وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أبو بكر بلقايد – تلمسان –
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية والتسيير والعلوم المالية
قسم علوم التسيير

مط بوعة في مقياس

رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية ليسانس

سنة ثانية علوم التسيير

من إعداد:

د. حليمي وهيبة

.

الموسم الجامعي: 2022/2021

فهرس المحتويات

الموضوع:

مقدمة

I. البرمجة الخطيـة

1. صياغة نمـاذج البرمجة الخطية.....

2. حل نماذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانيـة .....

3. الطريقة الجبرية لحل نماذج البرمجة الخطية.....

4. حل نماذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس .....

5. النموذج الثنائي و تحليل الحساسية.....

II. مسائل النقل.....

1. صياغة مسائل النقل.....

2. حل مسائل النقل .....

III. مدخل للبرمجة الغير خطية.....

قائمة المراجع .....

مدخل للبرمجة الخطية

*** مقدمة:**

تعتبر البرمجة الخطية من بين الأساليب الرياضية المساعدة على اتخاذ القرار، والتي يطلق عليها مجتمعة بحوث العمليات، وتعود بدايات تطبيقها إلى ما قدمه الاقتصادي ويسلي ليونتيف (W. Leyontife) أثناء الركود الاقتصادي في الثلاثينيات من هذا القرن من خلال تحليل العلاقة بين المدخلات والمخرجات باستخدام نماذج المدخلات والمخرجات، وإلى ما قدمه العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (J.B. Fourier) عام 1923، في حين اهتم العالم الرياضي الروسي كاتوروفتش (L.V. Katorovich) في استخدام علم الرياضيات لحل مشاكل التخطيط عام 1939، وقام الاقتصادي جورج ستجلر (G.Stigler) في بداية الأربعينيات بمحاولة تطبيق البرمجة الخطية، والذي لم يتوصل إلى وسيلة حل معروفة حينها، كان هدفه تحديد مكونات الغذاء اليومي، وهي مشكلة تتعلق بإيجاد مزيج غذائي أمثل يتضمن كميات من الحديد والفيتامينات والمواد الأخرى، بأقل تكلفة ممكنة.

*** تمهيد:**

لقد ظهرت بوادر تطبيق البرمجة الخطية لأول مرة عام 1951 في أعمال العالمين الرياضيين دنتزك وكوبمانس (G.B.Dentzig & T.C. Coopmans)، وسمي هذا الأسلوب بالبرمجة (programming)، لأنه يهتم بالبحث عن البرنامج (program) الذي يحقق الهدف المطلوب من بين عدد كبير من البرامج المتاحة، أما صفة الخطية فإنها تعني أن جميع العلاقات التي تربط بين مختلف عناصر النموذج الرياضي للمشكلة المدروسة هي علاقات خطية.

I. البرمجة الخطية:

1- تعريف البرمجة الخطية:

يمكن تعريفها على أنها تلك الطريقة أو الأسلوب الرياضي الذي يستخدم للمساعدة في التخطيط واتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة، وذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف. حيث تبحث في توزيع الموارد المحدودة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والشروط المفروضة، وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمات الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم (maximize) قيمة دالة الهدف، كما هو الحال في تعظيم العوائد النقدية المتوقعة من خطة الإنتاج المقترحة، وقد يتعلق الأمر بتدنية (minimize) دالة الهدف، كما هو الحال في تدنية التكاليف المترتبة عن تنفيذ العمليات الإنتاجية.

عموما يمكن القول أن البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يمكن توظيفه لتوزيع الموارد والإمكانات المحدودة ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة وصولا إلى تحقيق مثالية التوزيع. وهي أيضا ذلك الأسلوب الرياضي الذي يستهدف الوصول إلى تحقيق الأمثلية والذي يتم بموجبه تخصيص الموارد المحدودة من أجل تحقيق الهدف المحدد.

2- استخدامات البرمجة الخطية:

يستخدم نموذج البرمجة الخطية بشكل واسع لحل المشكلات التي توجه منظمات الأعمال في مجالات كثيرة، نذكر منها الأمثلة التالية:

* في حالة التعظيم: تعظيم الأرباح

تعظيم الإنتاج

تعظيم طاقات التخزين

تعظيم استخدام رؤوس الأموال

تعظيم استخدام اليد العاملة

* في حالة التدنية: تدنية التكاليف

تدنية الخسائر

تدنية عدد الموظفين

تدنية الأجور الإجمالية

بالرغم من كل المزايا التي يتصف بها أسلوب البرمجة الخطية، إلا أن هناك بعض الانتقادات التي توجه له من الناحية التحليلية، نذكر:

* لا يأخذ أسلوب البرمجة الخطية بعين الاعتبار حالات عدم التأكد في الحياة الصناعية والتجارية، كونه يفترض أن جميع العلاقات بين المتغيرات معروضة ومؤكدة الحدوث.

* يتطلب أسلوب البرمجة الخطية في التحليل كمية من المعلومات التي قد يصعب الحصول عليها في المنشآت الصغيرة والمتوسطة الحجم في الظروف الاعتيادية.

* إن أغلب العلاقات بين المتغيرات في الحياة العملية هي علاقات ذات طبيعة غير خطية، مما يتعذر تطبيق أسلوب البرمجة الخطية كونه يتميز بصفة الخطية.

* عدم اهتمام هذا الأسلوب بالمتغيرات الوصفية (المتغيرات التي لا يمكن قياسها كميا)، والتي قد يكون لها تأثير كبير في صنع القرارات.

* يتعذر تطبيق هذا الأسلوب في حل المشكلات المعقدة والتي تحتوي على كم كبير من المتغيرات حلا يدويا، مما يتطلب استخدام برمجيات الحاسوب لحلها.

3- افتراضات نموذج البرمجة الخطية:

الافتراضات وهي الشروط العلمية الأساسية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية.

لكي تكون نتائج تطبيق نموذج البرمجة الخطية صادقة وموثوق بها من الناحيتين العلمية والعملية، ينبغي توفر بعض الشروط الأساسية في صياغة (بناء) النموذج، يطلق على هذا الشرط بافتراضات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، نذكر:

✍ الخطية Linearity

يجب أن تكون العلاقة بين متغيرات دالة الهدف وقيود النموذج ذات طبيعة خطية، أي أن حدوث أي تغيرات في قيمة أحد المتغيرات تؤدي إلى تغيرات ثابتة ومتناسبة في قيمة المتغيرات الأخرى، الداخلة في النموذج.

✍ التأكد Certainty

يجب أن تكون معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف وقيود النموذج معروفة وثابتة أثناء فترة معالجة المشكلة المدروسة.

✍ التناسبية Proportionality

يجب أن تكون مساهمة العوامل في دالة الهدف والكميات المستخدمة من الموارد في القيود متناسبة مع قيمة كل متغير من المتغيرات القرارية.

✍ الإضافية

كل نشاط يتم إضافته يتحد مع مجموعة قيود النموذج، أي عدم وجود تداخل بين الأنشطة المختلفة.

✍ قابلية القسمة

يشير هذا الافتراض إلى إمكانية أن تأخذ بعض المتغيرات القرارية قيما كسرية وليس بالضرورة أن يتم التعبير عن جميع المتغيرات بأعداد صحيحة.

✍ عدم السلبية

أن تكون قيم المتغيرات القرارية موجبة (x_j, y_o) وهذا يعني أنه ليس من المعقول أن يتم إنتاج عدد سالب من الحافلات أو الطائرات.

4- صياغة نموذج البرمجة الخطية:

عامة يتم صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية على الشكل التالي:

Optimize $Z= f(x_1, x_2,\ldots.x_n)$

$$\text{Subject to} \quad \left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \ldots . x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots . x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots . x_n) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right. \qquad (1.1)$$

east of the m contr relationship in (1.1) invloves one of the three sings $\geq,=,\leq$. Unconstrained mathematical programs are conved by the f (1.1), if each function g_i is chosen as zero, and each constent b_i is chosen as zero.

تكون القيود دائما في شكل معادلات أو متراجحات $\geq،=،\leq$، و $b_1,\ldots b_m$ تكون أعداد ثابتة.

نقول عن النموذج الرياضي (1.1) أنه خطي إذا وفقط إذا كانت دالة الهدف $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ والقيود $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)/\ (i= 1,2,..,n)$ كانتا خطيتان وتتخذان الصيغ التالية:

$$F(x_1,x_2,\ldots, x_n)= c_1x_1+c_2x_x+\ldots+c_nx_n \qquad (1.2)$$

$$G_i(x_1,x_2,\ldots x_n)= a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_{in} \qquad (1.3)$$

$i=1,2,..,m$

$j=1,2,..,n$

حيث c_j و a_{ij} هي ثوابت معلومة.

إذن الآن يمكن كتابة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية على الشكل التالي:

الخطوة 01: تحديد الهدف والتعبير عنه بصيغة رياضية.

الخطوة 02: تحديد جميع القيود والتعبير عنها رياضيا.

الخطوة 03: البحث عن أي شروط مخفية، والتي لم يتم التعبير عنها بشكل صريح كشروط عدم السلبية أو شروط الأرقام التامة لمتغيرات القرار.

يصاغ النموذج كما يلي:

Optimize $Z= c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_nx_n$

Subject to $a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n\ (\leq,=\geq)\ b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n\ (\leq,=\geq)\ b_2$

$\vdots$

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+\ldots+a_{in}x_n\ (\leq,=\geq)\ b_i$

$\vdots$

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n\ (\leq,=\geq)\ b_m$

شروط عدم السلبية:

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ldots,\ x_n\geq 0$$

$x_1,x_2,..,x_n$ متغيرات القرار (المجهولة القيمة)

$c_1,c_2,..,c_n$ معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف

$a_{11},a_{12},..,a_{mn}$ معاملات متغيرات القرار (والمسماة عادة المعاملات التقنية) في مختلف القيود، وتمثل a_{ij} كمية المورد i المطلوب لتوفير وحدة من x_j.

$b_1,b_2,..,b_m$ هي الحدود الثانية للقيود وتمثل عامة الكميات المختلفة المتاحة.

إن البحث عن التسمية المثالية للدالة z (تعظيم أو تدنية) هو تحديد قيم مختلف متغيرات القرار x_j وهذا باحترام القيود (التي تسمى القيود التقنية أو الوظيفية).

c_j,b_i,a_{ij} هي كميات معروفة ومعطاة (يطلق عليها أيضا اسم المعايير).

*ملاحظة: أي نموذج رياضي لا يحترم الشكل السابق (ولو شرط واحد) يعتبر نموذجا غير خطي.

