عرض الحالة الثانية لاحقا.

تتضمن مشكلة النقل عدد من المصادر m لكل منها عدد متاح من الوحدات لمنتج متجانس $ai$ حيث $i = (1,2,\ldots\ldots,m)$

والاعداد $bj$ و$ai$ أعداد صحيحة موجبة وتعطى التكلفة $cij$ اللازمة لنقل وحدة واحدة من المصدر i الى مكان الوصول jعلى ان يكون الهدف هو انشاء جدول انتقال اعداد صحيحة موجبة $xij$ ليواجه كل المتطلبات من المخزون الحالي بتكلفة انتقال كلية اقل ما يمكن، مع افتراض ان العرض الكلي والطلب الكلي متساويان، ويمكن تلخيص مشاكل النقل في جدول على النحو التالي:

| | المصب1 | المصب 2 | ..... | المصب n | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| المصدر 1 | $C_{11}$ $X_{11}$ | $C_{12}$ $X_{12}$ | ..... | $C_{1n}$ $X_{1n}$ | $a_1$ |
| المصدر 2 | $C_{21}$ $X_{21}$ | $C_{22}$ $X_{22}$ | ..... | $C_{2n}$ $X_{2n}$ | $a_2$ |
| ..... | ..... | ..... | ..... | ..... | ..... |
| المصدر m | $C_{m1}$ $X_{m1}$ | $C_{m2}$ $X_{m2}$ | ..... | $C_{mn}$ $X_{mn}$ | $a_m$ |
| الطلب | $b_1$ | $b_2$ | ..... | $b_n$ | |

ويمكن كتابة مشاكل النقل في صيغة برمجة خطية كما يلي:

### 3-1- دالة الهدف:

دالة الهدف هي عبارة عن تدنية التكاليف المترتبة عن عملية النقل، وبالتالي يمكن كتابتها من الشكل التالي:

$$Z\ MIN = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \cdots C_{1n}X_{1n} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + \cdots \ldots\ldots\ldots + C_{2n}X_{2n} + \cdots \ldots\ldots\ldots + C_{m1}X_{m1} + C_{m2}X_{m2} + \cdots \ldots\ldots\ldots + C_{mm}X_{mm}$$

ويمكن كتابتها اختصارا من الشكل التالي:

$$Z\ MIN = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

### 3-2- القيود:

يوجد في مشاكل النقل قيود العرض وقيود الطلب

✓ **قيود العرض:**

$$X_{11} + X_{12} + \cdots \ldots \ldots + X_{1n} = a_1$$
$$X_{21} + X_{22} + \cdots \ldots \ldots + X_{2n} = a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{m1} + X_{m2} + \cdots \ldots \ldots + X_{mn} = a_m$$

ويمكن كتابتها مختصرة على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$$

✓ **قيود الطلب:**

$$X_{11} + X_{21} + \cdots \ldots \ldots + X_{m1} = b_1$$
$$X_{12} + X_{22} + \cdots \ldots \ldots + X_{m2} = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X_{1n} + X_{2n} + \cdots \ldots \ldots + X_{mn} = b_m$$

ويمكن كتابتها مختصرة على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$$

**3-3- قيود عدم سلبية المتغيرات:** $x_{ij} \geq 0$

**مثال 01**: لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية $O_1$، $O_2$، $O_3$ متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع $D_1$، $D_2$، $D_3$، $D_4$، $D_5$، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع) كميات معينة من الإنتاج: $a_1$، $a_2$، $a_3$، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: $b_1$، $b_2$، $b_3$، $b_4$، $b_5$، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

| مركز الإنتاج | $O_1$ | $O_2$ | $O_3$ |
|---|---|---|---|
| الطاقة الإنتاجية (العرض $d_i$) | $a_1=240$ | $a_2=160$ | $a_3=260$ |

| مركز التوزيع | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| الطلب ($b_j$) | $b_1=120$ | $b_2=150$ | $b_3=145$ | $b_4=125$ | $b_5=140$ |

عملية نقل المنتج $P$ من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل $C_{ij}$.

$C_{ij}$ تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج $P$ من مراكز الإنتاج $i$ إلى مركز التوزيع $j$ .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

| $C_{ij}$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | $C_{11}=100$ | $C_{12}=800$ | $C_{13}=100$ | $C_{14}=500$ | $C_{15}=400$ |
| $O_2$ | $C_{21}=500$ | $C_{22}=500$ | $C_{23}=300$ | $C_{24}=600$ | $C_{25}=700$ |
| $O_3$ | $C_{31}=200$ | $C_{32}=900$ | $C_{33}=500$ | $C_{34}=900$ | $C_{35}=800$ |

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات $x_{ij}$ الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

**الحل:**

يمكن تلخيص في جدول شامل يسمى **جدول مسألة النقل**:

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | $C_{11}=100$ $x_{11}$ | $C_{12}=800$ $x_{12}$ | $C_{13}=100$ $x_{13}$ | $C_{14}=500$ $x_{14}$ | $C_{15}=400$ $x_{15}$ | 240 |
| $O_2$ | $C_{21}=500$ $x_{21}$ | $C_{22}=500$ $x_{22}$ | $C_{23}=300$ $x_{23}$ | $C_{24}=600$ $x_{24}$ | $C_{25}=700$ $x_{25}$ | 160 |
| $O_3$ | $C_{31}=200$ $x_{31}$ | $C_{32}=900$ $x_{32}$ | $C_{33}=500$ $x_{33}$ | $C_{34}=900$ $x_{34}$ | $C_{35}=800$ $x_{35}$ | 260 |
| $b_i$ | 120 | 130 | 145 | 125 | 140 | 660 |

يلخص جدول مسائل النقل كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل مركز توزيع في أعلى كل خانة، وتظهر متغيرات المسألة وهي القيم $x_{ij}$ المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، وكذا كمية الطلب لكل منطقة.

**الصياغة الرياضية لمسائل النقل:**

يمكن صياغة مشكل النقل في شكل نموذج رياضي كما يلي:

**أ– تحديد متغيرات القرار**: تمثل القيم $x_{ij}$ متغيرات القرار في مسائل النقل، و عددها في مثالنا السابق 15 متغيرة قرار، حيث:

$x_{11}$ : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج $O_1$ إلى مركز التوزيع $D_1$ .

$x_{43}$ : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج $O_4$ إلى مركز التوزيع $D_3$ .

**ب– صياغة دالة الهدف**: دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. و تكون من الشكل التالي:

$$Min\ Z = 100\,x_{11}+800\,x_{12}+100\,x_{13}+500\,x_{14}+400\,x_{15}+500\,x_{21}+500\,x_{22}+300\,x_{23}+600\,x_{24}+700\,x_{25}+200\,x_{31}+900\,x_{32}+500\,x_{33}+900\,x_{34}+800\,x_{35}$$

**ج– صياغة القيود**: لدينا نوعين من القيود: قيود العرض و قيود الطلب.

**قيود العرض**:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 240$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 160$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 260$$

**قيود الطلب**:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{23} = 130$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 145$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 125$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 140$$

**قيود عدم سلبية المتغيرات**: $x_{ij} \geq 0$

## 4- طرق حل مسائل النقل:

تمر عملية حل مسائل النقل بمرحلتين أساسيتين وهما:

**المرحلة الأولى :** وهي مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأول، وتتم بعدة طرق منها:

- طريقة الركن الشمالي الغربي.
- طريقة اقل تكلفة.
- طريقة فوجل

**المرحلة الثانية :**وهي مرحلة اختبار الحل وسيرورة تحسينه، وتتم بإحدى الطريقتين التاليتين:

أ-طريقة التخطي (طريقة الأحجار المتنقلة أو القفز على الصخور)

ب-طريقة التوزيع المعدلة MODI.

### 4-1- المرحلة الأولى :طرق إيجاد الحل الأساسي الأولي:

تعمل طرق الحل في هذه المرحلة على إيجاد حل مبدئي (تكاليف مبدئية) نستند إليها للوصول إلى حلول متتابعة إلى أن نصل إلى الحل الأمثل الذي يعطينا أفضل توزيع بأقل تكلفة ممكنة.

#### 4-1-1-طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب المعتمدة في مجال تحديد الحل الأولي، وخطوات الحل بهذه الطريقة تتمثل فيما يلي:

1- تشغيل الخلية (1.1) بأكبر قيمة ممكنة من الوحدات _ هذه القيمة الكبيرة تكون مقيدة بأصغر قيمة بين عرض المصدر 1 وطلب المركز 1.