نذكر بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

– النمذجة بالأرقام التامة: وهي نمذجة خطية ولكن بتحفظ أو قيد إضافي، وهو أن مدخلات النموذج يجب أن تكون تامة بغض النظر عن المعاملات التقنية والمعاملات للمتغيرات في دالة الهدف أي (c_j,a_{ij}).

– النمذجة (الرنامج الربيعي): هي برمجة رياضية تكون فيها القيود خطية بينما دالة الهدف تأخذ الشكل التالي:

$$F(x_1,x_2,..,x_n)= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n} d_{ij}x_j$$

حيث d_j ,c_{ij} هي قيمة معلومة وثابتة.

مع: $d_1=d_2=0$

$C_{11}=1$

$C_{22}=0$

$C_{12}=c_{11}=0$

مثال: المؤسسة REMCO

تنتج نوع من الآلات الالكترونية، نميز بين النموذج الاقتصادي والنموذج الرفاهي، النموذجين يتطلبان المرور بثلاث أقسام للتوصيل للشكل النهائي.

نسمي النموذج الاقتصادي النموذج I والنموذج الرفاهي II.

في القسم A:

يتطلب النموذج I، 2سا من اليد العاملة، بينما النموذج II يتطلب 26سا.

في القسم B:

يتطلب النموذج I، 3.1سا والنموذج الثاني 3.8سا للوحدة الواحدة.

ساعات العمل المتاحة في الأقسام الثلاث (للأسبوع الواحد):

القسم A: 254سا

القسم B: 280سا

القسم C: 380سا

بالنسبة للنموذجين معا يجب بعد تجميعهما أن يمرا بقسم المراقبة والمراجعة، حيث يمكن مراجعة 110 وحدة في الأسبوع الواحد من أحد النموذجين.

تكاليف الإنتاج على الشكل:

	النموذج الاقتصادي	النموذج الرفاهي
المادة الأولية	72 ون	98 ون
اليد العاملة المباشرة	58 ون	65 ون
المراقبة	25 ون	32 ون

يوضح الجدول التالي التكاليف المتغيرة بالنسبة لكل نموذج:

	النموذج الاقتصادي	النموذج الرفاهي
التجميع	16 ون	28 ون
مراقبة النموذج الاقتصادي	6 ون	-
مراقبة النموذج الرفاهي	-	9 ون

سعر الوحدة الواحدة من النموذج الاقتصادي هو 239 ون، والنموذج الرفاهي 330 ون.

لتلبية احتياجات السوق من الواجب على المؤسسة تجميع 40 وحدة في الأسبوع من النموذج الاقتصادي وعلى الأقل 35 وحدة في الأسبوع من النموذج الرفاهي. عند كون المؤسسة متأكدة من بيع كل إنتاجها من النموذج الاقتصادي فإن قسم المبيعات يتوقع أن لا تتجاوز المبيعات من النموذج الرفاهي 60 وحدة في الأسبوع.

نفترض أيضا لا يوجد أي تحفظات حول التموين بالمركبات الداخلة في تكوين النموذجين معا.

ترغب المؤسسة في تحديد نموذج للإنتاج الأسبوعي، والذي يسمح لها بتعظيم أرباحها وهذا باحترام الشروط السابقة كلها.

الحل:

1- متغيرات القرار:

- ما هي المتغيرات المجهولة لمشكل البرمجة لهذه المؤسسة؟

- الكمية الواجب إنتاجها في الأسبوع الواحد بالنسبة للنموذجين

- كم عدد المتغيرات؟

- متغيرين اثنين فقط، بما أن المؤسسة تصنع نموذجين فقط.

إذن نسمي:

x_1 عدد الوحدات المصنعة في الأسبوع الواحد من النموذج الاقتصادي.

x_2 عدد الوحدات المصنعة في الأسبوع الواحد من النموذج الرفاهي.

2- القيود:

- ما هي التحفظات على التصنيع داخل هذه المؤسسة؟

يجب تحديد موارد المؤسسة: هناك موردين أساسيين يخصان:

* الوقت المتاح بالنسبة للأقسام الثلاث

* قدرة المراقبة لدى قسم الرقابة

إذن هناك 4 قيود بالنسبة لكل قسم.

- هل هناك تحفظات أخرى؟

نعم تلك الخاصة باحتياجات السوق:

* الطلب الأدنى بالنسبة لكل نموذج.

* البيع الأقصى للنموذج الرفاهي.

إذن هناك 3 قيود إضافية، وعليه يجب صياغة 7 قيود.

° بالنسبة لساعات العمل:

	النموذج II	النموذج I	(الأسبوع/سا) المتاح
القسم A	2	2.6	254
القسم B	3.5	1.8	280
القسم C	2.5	3.8	380

القسم A: $2x_1 + 2.6x_2 \leq 254$

القسم B: $3.5x_1 + 1.8x_2 \leq 280$

القسم C: $2.5x_1 + 3.8x_2 \leq 380$

° بالنسبة لطاقة الرقابة:

قسم الرقابة: الأسبوع/الوحدة $x_1 + x_2 \leq 110$

5- طرق حل نموذج البرمجة الخطية:

هناك عدة طرق لحل نموذج البرمجة الخطية، يتوقف استخدام أي من هذه الطرق على طبيعة المشكل وحجمه، نذكر من بين هذه الطرق:

➢ **الطريقة الأولى: الطريقة البيانية**

تصلح هذه الطريقة للوصول إلى الحل الأمثل للنماذج التي تحتوي على متغيرين قراريين فقط، أي x_1 و x_2، حيث يجب إتباع الخطوات التالية:

1- كتابة قيود النموذج على هيئة معادلات بدلا من المتباينات بدون إضافة أي شيء.

2- التمثيل البياني لهذه المعادلات أي القيود على نفس المعلم.

3- تحديد منطقة الحل الممكن.

4- تعويض قيم إحداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z.

5- اختيار نقطة الحل الأمثل.

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية:

$$\text{Max} \quad Z= 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{Sub to} \quad 2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

1- كتابة المتراجحات على شكل معادلات:

القيد الأول: $2x_1 + 3x_2 = 30$

القيد الثاني: $5x_1 + 4x_2 = 60$

2- التمثيل البياني: نعتبر القيد الأول هو($_1$) والقيد الثاني هو ($_2$) نختار قيم مساعدة لتمثيلهما:

بالنسبة لـ: ($_1$):

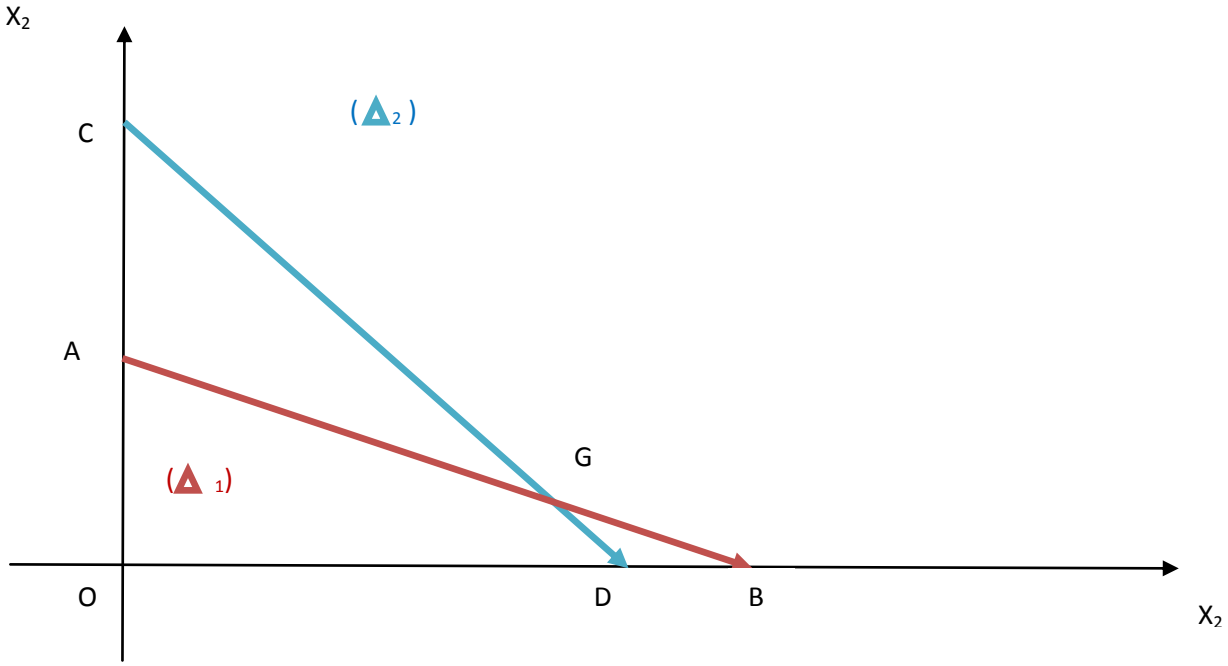
النقطة الأولى: $x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 30 \Rightarrow x_2 = 10 \Rightarrow A(0.10)$

النقطة الثانية: $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 30 \Rightarrow x_2 = 15 \Rightarrow B(15.0)$

بالنسبة لـ: ($_2$):

النقطة الأولى: $x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 15 \Rightarrow C(0.15)$

النقطة الثانية: $x_2 = 0 \Rightarrow 5x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 12 \Rightarrow D(12.0)$


X2
C
(Δ2)
A
G
(Δ1)
O
D
B
X2

من الشكل منطقة الحل الممكن هي المساحة المحدودة بالنقاط (G.D.O.A).

حيث نعلم أن: $O(0.0)$, $A(0.10)$, $D(12.0)$

أما النقطة G يجب حل جملة معادلة القيدين (نقطة تقاطعهما) لإيجاد إحداثياتها، أي:

$$2x_1 + 3x_2 = 30 \ldots.(1)$$

$$5x_1 + 4x_2 = 60$$

الحل يكون بالتعويض أو بالطرح:

$$(2x_1 + 3x_2 = 30)*5 \ldots(1)$$

$$(5x_1 + 4x_2 = 60)*2$$

$$10x_1 + 15x_2 = 150$$

بالطرح: $$(10x_1 + 8x_2 = 120)$$

$$0x_1 + 7x_2 = 30 \Rightarrow (x_2 = 4.3)$$

تعوض قيمة x_2 في المعادلة ($_1$):

$$2x_1 + 3(4.3) = 30 \Rightarrow 2x_1 + 12.9 = 30$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 17.1$$

$$\Rightarrow x_1 = 8.6$$

إذن: $G(8.6 ; 4.3)$

لتحديد الحل الأمثل نقوم بالاستعانة بالجدول التالي:

نقاط الحدود	الإحداثيات		$Z= 5x_1 + 6x_2$	Max Z
	x_1	x_2		
O	0	0	0	/
A	0	10	60	/
G	8.6	4.3	68.8	68.8*
D	12	0	60	/

وعليه يكون الحل الأمثل لهذا النموذج على النحو التالي:

$(x_1 =8.6 \ , \ x_2 =4.3 \ , \ Z^* =68.8)$

تمرين:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطي التالي بيانيا.

$$\text{Max } Z= 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ملاحظة:

إن مشكلات البرمجة الخطية لا تملك دائما حلا أمثل وحيد، هناك بعض المشكلات تشكل ما يسمى بالحالات الخاصة نذكر منها:

* قد تملك بعض المشكلات منطقة حلول غير محدودة وهي نادرة الحدوث (لكنها موجودة).