2- إذا كانت الكمية المتاحة (العرض )مساوية للصفر بعد عملية التشغيل يتم الانتقال عموديًا للأسفل.

3- إذا كانت الكمية المطلوبة مساوية للصفر بعد عملية التشغيل يتم الانتقال أفقيًا في نفس السطر.

4- إذا كانت الكمية المتاحة والمطلوبة مساوية للصفر يتم الانتقال قطريًا إلى الخلية (2.2)

**5-** يتم تكرار الخطوات السابقة حتى ننتهي من عملية النقل.

**مثال:** ليكن لدينا مسالة تسويق لبضاعة من نقاط الطلب $(V_1)$و$(V_2)$و$(V_3)$ الى نقاط العرض $(E_1)$و$(E_2)$و$(E_3)$ والمدونة في الجدول التالي:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 8 | 5 | 6 | 120 |
| مصدر2 | 15 | 10 | 12 | 80 |
| مصدر3 | 3 | 9 | 10 | 80 |
| الطلب | 150 | 70 | 60 | 280 |

إن المشكلة تحتوي على تحديد عدد الوحدات التي يجب نقلها من الوحدات الإنتاجية إلى المخازن بحيث تكون تكاليف النقل أقل حد ممكن؟

**الحل:**

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 8 — 120 | 5 | 6 | 120/0 |
| مصدر2 | 15 — 30 | 10 — 50 | 12 | 80/50/0 |
| مصدر3 | 3 | 9 — 20 | 10 — 60 | 80/60/0 |
| الطلب | 150/30/0 | 70/20/0 | 60 | 280 |

من الجدول أعلاه نجد بأن عدد الأسطر (m=3) وعدد الاعمدة (n=3) وبالتالي عدد الخلايا الممتلئة أو المشغولة يحسب كما يلي: $(n+m-1=3+3-1=5)$ أي *ان عدد المتغيرات الأساسية هو:5.*

*ونحسب التكلفة المبدئية:*

$$Min: Z=8x_{11}+15x_{21}+10x_{22}+9x_{32}+10x_{33}$$

$$Min: Z=8(120)+15(30)+10(50)+9(20)+10(60)$$

$$Min: Z=2690$$

إن طريقة الزاوية الشمالية الغربية لا تعتمد على أساس التكاليف في تعبئة الخلايا من المصادر إلى المراكز وإنما على أساس موقع الخلايا في الجدول وعليه فهذه الطريقة لا تؤدي في معظم الأحيان إلى تحقيق أقل تكلفة ممكنة بصورة مباشرة دون اللجوء إلى إجراء تحسينات.

### 4-1-2- طريقة اقل تكلفة *(Méthode du moindre coût)*:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية و هكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي $(m+n-1)$.[19]

و بالعودة إلى مثالنا السابق، نلاحظ ان اصغر كلفة هي 3 وعليه نقوم بتهيئة الخانة (3.1) مع المحافظة على المتطلبات الهامشية وبعدها الخانة التي تليها في الكلفة وهي 5 أي الخانة (1.2) وعليه الجدول يكون كما يلي:

### 4-1-3- طريقة فوجل:

ويتم فيها تحديد الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر وعمود ثم نبدأ بتحديد السطر أو العمود صاحب أكبر فرق ونبدأ بتشغيل الخلية صاحبة أقل تكلفة فيه ومن ثمة ننتقل إلى خلية أخرى ، ثم تكرار ما سبق حتى نهاية كل المطالب والإمدادات وهذه الطريقة هي أقل الطرق تكلفة.

وبالعودة للتمرين السابق يكون الحل بطريقة فوجل التقريبية كما يلي:

| المراكز / المصادر | مركز 1 | مركز 2 | مركز 3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر 1 | 8 | 5 (70) | 6 (50) | 120/50/0 |
| مصدر 2 | 15 (70) | 10 | 12 (10) | 80/70/0 |
| مصدر 3 | 3 (80) | 9 | 10 | 80/0 |
| الطلب | 150/70/0 | 70/0 | 60/10/0 | 280 |

من الجدول أعلاه نجد بأن عدد الأسطر (m=2) وعدد الاعمدة (n=3) وبالتالي عدد الخلايا الممتلئة أو المشغولة يحسب كما يلي: $(n+m-1=2+3-1=4)$ أي *ان عدد المتغيرات الأساسية هو:4*

[19] محمد راتول، **مرجع سبق ذكره**، ص 125.

*ونحسب التكلفة المبدئية:*

$$Min: Z=5x_{12}+6x_{13}+15x_{21}+12x_{23}+3x_{31}$$

$$Min: Z=5(70)+6(50)+15(70)+12(10)+3(80)$$

$$Min: Z=2060$$

ونجد أن هذا الحل أي بطريقة أقل تكلفة أفضل من الحال السابق بطريقة الزاوية الشمالي الغربية.

إن التوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربي ة تهتم بتلبية الطلبات فقط في حين أن طريقة أقل تكلفة تهتم بالتكاليف وتلبية الطلبات في آن واحد.

### 4-1-3- طريقة فوجل التقريبية (Vogel's approximation method 'VAM')

ويتم فيها تحديد الفرق بين أقل تكلفتين في كل سطر وعمود ثم نبدأ بتحديد السطر أو العمود صاحب أكبر فرق ونبدأ بتشغيل الخلية صاحبة أقل تكلفة فيه ومن ثمة ننتقل إلى خلية أخرى، ثم تكرار ما سبق حتى نهاية كل المطالب والإمدادات وهذه الطريقة هي أقل الطرق تكلفة.

وبالعودة للتمرين السابق يكون الحل بطريقة فوجل التقريبية كما يلي:

**الخطوة الاولى:**

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض | حاصل طرح أقل تكلفتين |
|---|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 8 | 5 | 6 | 120 | 1 |
| مصدر2 | 15 | 10 | 12 | 80 | 2 |
| مصدر3 | 3 / 80 | 9 | 10 | 80/0 | 6 |
| الطلب | 150/70 | 70 | 60 | 280 | |
| حاصل طرح أقل تكلفتين | 5 | 4 | 4 | | |

**الخطوة الثانية:**

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض | حاصل طرح أقل تكلفتين |
|---|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 8 / 70 | 5 | 6 | 120/50 | 1 |
| مصدر2 | 15 | 10 | 12 | 80 | 2 |
| الطلب | 70/0 | 70 | 60 | 280 | |
| حاصل طرح أقل تكلفتين | 7 | 5 | 6 | | |

**الخطوة الثالثة:**

| المراكز / المصادر | مركز2 | مركز3 | العرض | حاصل طرح أقل تكلفتين |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 5 | 6 / 50 | 50/0 | 1 |
| مصدر2 | 10 | 12 | 80 | 2 |
| الطلب | 70 | 60/10 | 280 | |
| حاصل طرح أقل تكلفتين | 5 | 6 | | |

**الخطوة الرابعة:**

| المراكز / المصادر | $E_2$ | $E_3$ | العرض | حاصل طرح أقل تكلفتين |
|---|---|---|---|---|
| $V_2$ | 70 **10** | 10 **12** | 80 | 2 |
| الطلب | 70 | 10 | 80 | |

ومنه يمكن الحصول على حل أولي الذي هو في معظم الحالات حل أمثل، ويصبح جدول الحل كما يلي:

| المراكز / المصادر | مركز 1 | مركز 2 | مركز 3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر 1 | 70 **8** | **5** | 50 **6** | 120 |
| مصدر 2 | **15** | 70 **10** | 10 **12** | 80 |
| مصدر 3 | 80 3 | **9** | **10** | 80/0 |
| الطلب | 150/70 | 70 | 60 | 280 |

من الجدول أعلاه نجد بأن عدد الأسطر (m=3) وعدد الاعمدة (n=3) وبالتالي عدد الخلايا الممتلئة أو المشغولة يحسب كما يلي: $(n+m-1=3+3-1=5)$ أي *ان عدد المتغيرات الأساسية هو:5.*

ومن ثم نلاحظ أن كل المراكز قد تم تلبية طلبها وهذا يعني أننا بصدد حل أولي ومن ثم الطريقة قد أعطت حل أولي مقبول، وعند هذا الحل يكون مجموع تكاليف النقل هو:

*ونحسب التكلفة المبدئية:*

$$Min: Z = 8x_{11} + 6x_{13} + 10x_{22} + 12x_{23} + 3x_{31}$$

$$Min: Z = 8(70) + 6(50) + 10(70) + 12(10) + 3(80)$$

$$Min : Z=1920$$

ونلاحظ أن مجموع التكاليف باستخدام طريقة فوجل التقريبية هي 1920 وهي أقل من مجموع التكاليف بالنسبة للطريقتين السابقتين، ومن ثم فإن هذه الطريقة أفضل من الطريقتين السابقتين.

**4-2- المرحلة الثانية: اختبار أمثليه الحل وتحسينه:**

إن الحل المتوصل عليه في التمرين السابق هو حل أساسي أولي، لكن لا نعلم إذا كان حلًا

أمثلًا أم لا، ولمعرفة ذلك فإن هناك طريقتين مستعملتين كما تم الإشارة إليه سابقًا وهما:

### 4-2-1 طريقة التخطي

وفكرة هذه الطريقة هي البحث عن الخلايا الفارغة غير الداخلة في الحل والتي من شأنها أن تقوم بتدنية التكلفة الكلية في حالة ما تم إدخالها إلى الحل الأساسي، لذا يجب اختبار الخلايا الفارغة غير الداخلة في الحل والتي تؤدي إلى خفض التكاليف، أي ينبغي إيجاد ما يصطلح عليه بالتكاليف الحدية (تكاليف الوحدة الواحدة )لكل خلية غير داخلة في الحل. فإذا انتهينا من الخلايا الفارغة يكون تعديل الخلايا الممتلئة بالزيادة أو النقصان بحسب المسار

في الاختبار .ويتم اعتماد طريقة القفز على الصخور في اختبار مثالية الحل الأولي من خلال رسم خط سير ذو أركان عمودية وتمثل الخلايا المشغولة أركان هذا الخط وينتهي بالخلية غير المشغولة المراد تقييمها، ويستلزم الأمر مراعاة النقاط التالية عند تحديد خط السير وهي:

- خط السير دائمًا يأخذ شكل خطوط أفقية وعمودية متصلة وليس شكل الخطوط المتقطعة) التحركات المحورية غير مسموح بها)
- التقييم يتم اعتبارًا من الخلية الفارغة الأولى في السطر الأول إلى الخلايا الفارغة في السطر نفسه ثم الانتقال إلى السطر الثاني وهكذا.
- يحدد المسار بالانتقال من الخلية الفارغة المراد تقييمها إلى خلية مشغولة أخرى حتى يتم الوصول إلى الخلية الفارغة نفسها حيث يمكن تجاوز خلايا فارغة أو مشغولة بحيث نصل إلى خلية ممتلئة.
- نضع إشارة موجبة في الخلية الفارغة والتي نريد تقييمه ا ثم نضع إشارات متبادلة)- (و)+( لكل ركن في المسار المغلق حيث تمثل هذه الإشارات السالبة والموجبة إضافة وطرح وحدة واحدة من الخلية المناظرة.

- يراعى أن يكون عدد الخلايا في المسار زوجيًا 4 (أو )6 أركان وفي الغالب نبدأ باختيار الخلية التي يكون مسارها ذا التكلفة السالبة الأكبر.
- تحسب القيمة الجبرية للخلية الخاضعة للتقييم، فإذا كانت هذه القيمة سالبة فيعني ذلك أنها ستساهم في خفض التكاليف أما إذا كانت موجبة فإنها ستؤدي إلى زيادة التكاليف .ونصل إلى الأفضل عندما تكون كل القيم لجميع اختبارات الخلايا عبارة عن قيم موجبة أو صفرية.
- عندما نجد خلية نتيجة اختبارها سالبة فإننا نتبع مسار هذه الخلايا ونختار الخلية التي توفر أكبر قيمة، فننتقل إليها أو نستخدمها في النقل بأقل عدد ممكن من الوحدات الموجودة في الخلايا السالبة ضمن المسار بحيث يبقى التوزيع في حدود الاحتياجات والمتاح من الموارد.
- يتم تكرار الخطوات السابقة بنقل القيم من الخلايا وتقييم الخلايا الفارغة بنفس الطريقة حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.
- يفضل التوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية لحساب التكاليف المبدئية.

ولتوضيح تطبيق هذه الطريقة نورد الحل الأولي الذي تم التوصل إليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية ونناقش كيفية اختبار مثالية الحل:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 1 **40** | 4 **15** | 5 | 55 |
| مصدر2 | 5 | 7 **15** | 3 **30** | 45 |
| مصدر3 | 10 | 8 | 9 **20** | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

يتضح من الجدول أعلاه وجود أربعة خلايا غير مشغولة أي فارغة وهي الخلايا (1.2) و(1.3) و(2.3) و(3.1) ويتم تقييم هذه الخلايا وفق الاتي:

**الخلية (1.3):**

| المراكز / المصادر | مركز 1 | مركز 2 | مركز 3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر 1 | 1 40 | 4 - 15 | 5 + | 55 |
| مصدر 2 | 5 | 7 + 15 | 3 - 30 | 45 |
| مصدر 3 | 10 | 8 | 9 20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر 1 إلى المركز3 هي:

$$\sigma_{13} = 5(1) + 3(-1) + 7(1) + 4(-1) = 5$$

وهذا يعني أن نقل وحدة واحدة إلى الخلية (1.3) يؤدي إلى ارتفاع التكاليف لكل وحدة ب 5ون فمثلا لو تم نقل 20 وحدة من المصدر 1 إلى المركز 3 فإن ذلك سوف يؤدي إلى ارتفاع التكاليف الكلية بمقدار 100 ون، وعليه فإن هذه الخلية ينبغي تجنبها.

الخلية (1.2):

يكون الجدول كما يلي:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 1 (-40) | 4 (+15) | 5 | 55 |
| مصدر2 | 5 (+) | 7 (-15) | 3 (30) | 45 |
| مصدر3 | 10 | 8 | 9 (20) | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر 2 إلى المركز 1هي $\sigma_{21} = 5(1) + 1(-1) + 4(1) + 7(-1) =$ 1

**الخلية (1.3):**

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 1 (-40) | 4 (+15) | 5 | 55 |
| مصدر2 | 5 | 7 (-15) | 3 (+30) | 45 |
| مصدر3 | 10 (+) | 8 | 9 (-20) | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر 3 إلى المركز 1هي:

$$\sigma_{31} = 10(1) + 1(-1) + 4(1) + 7(-1) + 3(1) + 9(-1) = 0$$

وهذا يعني أن هذه الخلية لا تؤثر على التكلفة في حالة إدخالها إلى الأساس، فهي لا تنقص ولا تزيد في التكاليف.

**الخلية (3.2):**

| المراكز / المصادر | مركز 1 | مركز 2 | مركز 3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر 1 | 1 40 | 4 15 | 5 | 55 |
| مصدر 2 | 5 | 7 - 15 | 3 + 30 | 45 |
| مصدر 3 | 10 | 8 + | 9 - 20 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر 3 إلى المركز 2هي:

$$\sigma_{32} = 8(1) + 7(-1) + 3(1) + 9(-1) = -5$$

ونجد أن الخلية التي تعطي تخفيضًا للتكلفة الإجمالية هي الخلية(3.2) لذلك فالحل الأساسي الأول هو حل ليس أمثلًا_ نقول أن الحل غير أمثل إذا كانت إحدى أو بعض التكاليف الحدية سالبة_ والخلية المرشحة للدخول هي المقابلة لأكبر تكلفة حدية سالبة.

وعليه فالحل الأساسي الأولي يتطلب الأمر تحسينه بإدخال الخلية إلى الأساس، ويتم ذلك من خلال إحداث تغييرات على طول قيم المتغيرات المتواجدة على زوايا المسار بإضافة وطرح أصغر قيمة متواجدة على الزوايا السالبة( الزوايا التي تم طرح القيمة 1 منها )وهذا لتجنب إحداث قيم سالبة لبعض المتغيرات.