* نتحدث عن الحلول المنحلة (المفككة) إذا كانت قيمة أحد المتغيرات الأساسية وأغلبها مساوية للصفر، فيصبح عدد المتغيرات الأساسية أقل من عدد القيود.

* حالة عدم وجود حلول مقبولة تحدث عندما تكون قيود المشكلة متعارضة (متعاكسة) ولا تشكل منطقة مشتركة بسبب عدم تقاطعها.

* حالة تعدد الحلول المثلى تحدث عندما يكون أحد قيود النموذج موازيا للدالة الهدف Z أو منطبقا عليها (لديهما نفس المعادلة).

* حالة وجود قيود فائضة في النموذج وليس لها أهمية أو أي تأثير يذكر على منطقة الحل الممكن للمشكلة ولمعالجة هذا النوع من المشكلات على متخذ القرار حذف القيد أو القيود التي يراها غير ضرورية في النموذج وليس لها تأثير في منطقة الحل الممكن.

➢ **الطريقة الثانية: الطريقة الجبرية**

هي إحدى الطرق الجبرية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري للقيم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقا إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم، تستخدم هذه الطريقة عند احتواء النموذج على متغيرين فقط هما x_1 و x_2.

تقضي هذه الطريقة إتباع الخطوات التالية:

* تصنيف متغيرات النموذج الرياضي إلى نوعين هما:

1- المتغيرات الأساسية: وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكل، وتكون قيمها أكبر تماما من الصفر $x_j y_o$.

2- المتغيرات الغير أساسية: والتي ليس لها دور مهم في المشكل، وتكون قيمها مساوية للصفر دائما $x_j=0$.

* تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية:

وذلك باستخدام المتغيرات الراكدة (الفائض والفرق) في دالة الهدف والقيود كما يلي:

اتجاه القيد	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في القيود	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف	
		Max Z	Min Z
أصغر أو يساوي $\leq$	$+x_i$	$+0x_i$	$+0x_i$
أكبر أو يساوي $\geq$	$-x_i$	$-0x_i$	$-0x_i$
يساوي =	/	/	/

* استخدام جدول يتضمن المتغيرات الأساسية والغير أساسية لغرض الوصول إلى الحل الأمثل للمشكل بموجب الطريقة الجبرية:

مثال:

باستخدام الطريقة الجبرية، حل النموذج التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{Sub to } 2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

1- تحويل النموذج للصيغة المعيارية:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{Sub to } 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$5x_1 + 4x_2 + x_4 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2- تحديد عدد الطرق الممكنة لاختيار متغيرين من 4 متغيرات وفقا للصيغة الآتية:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!(4-2)} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!} = 6$$

$\{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$

3- الجدول:

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات الغير أساسية	المتغيرات الأساسية	دالة الهدف	Max Z
	$x_j=0$ $x_i=0$	$x_j>0$ $x_i>0$	$Z=5x_1+6x_2+0x_3+0x_4$	
1	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_3=30$ $x_4=60$	0	
2	$x_1=0$ $x_3=0$	$x_2=10$ $x_4=20$	60	
3	$x_1=0$ $x_4=0$	$x_2=15$ ($x_3=-15$)	تهمل 90	
4	$x_2=0$ $x_3=0$	$x_1=15$ ($x_4=-15$)	تهمل 75	
5	$x_2=0$ $x_4=0$	$x_1=12$ $x_3=6$	60	
6	$x_3=0$ $x_4=0$	$x_1=8.6$ $x_2=4.3$	68.8	68.8*

مثال:

أوجد الحل لهذا النموذج جبريا:

$$\text{Max } Z= 18x_1+30x_2$$

$$\text{Sub to } \quad x_1+2x_2 \leq 200$$

$$3x_1+2x_2 \leq 300$$

$$x_1 \leq 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

6- طرق حل البرمجة الخطية:

قبل التطرق إلى طرق حل نموذج البرمجة الخطية يجب أولا إعادة صياغة النموذج لتحويله من صيغته القانونية إلى صيغته النظامية.

6.1- الصيغة النظامية (القياسية أو المعيارية):

يتم التحصل على هذه الصيغة بإتباع الخطوات التالية:

1- يجب تحويل جميع القيود من شكل المتراجحة إلى شكل المعادلة عن طريق إضافة متغيرات الفرق (في حالة التعظيم)، أو طرح متغيرات الفائض (في حالة التدنية)، تضاف هذه المتغيرات إلى الجانب الأيسر من المتراجحة، حيث يمثل متغير الفرق ما يسمى بنفايات تلك المرحلة من النظام المتمثلة بذلك القيد، بينما يمثل متغير الفائض فائض المدخلات في تلك المرحلة من النظام المتمثلة بهذا القيد.

2- إضافة نفس تلك المتغيرات إلى دالة الهدف Z بمعاملات معدومة.

3- إدماج نفس هذه المتغيرات في شروط عدم السلبية إلى جانب متغيرات القرار.

مثال:

نعتبر نموذج البرمجة الخطي التالي، المطلوب هو كتابة الصيغة المعيارية لهذا النموذج:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 20x_2$$

$$\text{Sub to } 2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60 \qquad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{Sub to } 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$5x_1+4x_2+x_4=60$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$$

6.2- حل المشكلات باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التدنية Min:

إن حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التدنية، أي عندما تكون القيود بصيغة أكبر أو تساوي ($\geq$) أو (=) في حالات خاصة جدا يتم بواسطة إحدى الطريقتين:

❋ طريقة M الكبيرة (big M):

بموجب هذه الطريقة يتم إضافة متغيرات اصطناعية إضافة لمتغيرات الفرق أو الفائض إلى قيود نموذج البرمجة الخطية وإلى دالة الهدف على أن تقترن المتغيرات الاصطناعية y_i في دالة الهدف بمعاملات كبيرة جدا تدعى (M)، وتحمل هذه المعاملات إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التقليل أو التدنية، وإشارة سالبة في حالة التعظيم، ولإيجاد الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية بعد إضافة متغيرات الفرق أو الفائض، إلى القيود ودالة الهدف، ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية y_i إلى القيود ودالة الهدف أيضا.

2- صياغة دالة الهدف الجديدة Z بدلالة المتغيرات الأساسية والفرق أو الفائض بعد تعويض قيم y_i بما يساويها من المتغيرات السابقة الذكر، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة M فقط.

3- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن.

4- الحل باستخدام الطريقة المبسطة كما في حالة التعظيم.

5- في حالة التدنية للوصول للحل الأمثل يجب أن تكون جميع $o\leq b_j$ في جدول الحل.

مثال:

نعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min } Z= 2x_1+x_2$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1+3x_2 \geq 30 \\ 4x_1+2x_2 \geq 40 \end{cases}$$

$$x_1,x_2 \geq 0$$

الحل:

* تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، كالآتي:

$$\text{Min } Z= 2x_1+x_2-0x_3-0x_4$$

$$\text{Sub to } x_1+3x_2-x_3=30$$

$$4x_1+2x_2-x_4=40$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

يتضح من القيدين السابقين باعتماد الحل الابتدائي، أي:

$$x_1=x_2=0$$

نجد أن: $x_3=-30$ و $x_4=-40$ مما يتعارض و شرط عدم السلبية، لمعالجة هذا الموضوع يتم إضافة المتغيرات الاصطناعية لكل من القيود ودالة الهدف Z.

يتم إضافة المتغيرات y_i كما يلي:

$$\text{Min } Z= 2x_1+x_2-0x_3-0x_4+My_1+My_2$$

$$\text{sub to } x_1+3x_2-x_3+y^1=30....(1)$$

$$4x_1+2x_2-x_4+y_2=40....(2)$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4,y_1,y_2 \geq 0$$

مع M: عدد كبير جدا

* إعادة صياغة دالة الهدف Z بدلالة المتغيرات القرارية ومتغيرات الفائض فقط كما يلي:

ß		b	c_j 2	1	0	0	M	M	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	M	30	1	$(3)_{pivo}$	-1	0	1	0	30/3=10
y_2	M	40	$(4)_{pivo}$	2	0	-1	0	1	4/2=10
$\Delta_j= Z_j - C_j$		70M	5M-2	5M-1	-M	-M	0	0	

* **تطبيق طريقة simplex:**

اختيار أكبر Δ_j (المتغير الداخل x_2 والخارج y_1).

ß		b	c_j						O
			x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_2	1	10	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10(1/3)=30
y_2	M	20	(10/3)	0	2/3	-1	2/3	1	20(3/10)=6
$_j= Z_j - \Delta C_j$		+20M+10	1	0	2	-M	-	0	

ß		b	c_j						O
			x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_2	1	8	0	1	$-13/30 = \frac{-2}{5}$	1/10	2/5	-1/10	
x_1	2	6	1	0	$\frac{1}{5} = 2/10$	-3/10	-1/5	3/10	
$\Delta_j = Z_j - C_j$		20+	0	0	0	-1/2	-M	(1/2 – M)	

نقول بما أن جميع المعاملات في صف Δ_j إما أصغر أو تساوي الصفر ($\Delta_j \leq 0$)، فإننا قد توصلنا إلى الحل الأمثل للنموذج والذي يكون فيه.

$$x_1=6 \ , \ x_2=8, \ Z^*=20$$

مثال:

حل النموذج التالي باستخدام طريقة M الكبيرة:

$$\text{Min } Z= 20x_1+15x_2$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} 2x_1+3x_2 \geq 10 \\ 4x_1 \geq 10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- **طريقة الحل عبر مرحلتين:**

تعد هذه الطريقة أبسط من طريقة big m في حل نماذج البرمجة الخطية في حالة التدنية، إذ يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج بعد أن تتأكد بأن هناك حل للنموذج وذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديد (r) مساوية للصفر (r=0) وبعد فلا وجود للحل.