### 4-2-2-طريقة التوزيع المعدل (MODI):

تستخدم هذه الطريقة لاختبار أمثلية الحل الأولي، و هي أكفأ من سابقتها، و التي تعتمد على تكوين مسارات مغلقة للمتغيرات غير الأساسية و من ثم إيجاد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل،

أما هذه الطريقة فهي قادرة على تحديد المتغير غير الأساسي الذي يساهم في تقليل مجموع تكاليف النقل مباشرة،[20] و تتلخص هذه الطريقة فيما يلي:

- نرمز لكل سطر (الوحدة الإنتاجية) بالرمز $U_i$، و نرمز لكل عمود (مركز التوزيع) بالرمز $V_j$؛
- كل متغيرة أساسية (الخلايا المملوءة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$C_{ij} = U_i + V_i \quad \text{مع} \quad U_i=0$$

- كل متغيرة غير أساسية (الخلايا الفارغة) في جدول النقل تكتب بصيغة المعادلة التالية:

$$C'_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$$

و المطلوب تحديد قيم المجاهيل $U_i$ و $V_i$.

- نختار الخلية الفارغة التي تحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية و تتم دراسة مسارها وفقا للقاعدة المعروفة في الطريقة السابقة؛
- يتم تكرار هذه العملية إلى غاية الوصول إلى قيم جبرية موجبة أو معدومة.

ولتوضيح تطبيق هذه الطريقة نورد الحل الأولي الذي تم التوصل إليه بطريقة الزاوية الشمالية الغربية ونناقش كيفية اختبار مثالية الحل باستعمال طريقة التوزيع المعدل:

| | | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المراكز / المصادر | مركز 1 | مركز 2 | مركز 3 | العرض |
| $U_1$ | مصدر 1 | 1: 40 | 4: 15 | 5 | 55 |
| $U_2$ | مصدر 2 | 5 | 7: 15 | 3: 30 | 45 |
| $U_3$ | مصدر 3 | 10 | 8 | 9: 20 | 20 |
| | الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

[20] حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مرجع سبق ذكره**، ص 307.

- **بالنسبة للخلايا الداخلة في الحل:**

وهي الخطوة الاولى حيث لدينا $C_{ij} = U_i + V_i$ ، من خلالها نجد المجاهيل $U_i$ و $V_i$ من خلال المعادلات التالية مع فرض ان($U_i$=0 ) لأول معادلة وهذا لتسهيل الحل:

| الخلية | استنباط القيم المتبقية بدلالة القيم المعلومة | $U_i + V_j = C_{ij}$ |
|---|---|---|
| (1،1) | $U_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 1$ | $U_1 + V_1 = 1$ |
| (1،2) | $U_1 = 0 \Rightarrow V_2 = 4$ | $U_1 + V_2 = 4$ |
| (2،2) | $V_2 = 4 \Rightarrow U_2 = 3$ | $U_2 + V_2 = 7$ |
| (2،3) | $U_2 = 3 \Rightarrow V_3 = 0$ | $U_2 + V_3 = 3$ |
| (3،3) | $V_3 = 0 \Rightarrow U_3 = 9$ | $U_3 + V_3 = 9$ |

وبعد ذلك نضع قيم $U_i$ في العمود الجديد وقيم $V_i$ في السطر الجديد، ويكون شكل جدول النقل كما مبين في الجدول الموالي:

| | | 1 | 4 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
| 0 | مصدر1 | 1 **40** | 4 **15** | 5 | 55 |
| 3 | مصدر2 | 5 | 7 **15** | 3 **30** | 45 |
| 9 | مصدر3 | 10 | 8 | 9 **20** | 20 |
| | الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

- **بالنسبة للخلايا غير الداخلة في الحل:**

وهي الخطوة الثانية ويتعين تقييم هذه الخلايا من خلال ايجاد التكاليف الحدية بطريقة مختلفة عن طريقة التخطي، وذلك من خلال المعادلة التالية: $\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ ، حيث نحصل على الجدول التالي:

| $\sigma_{ij}$ | $\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ | الخلية |
|---|---|---|
| 5 | 5-0-0=5 | $(U_1 ، V_3)$ |
| 1 | 5-3-1=1 | $(U_2 ، V_1)$ |
| 0 | 10-9-1=0 | $(U_3 ، V_1)$ |
| -5 | 8-9-4=-5 | $(U_3 ، V_2)$ |

ويظهر من نتائج الجدول أنها مطابقة لنتائج تقييم جدول النقل الأولي بطريقة التخطي.

حيث نقوم بإعداد جدول نقل جديد لملئ (إشغال) الخلية (U3 ,V2) باعتبارها صاحبة أصغر قيمة سالبة( في هذا المثال توجد قيمة سالبة واحدة فقط وهي )5 - حيث أن ملئها ينتج عنه تخفيض التكاليف، ويتم ملئ الخلية(U3 ,V2) طبقًا لما تم شرحه في طريقة التخطي، وبعدها نقوم باختبار المثالية للجدول الجديد بطريقة التوزيع المعدلة وبنفس الخطوات السابقة كما يلي:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 1 — 40 | 4 — 15 | 5 | 55 |
| مصدر2 | 5 | 7 | 3 — 45 | 45 |
| مصدر3 | 10 | 8 — 15 | 9 — 5 | 20 |
| الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

- **بالنسبة للخلايا الخلة في الحل:**

ونقوم من جديد باختبار الحل ان كان امثلا أولا، وهذا بنفس المنهجية السابقة، حيث نفرض كذلك ان (U1=0)ونحصل على النتائج التالية:

| الخلية | استنباط القيم المتبقية بدلالة القيم المعلومة | $U_i + V_j = C_{ij}$ |
|---|---|---|
| (1،1) | $U_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 1$ | $U_1 + V_1 = 1$ |
| (1،2) | $U_1 = 0 \Rightarrow V_2 = 4$ | $U_1 + V_2 = 4$ |
| (3،2) | $V_2 = 4 \Rightarrow U_3 = 4$ | $U_3 + V_2 = 8$ |
| (3،3) | $U_3 = 4 \Rightarrow V_3 = 5$ | $U_3 + V_3 = 9$ |
| (3،2) | $V_3 = 5 \Rightarrow U_2 = -2$ | $U_2 + V_3 = 3$ |

وبعد ذلك نضع قيم $U_i$ في العمود الجديد وقيم $V_i$ في السطر الجديد، ويكون شكل جدول النقل كما مبين في الجدول الموالي:

| | | 1 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
| 0 | مصدر1 | 1 **40** | 4 **15** | 5 | 55 |
| -2 | مصدر2 | 5 | 7 | 3 **45** | 45 |
| 4 | مصدر3 | 10 | 8 **15** | 9 **5** | 20 |
| | الطلب | 40 | 30 | 50 | 120 |

- **بالنسبة للخلايا غير الداخلة في الحل:**

سيتم تقييم الخلايا الفرغة في جدول النقل التالي وبالشكل الاتي:

| $\sigma_{ij}$ | $\sigma_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ | الخلية |
|---|---|---|
| **0** | **5−0−5=5** | $(U_1 ، V_3)$ |
| **6** | **5−(−2)−1=6** | $(U_2 ، V_1)$ |
| **5** | **7−(−2)−4=5** | $(U_2 ، V_2)$ |
| **5** | **10−4−1=5** | $(U_3 ، V_1)$ |

نلاحظ من النتائج أعلاه أن جميع أرقام التقييم( أي ان $E_{ij} \geq 0$)موجبة وهذا يدل على عدم إمكانية تخفيض تكاليف النقل من خلال ملئ الخلايا الفارغة، لذلك فإن جدول النقل الأخير يعتبر التوزيع الأفضل للكميات المنقولة .ونقوم بحساب التكلفة الإجمالية:

$$Min : Z = x_{11} + 4x_{12} + 3x_{23} + 8x_{32} + 9x_{33}$$

$$Min : Z = (40) + 4(15) + 3(45) + 8(15) + 9(5)$$

$$Min : Z = 400$$

ويمكن ملاحظة أن تكلفة النقل الكلية 400 ( ون )والتي توصلنا إليها وفق طريقة التوزيع المعدل تعتبر الحل الأمثل، وهي نفس الحل المتوصل إليه بطريقة التخطي.

## سلسلة تمارين محلولة

### التمرين الأول:

الجدول أدناه يقدم تكاليف النقل الوحدوية لنقل منتج معين من 03 مراكز إنتاج إلى 04 مراكز توزيع، بالإضافة إلى عرض كل مركز إنتاج و طلب كل مركز توزيع.