3- الطريقة الثالثة: الطريقة المبسطة simplex méthode

تعتبر هذه الطريقة أسلوب رياضي متقدم في حل مشكلات البرمجة الخطية، كونها تعالج المشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر) على عكس كل من الطريقتين السابقتين.

يتم إيجاد حل مشكلات البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة وفقا لثلاث مراحل أساسية هي كما يلي:

*المرحلة الأولى: إيجاد الحل الأساسي الممكن (الإبتدائي أو الأولي).

*المرحلة الثانية: تحسين الحل الأساسي للحصول على الحل الأفضل (best solution).

*المرحلة الثالثة: تحسين الحل الأساسي للحصول على الحل الأمثل (optimal solution).

وقد يتم الوصول إلى الحل الأمثل بخطوة واحدة أو عدد من الخطوات.

3.1- حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التعظيم Max:

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب الطريقة المبسطة، نتبع الخطوات الآتية:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية (النمطية المعيارية)، بعد إدخال متغيرات الفرق أو الفائض إلى كل من دالة الهدف Zوقيود النموذج.

2- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن.

3- تحديد المتغير الداخل على أساس أكبر قيمة ($\Delta_j = c_j - Z_j$) (العمود المحوري).

4- تحديد المتغير الخارج عن طريق قسمة قيم الموارد المتاحة على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من خوارج القسمة في عمود النسبة يعد هو المتغير الخارج، ليحل محل المتغير الداخل.

5- العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري (عمود الدوران).

6- الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري (صف الدوران).

* **تصميم جدول الحل الأساسي (الابتدائي):**

ß		b	5	6	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	30	2	(3)	1	0	30/3=10 Min
x_4	0	60	5	4	0	1	60/4=15
$\Delta_j = Z_j - C_j$		0	5	6 max	0	0	

ß: المتغيرات الاصطناعية

C_b: معاملات المتغيرات التكميلية في دالة الهدف Z.

B_i: الموارد المتاحة

C_j: معاملات المتغيرات في دالة الهدف

في حالة: Max ← $\Delta_j = c_j - Z_j$

Min ← $\Delta_j = Z_j - c_j$

في المحور الأفقي Δ_j نختار أكبر قيمة موجبة.

في المحور العمودي O نختار أصغر قيمة.

كيف يحسب Δ_j:

$$\Delta_{jx1} = C_{jx1} - Z_{jx1} = 5 - [(2*0)+5(0)] = 5 - 0 = 5$$

$$\Delta_{jx2} = C_{jx2} - Z_{jx2} = 6 - [(3*0)+(4*0)] = 6 - 0 = 6$$

$$\Delta_{jx3} = C_{jx3} - Z_{jx3} = 0 - [1(0)+0(0)] = 0$$

$$\Delta_{jx4} = C_{jx4} - Z_{jx4} = 0 - [0(0)+1(0)] = 0$$

3- المتغير الداخلي هو x2، المقابل لأقصى قيمة في دالة الهدف.

4- المتغير الداخلي هو x3، المقابل لأدنى قيمة في عمود O.

ملاحظة: في عمود النسب يتم إهمال القيم السالبة أو∞.

5- تحويل العمود الذي يحتوي على محور الدوران إلى عمود وحدي وملئ بقية المصفوفة على هذا الأساس.

6- العنصر الذي يقع في التقاطع بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج يسمى بمحور الدوران (العنصر المحوري).

7- يتم الحصول على المعادلة المحورية من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على محور الدوران (العنصر المحوري).

8- لغرض تحسين الحل الممكن والحصول على الحل الأفضل نتبع الآتي:

أ- إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة كالآتي:

معاملاتZ_i الجديدة = معاملات Z القديمة – معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية.

ب- إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات كالآتي:

معاملات x_i الجديدة = معاملات x_i القديمة – معامل المتغير الداخل في صف x_i * المعادلة المحورية.

9- يمكن الحصول على الحل الأمثل لمشكلة التعظيم عندما تكون جميع معاملات الصف Δ_j أصغر أو تساوي الصفر.

مثال: باستخدام الطريقة المبسطة حل نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z= 5x_1+6x_2$$

$$\text{Sub to} \quad 2x_1+3x_2 \leq 30$$

$$5x_1+4x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

* الخطوة الأولى:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى صيغته المعيارية:

$$\text{Max } Z= 5x_1+6x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{Sub to } 2x_1+3x_2+x_3=30$$

$$5x_1+4x_2+x_4=60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

ß		b	5	6	0	0	O
			x1	x2	x3	x4	
x2	6	c 10	a(2/3)	1	1/3	c 0	10(2/3)=15
x4	0	f 20	b(7/3)	0	g- 4/3	d 1	20/7/3=60/7=8.5 min
$\Delta_j= Z_j - C_j$		h - 60	1 max	0	j -2	k 0	

قسمة السطر كاملا على محور الدوران: a=2/3

c=0/3=0

e=30/3=10

f=60-4(30)/3=60-40=20

b=5-2(4)/3=5-8/3=15-8/3=7/3

d=1-(0*4)/3=1

g=0-1(4)/3=4/3

h=0-(6*30)/3=-60

i=5-(6*2)/3=1

j=0-(1*6)/3=-2

k=0-(0*6)/3=0

2- لغرض تحسين الحل الممكن والحصول على الحل الأفضل نتبع الخطوات الآتية:

أ- إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة: معاملات Z القديمة – معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف جداء المعادلة المحورية.

ب- إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات: معاملات x_i الجديدة= معاملات x_i القديمة – معامل المتغير الداخل في صف x_i جداء المعادلة المحورية.

3- نتحدث عن الوصول للحل الأمثل لمشكلة التعظيم عندما تصبح جميع قيم Δ_j سالبة أو مساوية للصفر.

ß		b_i	5	6	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	6	4.28	0	1	5/7	-2/7	
x_1	5	8.5	1	0	-4/7=-12/21	3/7	

$\Delta_j = Z_j - C_j$	-68.6	0	0	-10/7	-3/7	

a=10-(2/3)(20)3/7=10-40/7=70-40/7=30/7=4.28

b=1/3-(2/3)(-4/3)3/7=1/3+8/21=15/21=5/7

c=0-(1)(2/3)3/7=-2/7

f=-60-(1)(20)3/7=-60-60/7=-480/7=-68.5

d=-2-(-4/3)(1)3/7=-2+4/7=-14+4/7=-10/7

e=0-(1)(1)3/7=-3/7

بما أن جميع قيم Δ_j إما سالبة أو معدومة، نتوقف هنا ويصبح الحل الأمثل هو:

x_2=4.28=30/7

x_1=8.5=60/7

x_3=0x4=0

Z=6(30/7)+5(60/7)

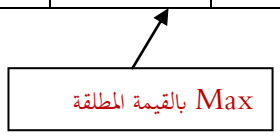
=480/7=68.5

Z=68.5

4- تصميم جدول الحل الأساسي (الابتدائي):

متغيرات الفرق أو الفائض	المتغيرات				الثوابت b_i	النسبة B_i/x_2
	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	2	$(3)_{pivo}$	1	0	30	$(30/3=10)$ Min
x_4	5	4	0	1	60	60/4=15

	0	0	0	-6	-5	Z



(3): محور الدوران (العنصر المحوري)

5- المتغير الداخل هو x_2 المقابل لأقصى قيمة في دالة الهدف بالقيمة المطلقة (6).

6- المتغير الخارج هو x_3 المقابل لأدنى قيمة في عمود النسبة.

ملاحظة: في عمود النسبة يتم إهمال القيم السالبة أو ∞.

7- يصبح محور الدوران (العنصر المحوري) هو 3.

8- حساب المعادلة المحورية وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على محور الدوران 3.

الصف المحوري= [2/3,3/3,1/3,0/3,30/3]

= [2/3;1;1/3;0;10]

9- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير x_4 ودالة الهدف Z كما يلي:

x_4 =[5;4;0;1;60] – (4)[2/3;1;1/3;0;10]

الجديدة

=[5;4;0;1;60] - [8/3;4;4/3;0;40]

=[7/3;0;-4/3;1;20]

Z= [-5;-6;0;0;0] – (-6)[2/3;1;1/3;0;10]

الجديدة

=[-1;0;2;0;60]

10- إدخال النتائج في جدول الحل الثاني:

متغيرات الفرق أو الفائض	المتغيرات				b_i	النسبة
	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_2	2/3	1	1/3	0	10	
x_4	7/3	0	-4/3	1	20	
Z	$(-1)_{max}$	0	2	0	60	

يتضح من النتائج النهائية لحل المشكلة بأن المنشأة الإنتاجية ستتخذ قرارا بإنتاج 8.5 من x_1 و 4.28 من x_2 بما يحقق للمنشأة ربحا أقصى بمقدار 68.6 ون.

مثال: حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام الطريقة المبسطة

$$\text{Max } Z= 6x_1+8x_2+4x_3$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1+x_2 \leq 2 \\ x_1+3x_3 \leq 6 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

1- تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية:

$$\text{Max } Z= 6x_1+8x_2+4x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1+x_2+x_4=2 \ldots(1) \\ x_1+3x_3+x_5=6 \ldots(2) \\ x_2+x_6=1 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$

i=(1;2;3;4;5;6)

الحل الابتدائي:

$0=x_3=x_2=x_1$

$(1) \Rightarrow x_4= 2$ $Z=0$

$(2) \Rightarrow x_5= 6$ $\Delta_j = \partial = 6-(1.0+1.0+0.0)=6$

$(3) \Rightarrow x_6= 1$

Max $\Delta_j = c_j - Z_j$

Min $\Delta_j = Z_j - c_j$

ß		b_i	6	8	4	0	0	0	$O= b_i/x_2$
			x_1	$x_2\downarrow$	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	2	1	1	0	1	0	0	2/1=2
x_5	0	6	1	0	3	0	1	0	6/0=/
$\leftarrow x_6$	0	1	0	$(1)_{pivo}$	0	0	0	1	$1/1=1_{min}$
$\Delta_j= Z_j - C_j$		0	6	8_{max}	4	0	0	0	

ß	(	b_i	c_j						O
			$x_1\downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\leftarrow x_4$	0	1	$(1)_{pivo}$	0	0	1	0	-1	$1/1=1_{min}$
x_5	0	6	1	0	3	0	1	0	6/1=6
x_2	8	1	0	1	0	0	0	1	1/0عدم التعيين
$\Delta_j= Z_j - C_j$		-8	6_{max}	0	4	0	0	-8	
ß	(	b_i	c_j						O
			x_1	x_2	$x_3\downarrow$	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1	1	0	0	1	0	-1	1/0عدم التعيين
$\leftarrow x_5$	0	5	0	0	$(3)_{pivo}$	-1	1	1	$5/3_{min}$
x_2	8	1	0	1	0	0	0	1	1/0 عدم التعيين
$\Delta_j= Z_j - C_j$		-14	0	0	4_{max}	-6	0	-2	
ß	(	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	O
x_1	6	1	1	0	0	1	0	-1	
x_3	4	5/3	0	0	1	-1/3	1/3	1/3	
x_2	8	1	0	1	0	0	0	1	
$\Delta_j= Z_j - C_j$		-62/3	0	0	0	-14/3	-4/3	-10/3	

$x_1=6;x_3=5/3;x_2=1;Z=62/3$

❋ الـ simplex المرافق:

ينتقل simplex من حل ابتدائي ممكن غير أمثل إلى حل ممكن أمثل مع الحفاظ على أمكنية الحل خلال خطوات simplex.