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $A_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 12 | 13 | 04 | 06 | 500 |
| $O_2$ | 06 | 04 | 10 | 11 | 700 |
| $O_3$ | 10 | 09 | 12 | 04 | 800 |
| $b_i$ | 400 | 900 | 200 | 500 | |

**المطلوب: 1-** انطلاقا من معطيات مسألة النقل أعلاه شكِّل جدول النقل الموافق لهذه المسألة؛

**2-** قدم نموذج النقل الموافق لجدول النقل المتوصل إليه؛

**3-** أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

**4-** أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له؛

**5-** أوجد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل، و كذا قيمة دالة الهدف الموافقة له.

### التمرين الثاني:

لدى شركة ثلاث وحدات إنتاج وتقوم ببيع منتجاتها لثلاث مراكز والجدول التالي يوضح الكمية المنتجة من الوحدات الثلاث والطلب من المراكز الثلاث والأرباح المحصل عليها لكل وحدة من كل مركز للوحدة الواحدة:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 10 | 8 | 7 | 30 |
| مصدر2 | 18 | 15 | 13 | 42 |
| مصدر3 | 9 | 12 | 15 | 20 |
| الطلب | 15 | 47 | 30 | |

المطلوب :حل المسألة التي هي في حالة تعظيم الأرباح باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية والتأكد بطريقة التخطي؟

**حل التمرين الأول:**

**1- تشكيل جدول النقل:**

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 12 $x_{11}$ | 13 $x_{12}$ | 04 $x_{13}$ | 06 $x_{14}$ | 500 |
| $O_2$ | 06 $x_{21}$ | 04 $x_{22}$ | 10 $x_{23}$ | 11 $x_{24}$ | 700 |
| $O_3$ | 10 $x_{31}$ | 09 $x_{32}$ | 12 $x_{33}$ | 04 $x_{34}$ | 800 |
| $b_i$ | 400 | 900 | 200 | 500 | 2000 |

**2- صياغة نموذج النقل:**

$$Min\ Z = 12\,x_{11}+13\,x_{12}+4\,x_{13}+6\,x_{14}+6\,x_{21}+4\,x_{22}+10\,x_{23}+11\,x_{24}+10\,x_{31}+9\,x_{32}+12\,x_{33}+4\,x_{34}$$

**قيود العرض:**

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 500$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 700$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 800$$

**قيود الطلب:**

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 400$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{23} = 900$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 200$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 500$$

**قيود عدم سلبية المتغيرات:** $x_{ij} \geq 0$

**3- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:**

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 12 **400** | 13 **100** | 04 / | 06 / | 500 / 100 0 |
| $O_2$ | 06 / | 04 **700** | 10 / | 11 / | 700 / 0 |
| $O_3$ | 10 / | 09 **100** | 12 **200** | 04 **500** | 800 / 700 0 |
| $b_i$ | 400 | 900 | 200 | 500 | 2000 |

*Min Z =12 (400)+13 (100)+4 (0)+6 (0) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (0)+9 (100)+12 (200)+4 (500) = 14200*

**4- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة التكاليف الدنيا:**

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 12 **300** | 13 / | 04 **200** | 06 / | 500 / 300 0 |
| $O_2$ | 06 / | 04 **700** | 10 / | 11 / | 700 / 0 |
| $O_3$ | 10 **100** | 09 **200** | 12 / | 04 **500** | 800 / 300 / 100 |
| $b_i$ | 400 | 900 | 200 | 500 | 2000 |

$$Min\ Z = 12\ (300)+13\ (0)+4\ (200)+6\ (0)+6\ (0)+4\ (700)+10\ (0)+11\ (0)+10\ (100)+9\ (200)+12\ (0)+4\ (500) = 10400$$

**5- إيجاد حل الأساس المقبول باستخدام طريقة فوجل:**

| | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $a_i$ | الفرق |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 12 / | 13 / | 04 **200** | 06 **300** | 500 / 300 0 | 2 6 |
| $O_2$ | 06 / | 04 **700** | 10 / | 11 / | 700 / 0 | 2 2 2 |
| $O_3$ | 10 **400** | 09 **200** | 12 / | 04 **200** | 800 / 600 / 400 | 5 5 1 |
| $b_i$ | 400 / 0 | 900 / 200 | 200 / 0 | 500 / 200 | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | | 0 | 2000 |
| الفرق | 4<br>4<br>4 | 5<br>5<br>5 | 6 | 2<br>2<br>7 | |

*Min Z =12 (0)+13 (0)+4 (200)+6 (300) +6 (0)+4 (700)+10 (0)+11 (0) +10 (400)+9 (200)+12 (0)+4 (200) = 12000*

**حل التمرين الثاني:**

بما أن العرض يساوي الطلب نقوم بالتوزيع بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 10 **15** | 8 **15** | 7 | 30 |
| مصدر2 | 18 | 15 **32** | 13 **10** | 42 |
| مصدر3 | 9 | 12 | 15 **20** | 20 |
| الطلب | 15 | 47 | 30 | |

وبالتالي فإن الأرباح الإجمالية للحل الأساسي هي:

$$Z=15*10+15*8+32*15+10*13+20*15=1180$$

وللتأكد بطريقة التخطي نتأكد في البداية من الشرط $m+n-1=5$ محقق وبالتالي يمكننا استخدام طريقة التخطي وبحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{ij} = 22 - 21 = 1 > 0$$

نلاحظ أن القيمة أكبر من الصفر وفي حال تعظيم الأرباح إذا كانت القيمة أكبر من الصفر ننقل أي الحالة بعكس التكلفة الدنيا.

بعد النقل نحصل على الجدول التالي:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 10 **15** | 8 **5** | 7 **10** | 30 |
| مصدر2 | 18 | 15 **42** | 13 | 42 |
| مصدر3 | 9 | 12 | 15 **20** | 20 |
| الطلب | 15 | 47 | 30 | |

وبالتالي فإن الأرباح الإجمالية للحل الأساسي هي:

$$Z=15*10+5*8+10*7+42*15+20*15=1190$$

وبحساب القيم الحدية للخلايا غير المعبئة نجد:

$$\sigma_{ij} = 25 - 26 = 1 > 0$$

بعد النقل نحصل على الجدول التالي:

| المراكز / المصادر | مركز1 | مركز2 | مركز3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| مصدر1 | 10 | 8 **20** | 7 **10** | 30 |
| مصدر2 | 18 **15** | 15 **27** | 13 | 42 |
| مصدر3 | 9 | 12 | 15 **20** | 20 |
| الطلب | 15 | 47 | 30 | |

وبالتالي فإن الأرباح الإجمالية للحل الأساسي هي:

$$Z=20*8+10*7+15*18+27*15+20*15=1205$$

وبحساب القيم الحدية للخلايا غير المشغلة نجد:

$\sigma_{11} = 25 - 26 = 1 > 0$ لا ننقل

$\sigma_{23} = 21 - 22 = -1 < 0$ لا ننقل

$\sigma_{31} = 31 - 41 = -10 < 0$ لا ننقل

$\sigma_{11} = 25 - 30 = -5 < 0$ لاننقل

بما أن جميع القيم سالبة بالتالي فإن جد ول النقل الأخير يمثل الحل الأمثل:

المصد ر الأول يزود المركز الثاني ب 20 وحدة والمركز الثالث ب 10 وحدات.

المصدر الثاني يزود المركز الأول ب 15 وحدة والمركز الثاني ب 27 وحدة.

المصدر الثالث يزود المركز الثالث ب 20 وحدة.

والأرباح الإجمالية هي1205 .

# الفصل الثالث: البرمجة غير خطية بالقيود وبدون قيود

**مقدمة:**

البرمجة غير الخطية ***Nonlinear programming*** او البرنامج غير الخطي هو البرنامج الرياضي بشكله العام حيث تكون دالة الهدف او القيود اوكلاهما غير خطية، ويعتقد ان اكثر الطرق شيوعا لحل البرنامج غير الخطي هي طريقة دوال الجزاء والحد التكرارية، ويعتبر البرنامج غير الخطي اصعب أنواع البرمجة حيث لم يتفق على امثل طريقة لحل هذا النوع من البرامج الرياضية.

## 1- امثلية المتغير المفرد بقيد وبدون قيد:

يأخذ البرنامج غير الخطي غير المقيد للمتغير المفرد الصيغة التالية: ***z=f(x)*** حيث ان ***f(x)*** دالة غير خطية في المتغير المفرد ***x***، ويكون البحث عن الامثلية (تعظيم او تدنية) في الفترة غير المقيدة $]-\infty, +\infty[$

ويعتبر البرنامج غير الخطي ذو المتغير الوحيد وغير المقيد من ابسط اشكال البرمجة غير الخطية. ونميز هنا بين حالتين:

- في حالة التعظيم، تتحقق القيمة العظمى للدالة غير الخطية وغير المقيدة عند النقطة المثلى ($x^*$) اذا تحقق الشرطان وهما : المشتق الأول للدالة عند تلك النقطة معدوم .في حي أن المشتق الثان سالب، أي:

$$x^* \rightarrow Max f(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{df(x^*)}{dx} = 0 \\ \dfrac{d^2 f(x^*)}{dx} \langle 0 \end{cases}$$

- أما في حالة التدنية، فإن القيمة الدنيا للدالة هي الت تحقق الشرط الأول السابق ومعكوس الشرط الثاني أي:

$$x^* \rightarrow \min\ f(x) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{df(x^*)}{dx} = 0 \\ \dfrac{d^2 f(x^*)}{dx} \rangle 0 \end{cases}$$

اما اذا كانت الفترة مقيدة ومحددة في المجال $[a\ ,b]$ فان المسالة تصبح على الشكال التالي

امثلية $z=f(x)$

علما ان $a \leq x \leq b$

والذي يعتبر برنامجاً غي خطياً، مقيداً، لمتغير واحد.

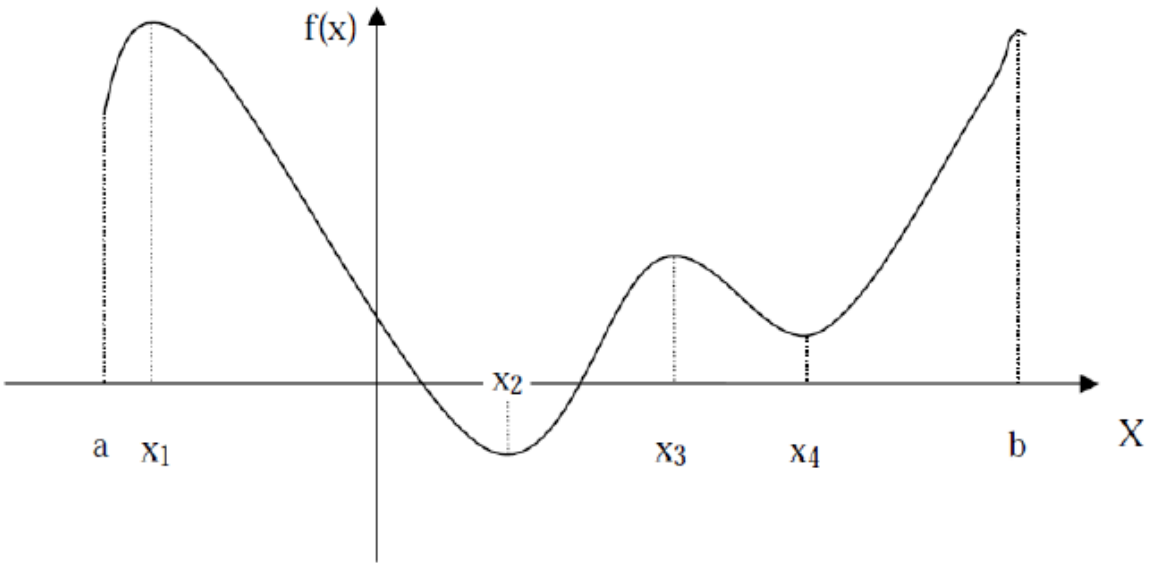
## 1-1- الامثلية المحلية والشاملة:

بفرض انه لدينا دالة الهدف في شكل كثير حدود بمتغير واحد $f(x)$ المعرفة والمستمرة في المجال $]-\infty\ ,+\infty[$

نقول ان للدالة f حد ادنى محلي عند $x_0$ اذا وجد مجال محدود ذو المركز $x_0$ بحيث يحقق $f(x) \geq f(x_0)$

لكل قيم x في هذا المجال الذي تحدد فيه الدالة، واذا تحقق الشرط $f(x) \geq f(x_0)$ مهما كانت قيم x في المجال الذي تحدد فيه الدالة فان الحد الأدنى عند $x_0$ يكون جدا ادنى شاملا.

نفرض ان الدالة f المعرفة والمستمرة على المجال $]-\infty\ ,+\infty[$ تاخذ في المجال المحدود $[a\ ,b]$ الشكل البياني التالي:



من خلال الشكل السابق نلاحظ أن الدالة $f(x)$ تأخذ شكل ملتوي تارة بالارتفاع وتارة بالانخفاض، مما يجعلها تتضمن نقاط حرجة وهي نقاط الاستقرار، والت تعرف بالحدود الدنيا المحلية والحدود العليا المحلية، وإحدى أو بعض هذ ه الحدو د الدنيا أو العلي ا المحلي ة ستكون مرشحة لتكون حدود شاملة للدالة كونها تمثل القيم المثل ى للدالة في المجال $[a\ ,b]$ فمن خلال الشكل السابق نجد أن للدالة $f(x)$ حدود دنيا محلية (نسبي )عند $a, x_2\ , x_4$ وحدو د عليا محلية( نسبية )عند $b, x_1, x_3$ في حي تعتبر الحد أدنى عند a حدًا أدنى شاملًا، بينما الحد الأعلى عند $x_1$,b فتعتبرهما حدًا أعلى شاملًا.

وتعتمد عملية البحث عن الأمثلية للدوال غير الخطية على تحديد الحدود الدنيا والحدود العليا وكذلك الحدود الشامل وفق نظريات التفاضل والتكامل والتي نوجزها فيما يلي:

1- اذا كانت $f(x)$ مستمرة في الفترة المغلقة $[a\ ,b]$ فان يكون لها امثلية (كلا من التعظيم والتدنية) على هذه الفترة .

2- اذا كانت$f(x)$ امثلية محلية عند$x_0$ اذا كانت $f(x)$قابلة للتفاضل في جزء الفترة ذات المركز عند $x_0$ فان $f'(x) = 0$

3- اذا كانت $f(x)$ يمكن تفاضلها مرتين في جزء الفترة ذات المركز عند $x_0$واذا كانت

$f''(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$ فان$f(x)$ يكون لها حدا اعلى محلي عند$x_0$ ، اما اذا كانت

$f''(x_0) < 0, f'(x_0) = 0$ فان $f(x)$ يكون لها حد أدنى محلي عند$x_0$.

ويتبع من النظرية الأولى والثانية انه اذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة $[a\ ,b]$ فان الامثلية المحلية والشاملة تحدث بين النقط التي لا تتواجد فيها $f'(x)$ او بين النقط حيث $f'(x) = 0$او بين النقط النهائية $\boldsymbol{x=b,}$ $\boldsymbol{x=a}$

## 2- أمثلية المتغيرات المتعددة:

البرنامج غير الخطي بدون قيود للمتغيرات المتعددة يأخذ الصيغة التالية:

امثلية $\boldsymbol{z=f(x)}$ حيث ان $x = [x_1, x_2 \dots \dots \dots x_n]^T$

حيث سنقوم بالبحث عن الامثلية في حالة التعظيم، اما حالة التدنية فيمكن استبدال الدالة f(x) لتحل محلها الدالة –f(x).

## 2-1- الحدود العظمى المحلية والشاملة:

نقصد بالجوار $\varepsilon > 0$ حول $X$ هو مجموعة المتجهات $X$بحيث:

$$(X-\hat{X})^T(X-\hat{X}) = (X_1-\hat{X}_1)^2 + (X_2-\hat{X}_2)^2 + \ldots + (X_n-\hat{X}_n)^2 \leq \varepsilon^2$$

تعبيرا بالهندسة التحليلية يكون الجوار $\varepsilon$ حول $\hat{X}$ هو المداخل والحدود لكرة متعددة الابعاد نصف قطرها $\varepsilon$ ومركزها $\hat{X}$.

ويكون لدالة الهدف $f(x)$ حد اعلى محلي عند $\hat{X}$ اذا وجد بجوار $\varepsilon$ حول $\hat{X}$ بحيث ان $f(x) \leq f(\hat{x})$ لكل قيم $x$ في هذا الجوار $\varepsilon$ الذي تحدد فيه الدالة، واذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة $\varepsilon$ فان $f(x)$ لها اعلى محلي عن$\hat{X}$.