أما simplex المرافق فينتقل من حل ابتدائي أمثل غير ممكن للوصول إلى حل أمثل ممكن مع الحفاظ على أمثلية الحل خلال خطوات الجدول.

مثال:

$$\text{Min } Z= 2x_1+x_2+3x_3$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \geq 4 \\ 2x_1+x_2+x_3 \leq 8 \\ x_1-x_3 \geq 0 \end{cases}$$

* الخطوة الأولى: إعادة كتابة البرنامج بتحويل القيود إلى شكل أصغر أو يساوي ومن ثم تحويلها إلى معادلات بإضافة متغيرات الفرق:

$$\begin{cases} -x_1-2x_2-x_3 \leq -4 \\ 2x_1+x_2+x_3 \leq 8 \\ -x_1+x_3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1-2x_2-x_3+x_4= -4 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_5= 8 \\ -x_1+x_3+x_6= 0 \end{cases}$$

* الخطوة الثانية: وضع المشكل في جدول simplex

2- إذا كان شرط الأمثلية متوفر وكان أحد متغيرات الحل الابتدائية سالبة القيمة يمكننا تطبيق طريق simplex المرافق.

3- المتغير الابتدائي بأكبر قيمة سالبة.

تحليل الحساسية

مثال:

تقوم إحدى المؤسسات بإنتاج نوعين من لعب أطفال A و B. لإنتاج وحدة واحدة من A يتم استعمال وحدتين قياس من مادة بلاستيك كمادة أولية، كما أنه تستغرق فيه ورشة التصنيع 3سا.

لإنتاج وحدة واحدة من B يتم استعمال وحدة قياس واحدة من البلاستيك و 6سا عمل، تتوقع المؤسسة الحصول على ألف وحدة قياس من البلاستيك خلال سنة، كما أن طاقة ورشة التصنيع المتاحة خلال هذه الفترة هي 2400سا عمل.

تقدر المؤسسة أن تحقق ربح صافي قدره 20 ون لكل لعبة A و 30 ون لعبة B.

* ما هو مخطط الإنتاج الأمثل الذي يمكن المؤسسة من تحقيق أكبر ربح ممكن؟

الحل:

المشكل: تخطيط الإنتاج.

متغيرات القرار: x_2 ; x_1 الكمية المنتجة من A/B.

دالة الهدف: تعظيم الربح

$$\begin{cases} Z_{max} = 20x_1+30x_2 \\ 2x_1+x_2 \leq 10000 \\ 3x_1+6x_2 \leq 2400 \\ x_i \geq 0 \\ i=(1;2) \end{cases}$$

الشكل النمطي:

$$Z_{max} = 20x_1+30x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+y_1=10000 \\ 3x_1+6x_2+y_2=2400 \\ x_i \geq 0 \quad i=(1;2) \\ y_j \geq 0 \quad j=(1;2) \end{cases}$$

مصفوفة القيود:

$$A= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

C_b	ß	b	20	30	0	0
			x_1	x_2	y_1	y_2
20	x_1	400	1	0	2/3	-1/9
30	x_2	200	0	1	-1/3	2/9

$$\left\{ x_1=400 \right.$$

$Z_{max}=1400$ $x_2=200$

$y_1=0$

$y_2=0$

تفسير اقتصادي:

تستنتج المؤسسة 400 وحدة من لعبة A و 200 وحدة من لعبة B، وبذلك تحقق ربح قدره 1400 ون مع استهلاك كل الكمية المتوفرة من البلاستيك كما استهلكنا كل ساعات العمل.

1- حالة تغيير معاملات:

لنفرض حدوث تغير في ربح الوحدة الواحدة من A بمقدار ∂ (الربح المحقق من $A\partial+20$).

وما هي المجالات التي يتغير فيها ربح الوحدة الواحدة من A حتى يبقى الحل الأمثل صالحا.

C_b	ß	b	20	30	0	0
			x_1	x_2	y_1	y_2
$20+\partial$	x_1	400	1	0	2/3	-1/9
30	x_2	200	0	1	-1/3	2/9
$\Delta_j= c_j - Z_j$			0	0	-10/3-2/3	-40/9+1/9

$$\begin{cases} -10/3 - 2/3\partial \leq 0 \\ -40/9 + 1/9\partial \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2/3\partial \leq 10/3 \\ 1/9\partial \leq 40/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\partial \geq -10 \\ \partial \leq 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial \geq -5 \\ \partial \geq 40 \end{cases}$$

$$-5 \leq \partial \geq 40$$

$$20\text{-}5 \leq C_1 \geq 20+40$$

$$15 \leq C \geq 60$$

2- حالة تغير القيم الحرة (المواد المتاحة):

$$\begin{cases} 2/3(1000) - 1/9(2400) = 400 \\ -1/3(1000) + 2/9(2400) = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2/3(1000 + \Delta_1) - 2/9(2400 + \Delta_2) \geq 0 \\ 1/3(1000 + \Delta_1) + 2/9(2400 + \Delta_2) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 400 - 2/3\Delta_1 - 1/9\Delta_2 > 0 \\ 200 - 1/3\Delta_1 + 2/3\Delta_2 > 0 \end{cases}$$

حالة تغير طاقة ورشة التصنيع:

$$\begin{cases} 400 - 1/9\Delta_2 > 0 \end{cases}$$

$200 - 2/9\ \Delta_2 > 0$

$-900 < \Delta_2 > 3600$

$2400 - 90 < \Delta_2 > 3600+2400$

$1500 < \Delta_2 > 6000$

حتى يبقى الحل المثالي يجب أن يبقى عدد الساعات المتوفر في الورشة: $1500 < O_2 > 6000$

$-600 < \Delta_1 > 600$

$400 < O_2 > 1600$

مسائل النقل والتخصيص

I- مسائل أو نماذج النقل:

تعد نماذج النقل أحد الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، حيث تدرس القرارات المتعلقة بنقل وتسويق السلع والبضائع المختلفة من مصادر إنتاجها إلى مراكز الاستلام بهدف إيصالها إلى المستهلك الأخير بأقل كلفة ممكنة.

I-1- صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل:

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} cij\ X_{ij}$$

قيود مراكز التوزيع:

$$\text{Sub to} \quad \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = a_j \;,\; i=1;2;3;\ldots;m$$

قيود مراكز التسليم:

$$\sum_{i=0}^{m} x_{ij} = \;,\; j=1;2;3;\ldots;n$$

شرط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0$$

I-2- أنواع مشاكل النقل: تنقسم مشاكل النقل من حيث توازن جدول النقل أو عدم توازنه إلى ما سيأتي:

*مشاكل النقل المغلق: يكون فيها مجموع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع مساويا لمجموع الكميات المطلوبة من قبل مراكز الاستلام، وهذا يعني أن الجدول في حالة توازن: $\sum_{j=1}^{n} bj = \sum_{i=1}^{m} ai$

*مشاكل النقل المفتوح: يكون فيها مجموع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع مختلفا عن مجموع الكميات المطلوبة من قبل مراكز الاستلام، أي أن الجدول في حالة عدم توازن: $\sum_{j=1}^{n} bj \neq \sum_{i=1}^{m} ai$

في هذه الحالة نميز حالتين:

<u>حالة $\sum_{i=1}^{m} ai > \sum_{j=1}^{n} bj$:</u>

لإعادة الجدول لحالة التوازن يجب خلق مركز استلام وهمي بكلف مساوية للصفر D_0.

<u>حالة $\sum_{i=1}^{m} ai < \sum_{j=1}^{n} bj$:</u>

يجب خلق مركز توزيع وهمي بكلف مساوية للصفر S_0.

I-3- الطرق المستخدمة لحل مشكل النقل:

هناك عدة طرق مستخدمة لحل مشكل النقل سيتم تناول فقط طريقتين: طريقة الركن الشمالي الغربي، وهي إحدى طرق إيجاد الحل الممكن، وطريقة Vogel (فوجل) وهي إحدى طرق إيجاد الحل الأفضل.

* طريقة الحل الممكن: الركن الشمالي الغربي:

ينطلق تطبيق هذه الطريقة من اختيار خاصية النقل الأولى، والتي تقع في الصف الأول (الشمالي) والعمود الأول (الغربي) من جدول النقل بالاعتماد على العلاقة الرياضية $x_{11}= Min(a_1,b_1)$، مع مراعاة تخصيص أقل الكميتين (a_1) و (b_1) للخلية (x_{11}) وتعديل كمية العرض والطلب للجدول بعد الانتهاء من تخصيص الكمية المطلوبة.

مثال: نعتبر جدول النقل التالي:

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض a_i
S_1	10 **750**	8 **750**	6	4	1500
S_2	14	17 **1000**	5	2	1000
S_3	18	7	11 **250**	9 **1250**	1500
الطلب b_j	750	1750	250	1250	4000 / 4000

Min Z= 44500

* طريقة الحل الأفضل: طريقة vogel:

تمكن هذه الطريقة من تحديد الحل الأفضل ويجب إتباع الخطوات التالية:

1- التحقق من توازن العرض والطلب $\sum aj = bj$

2- حساب الفرق بين التكلفتين الوحديتين الأصغر في كل صف ولكل عمود.

3- اختيار الصف العمود الموافق لأكبر فرق (اختيار عشوائي إذا كان هناك فرقين متساويين).

4- ملئ الخانة الموافقة لأصغر تكلفة بما يتماشى والقيود.

5- شطب الصف أو العمود الذي تم تشبيعه.

6- إعادة الخطوات من 2 حتى تسبيع جميع الصفوف والأعمدة.

مثال:

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	العرض a_i
S_1	5 **20**	6	4 **60**	8	10	80
S_2	7 **20**	9	10	5	6 **30**	50
S_3	8	3 **20**	6	2 **30** أصغر	4 **20**	70
الطلب b_j	40	20	60	30	50	200

$X_{11}= 20$; $x_{13}= 60$

$x_{21}= 20$; $x_{25}= 30$

$x_{32}= 20$; $x_{34}= 30$

$x_{35}= 20$

$Z= 860$

مثال: تعتبر جدول النقل التالي:

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض a_i
S_1	12	13	4	6	500
S_2	6	4	10	11	700
S_3	10	9	12	4	800
الطلب b_j	400	900	200	500	

- أوجد الحل باستخدام طريقتي الركن الشمالي الغربي لتحديد الحل الأمكن، ثم طريقة فوجل لتحديد الحل الأفضل.

*طرق الحل الأمثل: طريقة عوامل الضرب

تعتبر هذه الطريقة الأسهل والأسرع لإيجاد الحل الأمثل (تحسين الحل الممكن) يجب إتباع الخطوات التالية:

1- التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة = $m+n-1$

2- يتم تكوين معادلة لكل خلية مملوءة في جدول الحل الأساسي: $C_{ij}= U_i + V_j$

U_i ← المتغير الخاص بالصف i الذي تقع فيه الخلية المعنية.

V_j ← المتغير الخاص بالعمود j الذي تقع فيه الخلية المعنية.

Cij ← تكلفة الخلية التي تقع في الصف i والعمود j.

3- إيجاد الحل للمعادلات للخلايا المملوءة بفرض أن: $U_1=0$

4- حساب التكلفة الغير مباشرة للخلايا الفارغة وفقا للمعادلة: $C_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر من خاصية غير مشغولة (فارغة) تكون التكلفة غير المباشرة لها قيمة سالبة فهذا يعني إمكانية تطوير الحل الأساسي لتخفيض التكاليف وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة، ثم نكون المسار المغلق والذي يبدأ من الخلية ذات أكبر قيمة سالبة وينتهي بها.

5- يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها وتعقبها علامة سالب (-) للخلية التي تليها في المسار وهكذا.

6- يتم إشغال الخلية الفارغة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في المسار بالكمية الأول Min (x_{nm})، ويجب طرق المقدار أو إضافته للخلايا المملوءة وفق إشارة المسار المغلق.

7- ثم نعيد نفس الخطوات السابقة ونتوقف عن تحسين الحل عندما تكون كل قيم C_{ij} موجبة.

مثال: الركن الشمالي الغربي

		V_1	V_2	V_3		
	مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	D_1	D_2	D_3	العرض a_i	V_i
U_1	S_1	7 x_{11} 18	3 x_{12} 4	10 x_{13}	22	0
U_2	S_2	4 x_{21}	6 x_{22} 18	0 x_{23} 6	24	3

U_3	S_3	5	x_{31}	8	x_{32}	9	x_{33}	14	12
						14			
	b_j الطلب	18		22		20		60	
	V_j	7		3		-3			

1- عدد الخلايا المشغولة:

$$m+n-1= 3+3-1=5$$

2- تكوين معادلات الخلايا المملوءة: $C_{ij}= U_i+V_j$

نفرض أن: $u1=0$

$C_m= U_1+V_1 = 7 \Rightarrow V_1=7$

$C_{12}= U_1+V_2 = 3 \Rightarrow V_2= 3$

$C_{22}= U_2+V_2 = 6 \Rightarrow V_2= 3$

$C_{23}= U_2+V_3 =0 \Rightarrow V_3= -3$

3- حساب التكلفة الغير مباشرة للخلايا الفارغة:

$C_{ij}= C_{ij} -(U_i+V_j)$

$X_{13} \rightarrow C_{13} - U_1 - V_3= 10-0+3=+13$

$X_{21} \rightarrow C_{21} - U_2 - V_1= 4-3-7=-6$

$X_{31} \rightarrow C_{31} - U_3 - V_1= 5-12-7=-14$ أصغر قيمة سالبة، أكبر قيمة سالبة بالقيمة المطلقة

$X_{32} \rightarrow C_{32} - U_3 - V_2= 8-12-3=-7$

نختار الخانة الفارغة x_{31} لأنها تحمل أكبر قيمة سالبة بالقيمة المطلقة، وبالتالي نرسم المسار المغلق الذي يبدأ بها وينتهي عندها. (حيث عند الزوايا تكون الخلايا مشغولة).

$$x_{31}^{+} \rightarrow x_{33}^{-} \rightarrow x_{23}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x_{12}^{+} \rightarrow x_{11}^{-} \rightarrow x_{31}^{+}$$

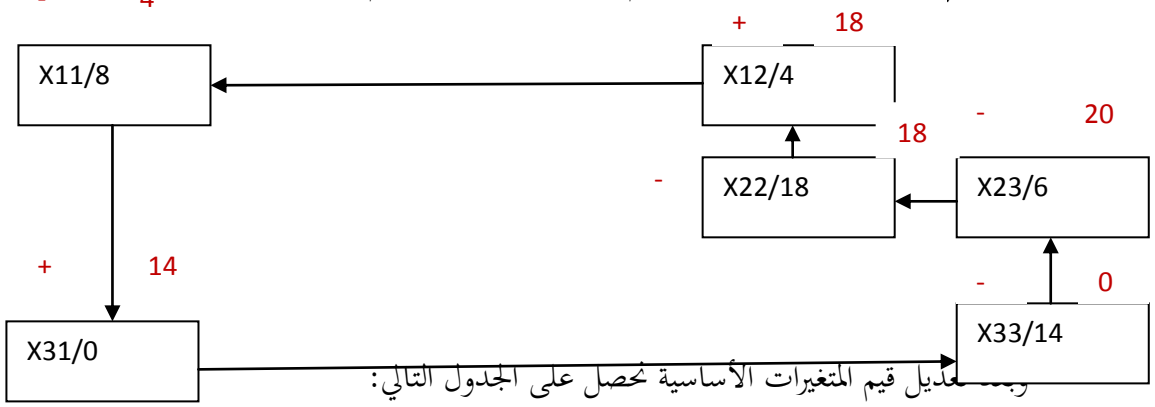
الخلايا ذات الإشارة سالبة في المسار هي:

$$x_{33}= 14 \; ; \; x_{22}= 18 \; ; \; x_{11}= 18$$

يجب اختيار أدنى قيمة من بينها:

$$\text{Min}(x_{33}= 14 \; ; \; x_{22}= 18 \; ; \; x_{11}= 18) \Rightarrow x_{33}= 14$$

هذا يعني إضافة المقدار 14 إلى القمم الموجبة وطرحه من القيم السالبة في المسار:



وبعد تعديل قيم المتغيرات الأساسية نحصل على الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	العرض a_i
S_1	7 4	3 18	10	22
S_2	4 -	6 4	0 20	24
S_3	5 14	8 -	9 -	14
الطلب b_j	18	22	20	60

$C= (4*7) + (18*3) + (4*6) + (20*0) + (14*5)$

$C= 176$

مثال: جدول الحل الأمثل لمشكلة النقل، بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن مستخدما طريقة عوامل الضرب (بعد الحصول على الحل الأفضل باستخدام طريقة الأقل تكلفة في المصفوفة):

1- التأكد من $m+n-1$ هو عدد الخلايا المملوءة: $6=1-4+3$

		V_1	V_2	V_3	V_4	
		D_1	D_2	D_3	D_4	العرض a_i
U_1	S_1	10 750	8 250	6 250	4 250	1500
U_2	S_2	14	17	5	2 1000	1000
U_3	S_3	18	7 1500	1	9	1500
الطلب b_j		750	1750	250	1250	4000

2- تكوين المعادلات للخلايا المملوءة:

بافتراض أن: $U_1=0$ نستنتج الحلول:

$C_{ij}= U_1+V_j$

$C_{11}=U_1+V_1=10 \Rightarrow V_1=10$

$C_{12}=U_1+V_2=8 \Rightarrow V_2=8$

$C_{13}=U_1+V_3=6 \Rightarrow V_3=6$

$C_{14}=U_1+V_4=4 \Rightarrow V_4=4$

$C_{24}=U_2+V_4=2 \Rightarrow U_2=-2$

$C_{32}=U_3+V_2=7 \Rightarrow U_3=-1$

***طرق الحل الأمثل:**

لإيجاد الحل الأمثل نذكر فيما يلي طريقتي المسار المتعرج وطريقة التوزيع المعدل (عوامل الضرب)، وهي طرق تحقق الحل الأمثل عن طريق تحسين الحل الأفضل.

طريقة المسار المتعرج:

تتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأولي الأفضل أو الممكن لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا نقلت وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة، فإذا وجدنا أن ملئ خلية معينة غير مشغولة ستؤدي إلى تقليل التكاليف، يتم تعديل الحل الراهن وتستمر عملية تقييم كل جدول إلى أن نتوصل إلى إشغال أي خلية غير مشغولة لا يؤدي إلى التقليل في تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها، كما يجب ملاحظة أن أية مشكلة للنقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أي إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط الأدنى، وهو أن عدد الخلايا المشغولة يجب أن يساوي دائما عدد الصفوف عدد الأعمدة – 1. $(m+n-1)$ = عدد الخلايا المشغولة.

لتطبيق هذه الطريقة يجب إتباع الخطوات التالية:

1- رسم مسار مغلق لكل خلية غير مشغولة، يبدأ من الخلية الغير مشغولة المراد تقييمها وينتهي بها.

2- يبدأ المسار المغلق بعلامة موجب (+) للخلية المراد تقييمها، تليها علامة سالبة (-)، وهكذا.

3- نحسب الكلفة غير المباشرة للخلية، وذلك بجمع الكلفة للخلايا على المسار، فإذا كانت القيمة سالبة معنى ذلك أن إشغال هذه الخلية سيساهم في خفض التكاليف.

4- تكرار الخطوات السابقة في حالة وجود أكثر من خلية فارغة (في حال تعدد القيم السالبة تعطى الأولوية للخلية ذات التكلفة السالبة الأكبر بالقيمة المطلقة).

5- يتم إشغال الخلية الفارغة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

6- تكرار الخطوات.

7- في حالة عدم تحقق الشرط (m+n-1) = عدد الخلايا المشغولة)، في هذه الحالة نضيف إلى أحد الخلايا الفارغة ذات أقل كلفة قيمة (0) بحيث لا تؤثر في الحل.