## 2-2- المتجه المتدرج ومصفوفة هيسي:

المتجه المتدرج $\nabla f$ المرتبطة بالدالة $f(x_1, x_2 \ldots \ldots \ldots x_n)$ الذي تعرف له المشتقة الجزئية الأولى كمايلي:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

ان البحث عن الامثلية لدالة الهدف متعددة المتغيرات بدون قيود يتم وفق النظريات التالية:

1- اذا كانت $f(x)$ مستمرة في مجال محدود فأنه يكون لها حد أعلى شامل أو حد أدنى شامل في هذا المجال.

2- اذا كانت الدالة $f(x)$ حد اعلى محلي اوحد ادنى محلي عند $x^*$ واذا كانت $\nabla f$ موجودة في جوار $\varepsilon$ حول $x^*$ فان $\nabla f \ / \ x^*$.

3- اذا كانت للدالة $f(x)$ لها مشتقة جزئية في جوار $\varepsilon$ حول $x^*$ وكانت $\nabla f / x^* = 0$ و $Hf/x^*$ سالبة محددة فان الدالة $f(x)$ يكون لها حد اعلى محلي عند $x^*$.

وعليه اذا كانت الدالة f(x) معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق لعدة مرات في مجال محدد فان الدالة حد اعلى محلي في هذا المجال عند $x^*$ بحيث يتحقق $\nabla f/x^* = 0$ ويكون هذا الحد اعلى اذا كانت المصفوفة الهيسية للدالة f(x) من اجل $x^*$ =x محددة موجبة او شبه محددة موجبة.

## تمارين مقترحة

**التمرين الأول**: مؤسسة لنقل المسافرين تمتلك نوعين من السيارات: سيارة 5 ركاب و سيارة 11 راكبا، حيث تعمل السيارات على خطين لنقل المسافرين، علما أن كل سيارة تستطيع القيام برحلة واحدة يوميا. يبلغ إيراد النوع الأول 5000 دج على الخط الأول 6000 دج على الخط الثاني، أما النوع الثاني فيبلغ إيرادها 8000 دج على الخط الأول و 10000 دج على الخط الثاني. عدد الأشخاص المتوقع نقلهم على الخط الأول لا يتجاوز 2000 شخص بينما لا يتجاوز عدد 1500 على الخط الثاني. أجرت المؤسسة دراسة أوضحت بأن تخصيص 10 سيارات من النوع الأول على الخط الأول يمكن أن يعود عليها بالإيراد المطلوب، أما عند تخصيص أكثر من 10 سيارات فإن ذلك يمكن أن يؤدي إلى خسارة في الإيراد مقدارها 2000 دج لكل سيارة.

**المطلوب**: صياغة النموذج الرياضي و الذي يسمح بتحديد عدد السيارات و الذي يعظم إيرادات المؤسسة.

**التمرين الثاني**: مكتب للاستنساخ يود شراء 10 أجهزة استنساخ، و أمامه 3 أنواع من أجهزة الاستنساخ، وعليه ما لا يقل عن جهازين من كل نوعين. يمكن للنوع الأول استنساخ 300 ورقة في الساعة، و يمكن للنوع الثاني استنساخ 350 ورقة، أما النوع الثالث فيمكن له استنساخ 250 ورقة في الساعة. العمر المتوقع للنوع الأول هو 3 سنوات، و للنوع الثاني هو 2 سنوات أما النوع الثالث فعمره هو 4 سنوات، علما أن مجموع أعمار أجهزة الاستنساخ يجب أن لا يقل عن 30 سنة. كلفة شراء الأجهزة الثلاث هي على التوالي: 1.5، 2، 1 مليون دينار، مع العلم أن المكتب بإمكانه بيع الأجهزة بعد سنة من الاستخدام بسعر: 1، 1، 0.5 مليون دينار على التوالي، حيث أن خطة المكتب تقضي استنساخ ما لا يقل عن 3000 ورقة في الساعة الواحدة.

**المطلوب**: صياغة النموذج الرياضي و الذي يسمح بتحديد عدد الأجهزة و الذي تقلل تكاليف الشراء.

**التمرين الثالث**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 4000\,x_1 + 6000\,x_2$$

$$Soumise\ aux\ contraintes$$

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 20\,x_2 \leq 800 \\ 60\,x_1 + 40\,x_2 \leq 2400 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

**المطلوب**: **1-** حدد منطقة الحلول المقبولة و إحداثيات النقاط الرأسية لها؛

**2–** حدد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة رأسية، ثم أوجد الحل الأمثل؛

**3–** حدد القيود المشبعة و غير المشبعة بيانيا و جبريا.

**التمرين الرابع**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z = 300\ x_1 + 400\ x_2$$

*Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} 5\ x_1 - 5\ x_2 \leq 60 \\ x_1 + 3\ x_2 \geq 12 \\ x_1 - 2\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 6$$

$$x_2 \leq 8$$

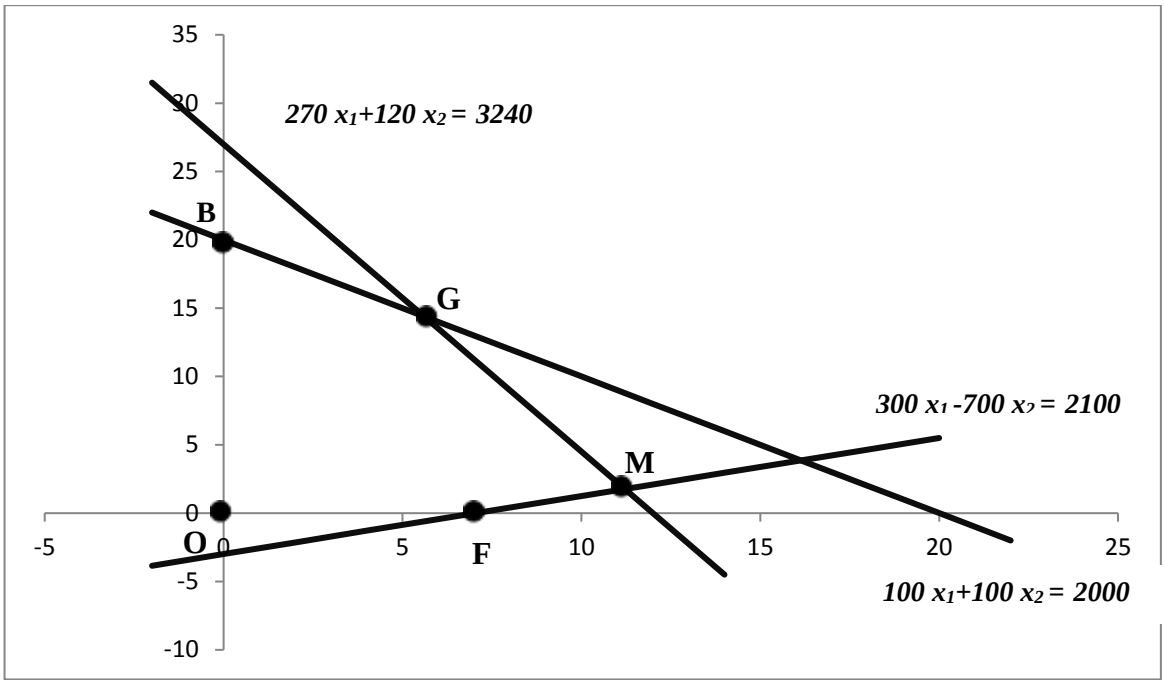
$$x_1, x_2 \geq 0$$

**المطلوب**: **1–** حدد منطقة الحلول المقبولة و إحداثيات النقاط الرأسية لها؛

**2–** حدد قيمة دالة الهدف عند كل نقطة رأسية، ثم أوجد الحل الأمثل؛

**3–** حدد القيود المشبعة و غير المشبعة بيانيا و جبريا.

**التمرين الخامس**: الشكل أدناه يوضح منطقة الحلول المقبولة OBGMF لنموذج برمجة خطية مكون من متغيرتي قرار و 3 قيود وظيفية.




**المطلوب: 1-** انطلاقا من الرسم البياني استنتج قيود النموذج؛

**2-** حدد إحداثيات النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة؛

**3-** تقييم دالة الهدف $Max\ Z=2700\ x_1+1200\ x_2$ عند النقاط الرأسية و تحديد الحل الأمثل.

**التمرين السادس**: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$Min\ Z= 1{,}5\ x_1+ x_2$$

*Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} x_1+ x_2 \le 400 \\ 2x_1+ x_2 \le 600 \\ x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 50 \\ x_2 \ge 50 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$Max\ Z= 1{,}5\ x_1+ x_2$$

*Soumise aux contraintes*

$$\begin{cases} x_1+ x_2 \le 400 \\ 2x_1+ x_2 \le 600 \\ x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 50 \\ x_2 \ge 50 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

**المطلوب: 1-** أكتب النماذج أعلاه على الشكل المعياري؛

**2–** كم حل أساس يمكن أن يقبل كل نموذج؟ أذكرها؛

**3–** حدد حلول الأساس المقبولة للنموذجين؛

**4–** أوجد قيمة دالة الهدف الموافقة لكل حل أساس مقبول، ثم حدد الحل الذي يعطي أمثل قيمة لها؛

5– باستخدام الطريقة البيانية حدد منطقة الحلول المقبولة و حلول الأساس عليها.