نعتبر المثال:

1- الحل الممكن: طريقة الركن الشمالي الغربي.

2- تحسين الحل: المسار المتعرج.

	1	2	3	S
1	7 18	3 4	10 -	22
2	4 -	6 18	0 6	24
3	5	8 -	9 14	14
D	18	22	20	60

الشرط: ع.خ.م = 5

M+n-1=3+3+1-1=5

الشرط محقق.

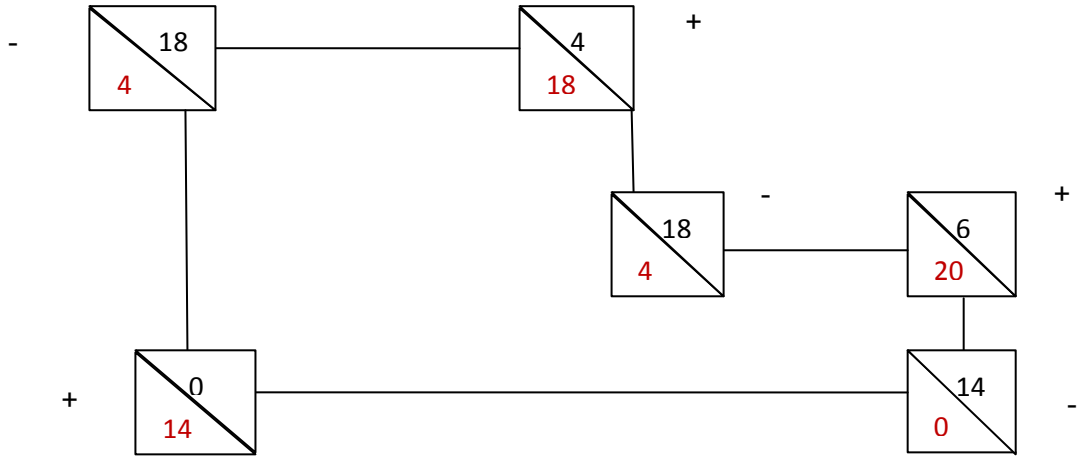
الخلية الفارغة	المسار المغلق	التكلفة غير المباشرة
x_{13}	$x_{13}^{+} \rightarrow x_{23}^{-} \rightarrow x_{22}^{+} \rightarrow x_{12}^{-} \rightarrow x_{13}^{-}$	+10-0+6-3=13
x_{21}	$x_{21}^{+} \rightarrow x_{11}^{-} \rightarrow x_{12}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x_{21}^{+}$	+4-7+3-6=-6
x_{31}	$x_{31}^{+} \rightarrow x_{33}^{-} \rightarrow x_{23}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x_{12}^{+} \rightarrow x_{11}^{-} \rightarrow x_{21}^{-}$	+5-9+0-6+3-7=-14
x_{32}	$x_{32}^{+} \rightarrow x_{33}^{-} \rightarrow x_{23}^{+} \rightarrow x_{22}^{-} \rightarrow x_{32}^{+}$	8-9+0-6=-7

يتم اختيار أكبر تكلفة سالبة بالقيمة المطلقة 14- أي الخلية x_{31} ويتم إشغالها كما يلي:

*اختيار الخلية ذات المقدار الأقل، والتي تحمل الإشارة السالبة أي: $Min(x_{33};x_{22};x_n)$

$$Min(18\ ;18\ ;14)=14$$

* نقوم بإضافة 14 للخلايا الموجبة وطرحها من الخلايا السالبة:



فيصبح الجدول:

	1	2	3
1	4	18	-
2	-	4	20

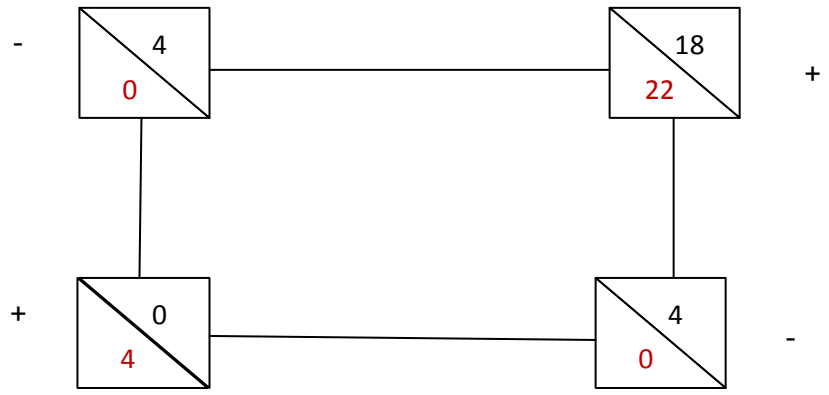
3	14	-	-

C=176

الشرط: ع.خ.م= m+n-1 / 5=5

التحقق من جديد من أمثلية الحل:

x_{13}	$x_{13}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{13}$	+10-0+6-3=13
x_{21}	$x_{21}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{21}$	+4-7+3-6=-6
x_{32}	$x_{32}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{32}$	+8-5+7-3=7
x_{33}	$x_{33}\rightarrow x_{31}\rightarrow x_{11}\rightarrow x_{12}\rightarrow x_{22}\rightarrow x_{23}\rightarrow x_{33}$	9-5+7-3+6-0=14



C=152

	1	2	3
1	-	22	-
2	4	(-)	20
3	14	-	-

الشرط: ع.خ.م= m+n-1

5≠4 نضيف 0

التقييم:

$x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} = +6$

$x_{13} \rightarrow = +13$

$x_{32} \rightarrow = +1$

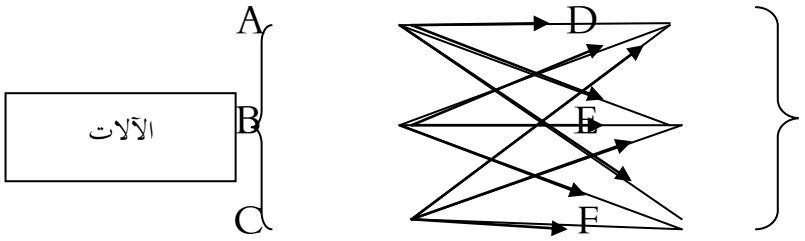
$x_{33} \rightarrow = +8$

مسائل التخصيص

*تمهيد:

تتلخص إشكالية مسائل التخصيص في كيفية توزيع مجموعة من الوظائف على مجموعة من الأشخاص أو مجموعة من الآلات على مجموعة من المهام، بحيث يؤدي ذلك إلى استخدامها بأعلى كفاءة ممكنة، مما يؤدي إلى تحمل تكلفة أقل أو جني أرباح أكبر، شرط أن يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة فقط، وهذا يقتضي أن يكون عدد الوظائف مساويا لعدد الأشخاص أو عدد الآلات.

مثلا حسب الشكل التالي لدينا ثلاث آلات A,B,C وثلاث وظائف D,E,F، بحيث يمكن لكل آلة أن تنجز أي من الوظائف الثلاث إنما بتكاليف قد تكون مختلفة.



كأمثلة على مشاكل التخصيص تذكر تخصيص عدد من الحافلات لعدد من الأحياء السكنية، أو عدد من المقاولين لإنجاز عدد من المشاريع ...إلخ.

1- إشكالية التخصيص:

تمثل مسألة التخصيص حالة خاصة من مسائل النقل، ويمكن طرحه باعتماد المثال التالي:

تمتلك مؤسسة لانجاز الآبار 3 آلات للحفر A,B,C، حيث كلفت بحفر 3 آبار D,E,F في 3 مناطق.

إن تكلفة الحفر تختلف حسب كل آلة وحسب الطبيعة الجيوفيزيائية للتربة التي يحفر فيها كل بئر، كما يوضحه الجدول التالي:

الوظائف / الآلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

ويكون المطلوب هو إيجاد أفضل تخصيص للآلات، بحيث تكون التكاليف في حدها الأدنى.

1- طرق الحل: هناك عدة طرق لحل مسائل التخصيص، نذكر منها:

* طريقة البرمجة الخطية.

* طريقة النقل.

* الطريقة الهنكارية.

أ- طريقة البرمجة الخطية: تكون الصياغة على الشكل:

تخصيص i xij

للقيام بـ j

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{3} \quad \sum_{j=1} cij\ xij$$

$$\text{Sc} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} xij = 1 \\ \sum_{j=1}^{3} xij = 1 \\ \text{Xij} \geq 0 \end{cases}$$

ب- طريقة النقل: في هذه

مدخل للبرمجة الغير خطية

مدخل للبرمجة الغير خطية

*** عدم خطية الدوال:**

افترضنا في دراستنا المبدئية للبرمجة الخطية وجود علاقة خطية في دالة الهدف وفي الشروط المدونة في المشكلة، ولكننا في بعض الحالات نواجه مواقف لا يكون لدينا فيها علاقات خطية،ولاسيما في دالة الهدف، ويمكننا في معظم هذه الحالات التغلب على مشكل عدم تجاوب الدالة مع علاقة الخط المستقيم عن طريق تقسيم دالة الهدف إلى أجزاء كل منها يمثل دالة خطية.

وعلى هذا يكون لدينا مجموعة من الدوال الخطية التي تمثل في مجموعها دالة غير خطية، ويتبع هذا وجود شروط جديدة إضافية تحدد المدى الخاص بكل من المتغيرات المتعلقة بدالة الهدف.