**التمرين السابع**: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$Max\ Z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\ 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Max\ Z = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 48 \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z = 120x_1 + 200x_2 + 150x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 20x_1 + 13x_2 + 8x_3 \geq 1500 \\ 25x_1 + 20x_2 + 14x_3 \geq 2150 \\ 10x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 6000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 \leq 500 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 750 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 850 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: **1–** باستخدام طريقة تعداد حلول الأساس، أوجد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية أعلاه؛

**2–** باستخدام الطريقة البيانية حدد منطقة الحلول المقبولة، و حلول الأساس عليها.

**التمرين الثامن**: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$Min\ Z = 600x_1 + 400x_2 + 400x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 60 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z = 80x_1 + 120x_2 + 84x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5x_1 + 15x_2 + 7x_3 \geq 20 \\ 10x_1 + 12x_2 + 21x_3 \geq 15 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 18 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: باستخدام طريقة السمبلكس، أوجد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية أعلاه.

**التمرين التاسع**: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$Max\ Z= 3\ x_1+2\ x_2 +5\ x_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} x_1+2\ x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3\ x_1 +2\ x_3 \leq 460 \\ x_1+4\ x_2 \leq 420 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Max\ Z= 5\ x_1-2\ x_2 +8\ x_3 +6\ x_4 +10\ x_5$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} x_1 \leq 10 \\ 5\ x_1 +5\ x_2 +11\ x_3 \leq 2000 \\ 5\ x_4 +11\ x_5 \leq 1500 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z= 100\ x_1+210\ x_2 +250\ x_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} 10\ x_1+15\ x_2 + 12\ x_3 \leq 2500 \\ 30\ x_1+40\ x_2 + 2x_3 \leq 6200 \\ 2x_1+6\ x_2+ 4x_3 \leq 5000 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Min\ Z= 70\ x_1 - 40\ x_2 - 60\ x_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} 4\ x_1+2\ x_2 +4\ x_3 \leq 100 \\ 2\ x_1+2\ x_2 + x_3 \leq 80 \\ x_1+3\ x_2 +2\ x_3 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: باستخدام طريقة السمبلكس، أوجد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية أعلاه.

**التمرين العاشر**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ Z= 1200\ x_1+1000\ x_2 +3800\ x_3$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$\begin{cases} 6\ x_1+4\ x_2 + 4\ x_3 \geq 1000 \\ 3\ x_1+4\ x_2 + 12\ x_3 \geq 600 \\ 6\ x_1+6\ x_2+ 8\ x_3 \geq 800 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

عند تطبيق طريقة السمبلكس، تم الحصول على جدول السمبلكس أدناه:

| $C_j \rightarrow$ / $\downarrow$ | | | | | | | | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | | |
| | $S_3$ | | | 6 | -1/2 | -1 | | 300 | |
| | $x_2$ | | | 5 | 1/4 | -1/2 | | 50 | |
| | $x_1$ | | | -1/3 | -1/3 | 1/3 | | 400/3 | |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | | | | | | | Z= | |
| $Z = C_j - Z_j$ | | | | | | | | | |

**المطلوب**: **1–** أكمل الجدول أعلاه، و هل يمثل جدول الحل الأمثل؟ و لماذا؟

**2–** قدم الحل الأمثل، ثم حدد القيود المشبعة و غير المشبعة.

**التمرين الحادي عشر**: لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$$Min\ Z = 12x_1 + 26x_2 + 80x_3$$
Soumise aux contraintes
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \geq 40 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$Max\ Z = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 + x_6$$
Soumise aux contraintes
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 50 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_2 \leq 8 \\ 5x_3 + x_4 \leq 12 \\ x_5 + x_6 \geq 5 \\ x_5 + 5x_6 \leq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: **1–** أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأولية المقدمة أعلاه؛

**2–** إذا كانت متغيرات الأساس في الحل الأمثل للنموذج الأول من نوع التدنية هي: $x_1=10, S_1=20, S_2=30$، أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل له باستخدام نظرية الفجوات المكملة؛

**3–** إذا كانت متغيرات الأساس في الحل الأمثل للنموذج الأول من نوع التعظيم هي: $x_1=2, x_2=8, x_4=12, x_5=45/2, x_6=11/2, S_5=23$، أوجد الحل الأمثل للنموذج المقابل له باستخدام نظرية الفجوات المكملة؛

**التمرين الثاني عشر**: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min\ W = 10y_1 + 8y_2 + 7y_3$$
Soumise aux contraintes
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

**المطلوب**: **1–** أوجد أول حل أساس مقبول للنموذج الثنائي أعلاه بإضافة متغيرة اصطناعية واحدة؛

2– بعد محاولة تحسين الحل الأول، تم الحلول على جدول السمبلكس أدناه:

| $C_j \longrightarrow$ | | 10 | 8 | 7 | | | | **B rayon** | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $k_1$ | $k_2$ | $t_1$ | | |
| 8 | $y_1$ | 0 | 1 | 2 | -2 | 1 | -1 | 1 | |
| 10 | $y_2$ | 1 | 0 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | |
| $Z_j = \sum C_j x_j$ | | 10 | 8 | 6 | -6 | -2 | 2 | Z=18 | |
| $Z = C_j - Z_j$ | | 0 | 0 | 1 | 6 | 2 | 9 | | |

**3–** ما هو الحل الأمثل للنموذج الثنائي أعلاه؟

**4–** أوجد النموذج الأصلي، و انطلاقا من جدول الحل الأمثل للنموذج الثنائي قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الأولي؛

**5–** باستخدام نظرية الفجوات المكملة تأكد من الحل الأمثل المتوصل إليه.

# قائمة المراجع


**1–** أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، الطبعة الثانية، 2014.

**2–** اليامين فالتة، **بحوث العمليات**، ايتراك للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2006.

**3–** بوسهمين أحمد، طافر زهير، **فعالية استخدام أسلوب البرمجة الخطية في مؤسسة الأعمال**، ورقة بحثية مقدمة إلى الملتقى الوطني السادس حول الأساليب الكمية و دورها في اتخاذ القرارات الإدارية، يومي 23-24 نوفمبر 2008، جامعة 20 أوت 1955، سكيكدة.

**4–** جلال إبراهيم العبد، **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2014.

**5–** حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مدخل إلى بحوث العمليات**، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007.

**6–** سالم إلياس،مطبوعة بعنوان: **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة**، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، 2016-2017.

**7–** سهيلة عبد الله سعيد، **الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات**، دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2007.

**8–** صوار يوسف، طاوش قندوسي، **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B–** كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر.

**9–** عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، محمد أحمد العش، **البرمجة الخطية**، مطبعة جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى، المملكة العربية السعودية، 1990.

**10–** عبد الرزاق الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية.

**11–** عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، **أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)**، دار القلم للنشر، الإمارات.

**12–** علي حازم الياامور، **استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود**، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء و المعلوماتية، 6-7 ديسمبر 2009، كلية علوم الحاسبات و الرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

**13–** محمد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.

**14–** محمد عبد العال النعيمي و آخرون، **بحوث العمليات**، دار وائل للنشر،عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.

**15–** مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، **بحوث العمليات و فاعلية القرارات**، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997.

**16–** مكيد علي، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية "نظرية الشبكات و مسائل النقل و التخصيص"**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.

**17–** منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات–مدخل علمي لاتخاذ القرارات–**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009.

**18–** يحياوي إلهام، **محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير،جامعة الحاج لخضر، باتنة، دون سنة النشر.