لشرح هذه الحالة نفترض أنه لدينا مصنع يمكنه إنتاج 100 وحدة من الكراسي في الساعة، وباستخدام الآلات الاحتياطية يمكنه إنتاج 25 قطعة أخرى في الساعة، وتكلفة المواد المباشرة هي 50 ون للوحدة المنتجة في المصنع الرئيسي و55 للمنتجة في المصنع الاحتياطي، وكذلك فإن تكلفة العمل المباشر هي 60 ون للوحدة في المصنع الرئيسي، و 70 في المصنع الاحتياطي حتى معدل 40 ساعة في الأسبوع، وبعد هذه الـ40 ساعة فإن الأجر يماثل مرة ونصف الأجر المدفوع عن كل من الأربعين ساعة الأولى، ولا يمكننا العمل بأي حال من الأحوال أكثر من 60 ساعة في الأسبوع. وعلى هذا يكون لدينا الدوال التالية:

أ- الإنتاج في المصنع الرئيسي في الوقت العادي:

* تكلفة الوحدة الحدية: (50+60)= 110

* الطاقة: 4000 وحدة في الأسبوع ← 40*100

ب- الإنتاج في المصنع الاحتياطي في الوقت العادي:

* تكلفة الوحدة الحدية: 55+70=125

* الطاقة: 25*40=1000 وحدة في الأسبوع

ج- الإنتاج في المصنع الرئيسي في الوقت الإضافي:

* تكلفة الوحدة الحدية: 50(تكلفة المواد) + 60*1.5(تكلفة العمل) =140

* الطاقة: 100*20(ساعة المتبقية)=2000 وحدة في الأسبوع

د- الإنتاج في المصنع الاحتياطي في الوقت الإضافي:

* تكلفة الوحدة الحدية: 55+77(1.5)=160

* الطاقة: 20*20=500 وحدة في الأسبوع

ويبدو واضحا أننا سنقوم بالإنتاج حسب الخطوات الأربعة المتتالية من دالة الهدف حسبما تقضي الحاجة، حيث أن الخطوة الأولى أرخص من الثانية، والثانية أرخص من الثالثة و هكذا..، فإذا كانت احتياجات السوق هي 4500 وحدة فإننا سنقوم بالإنتاج على الجزء الأول حتى 4000 وحدة، و500 وحدة على الجزء الثاني، وطبعا إذا كان السوق يحتاج إلى 6500 وحدة فإننا سنقوم باستعمال الثاني كله إلى جانب جزء من الثالث وهكذا.

وتبقى لدينا مشكلة حساب التكلفة المتوسطة لوحدة الإنتاج في كل من مراحل الإنتاج وعند جميع المعادلات الأربعة وهذه يمكن حسابها انطلاقا من المعلومات السابقة كما يلي:

أولا من 0 إلى 4000 وحدة: تكلفة الإنتاج المتوسطة = التكلفة الحدية (Mo)

ثانيا من 4000 إلى 5000 وحدة: التكلفة المتوسطة للوحدة = $\frac{(4000*110)+(4000-)125}{x}$

$$=125-\frac{60000}{x}$$

علما أن $4000 < x \leq 5000$

وذلك لأن تكلفة إنتاج الـ 4000 قطعة الأولى هي: 4000*110

وما فوق ذلك سيتكلف 125 للقطعة أي: 125(x-4000)

والمتوسط سيكون ما عبر عنه في المعادلة السابقة.

ثالثا من $5000 < x \leq 7000$:

التكلفة المتوسطة للوحدة = $\frac{(5000-x)140+(1000)125+(4000)110}{x}$

رابعا من $7000 < x \leq 7500$:

التكلفة المتوسطة للوحدة = $\frac{(7000-x)160+(2000)140+(1000)125+(4000)110}{x}$

وطبعا يمكن لنا تكوين المشكلة باعتبار كل من هذه المراحل بتكلفتها المختلفة متغيرا مع إعطائها رقما معينا، x_1, x_2, x_3, x_4 وفي نفس الوقت وضع حدود دنيا وقصوى لكل من هذه المتغيرات ضمن الشروط اللازمة لتكوين المشكلة النهائية، وعلى سبيل المثال فإن تكلفة الإنتاج المتوسطة للوحدة في المجموعة الأولى (x_1)

$$110x_1$$

والشرط المقيد لقيمة x_1 هو: $x_1 \leq 4000$

المجموعة الثانية = دالة هدفها هي: $125 - \frac{60000}{x2}$

الشروط المقيدة لها: $4000 > x_2$

$$5000 \leq x_2$$

المجموعة الثالثة:

دالة الهدف: $140 - \frac{135000}{x3}$

القيود: $x_3 > 5000$

$x_3 \leq 7000$

المجموعة الرابعة:

دالة الهدف: $\frac{275000}{x4} - 160$

القيود: $x_4 > 7000$

$x_4 \leq 7500$

وهكذا تيسر لنا حل المشكلة.

البرمجة الخطية: صياغة المشكلة الاقتصادية في شكل نموذج رياضي

التمرين الأول:

يقوم مصنع بإنتاج نوعين من المنتجات: كراسي وطاولات، محققا بذلك ربح يقدر بـ40 دولار لكل كرسي، و 50 دولار لكل طاولة. يحتاج إنتاج الكرسي الواحد إلى 2ساعة عمل بشرية، و3ساعات من الآلة، بينما تحتاج الطاولة الواحدة لإنتاجها إلى 2ساعات يدوية وساعة واحدة آلية.

يتطلب إنتاج وحدة واحدة من الكراسي وحدة واحدة من الخشب، بينما الطاولة 4 وحدات خشب. والمتوفر لدى المصنع هو 60ساعة عمل يدوية/اليوم، 75ساعة آلية/اليوم، و 84 وحدة خشب.

* كيف يمكن للمصنع توزيع الموارد المتاحة (ساعات العمل اليدوية، الآلية، الخشب) لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

التمرين الثاني:

تريد شركة تغذية إعداد كيس غذائي للحيوانات يحتوي على كميات معينة من الفيتامينات على النحو التالي: 120 وحدة من البروتين، 80 وحدة من الكالسيوم، حيث أن:

- الذرة تحتوي على 10 وحدات بروتين و 5وحدات كالسيوم في الكيلوغرام الواحد.

- السماد يحتوي على 2 وحدة بروتين و5وحدات كالسيوم في الكيلوغرام الواحد.

* فرض أن تكلفة 1كلغ من الذرة هو 8 دولار و 1كلغ سماد هو 4 دولار، فكم يتكلف إنتاج الكيس الغذائي الواحد الذي يحتوي على الكميات المطلوبة وبأقل تكلفة؟

التمرين الثالث:

يقوم مصنع بإنتاج نوعين من المواد الأولية A و B على مرحلتين آلية ويدوية، بحيث يكون الربح من بيع وحدة واحدة من المادة A هو 1و.ن ومن المادة B 1و.ن.

يتطلب إنتاج وحدة واحدة من المادة A ساعة واحدة آلية و 2ساعات يدوية، أما المادة B فتتطلب 5ساعات عمل آلية وساعة واحدة يدوية، في حين تبلغ الطاقة المتاحة والمحدودة في المرحلة الأولى (الآلية) 5ساعات عمل، وفي المرحلة الثانية (اليدوية) 4ساعات عمل.

* ابحث عن أفضل تشكيلة إنتاجية من المادتين A و B تؤدي إلى تعظيم الربح.

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم 01 (الحلول)	قسم علوم التسيير

حل تمارين البرمجة الخطية

التمرين الأول:

بفرض أن x_1 يمثل عدد الكراسي، و x_2 عدد الطاولات التي تنتج يوميا، يكون تحويل المسألة إلى النموذج الرياضي كالتالي:

* دالة الهدف: تمثل الربح $\text{Max } Z= 40x_1+50x_2$

* القيود: $s.t$

ساعات العمل اليدوية: $2x_1+2x_2 \leq 60$

ساعات العمل الآلية: $3x_1+x_2 \leq 75$

الخشب: $x_1+4x_2 \leq 84$

شرط عدم السلبية: $x_1 \geq 0 ; x_2 \leq 0$

التمرين الثاني:

بفرض أن: x_1 هو عدد الكيلوغرامات للذرة في الكيس الغذائي الواحد.

x_2 هو عدد الكيلوغرامات للسماد في الكيس الغذائي الواحد.

* دالة الهدف: تدنية تكلفة إنتاج الكيس الغذائي $\text{Min } Z= 8x_1+4x_2$

* القيود: $s.t$

الكمية المطلوبة من البروتين: $10x_1+2x_2 \geq 120$

الكمية المطلوبة من الكالسيوم: $5x_1+5x_2 \geq 80$

شرط عدم السلبية: $x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0$

التمرين الثالث:

بفرض أن: x_1 المادة الأولية المنتجة A

x_2 المادة الأولية المنتجة B

* دالة الهدف تعظيم الربح $\text{Max } Z= x_1+x_2$

* القيود: المرحلة الأولى: $s.t \quad x_1+5x_2 \leq 5$

المرحلة الثانية: $2x_1+x_2 \leq 5$

شرط عدم السلبية: $x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0$

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم 02	قسم علوم التسيير

البرمجة الخطية: الصياغة الرياضية والحل باستخدام طريقة الحل البياني

التمرين الأول:

تنتج شركة أثاث عدة منتجات من بينها الأريكة والطاولات، كل أريكة تباع تأتي بربح يقدر بـ70 دولار، وكل كرسي يباع يأتي بربح قدره 50 دولار.

يتم الإنتاج من خلال قسمين: قسم النجارة وقسم الطلاء، والجدول التالي يبين لنا معلومات الإنتاج اللازمة من حيث ساعات العمل المطلوبة لإنجاز الأرائك والطاولات، إضافة إلى ساعات العمل المتاحة لكل منهما في الأسبوع الواحد.

القسم	ساعات العمل المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		الساعات المتاحة في الأسبوع
	أريكة	طاولة	
النجارة	4	3	240
الطلاء	2	1	100

* تريد هذه الشركة تحديد عدد الأرائك والطاولات اللازم إنتاجها لتعظيم الربح.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \; ; x_2 \geq 0$$

* أوجد قيمتي المتغيرين x_1 و x_2 باستخدام طريقة الحل البياني.

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم 02	قسم علوم التسيير

حل تمارين البرمجة الخطية

التمرين الأول:

1- الصياغة الرياضية للمشكلة الاقتصادية:

بفرض أن: x_1 عدد الأرائك التي يجب إنتاجها في الأسبوع الواحد.

x_2 عدد الطاولات التي يجب إنتاجها في الأسبوع الواحد.

* تعظيم الربح: $\text{Max } Z = 70x_1+50x_2$

ساعات العمل في قسم النجارة: $4x_1+3x_2 \leq 240$ s.t

ساعات العمل في قسم الطلاء: $2x_1+x_2 \leq 100$

شرط عدم السلبية: $x_1 ; x_2 \geq 0$

2- الحل البياني للمسألة:

يمكن حل مسألة البرمجة الخطية بيانيا إذا كانت المسألة لها متغيرا قرار فقط (x_1 وx_2) وذلك لتعذر رسم المتباينات لأكثر من ذلك، ويمكن حل المسألة كالتالي:

1- رسم المتباينات وإيجاد منطقة الحلول الممكنة.

2- تحديد نقاط الأركان (إحداثيات) منطقة الحلول الممكنة.

3- التعويض بنقاط الأركان في دالة الهدف واختيار النقطة التي تعطي الحل الأمثل (أكبر قيمة في حالة التعظيم والعكس في حالة التدنية).

أ- التمثيل البياني للقيود:

لتمثيل القيد الأول $4x_1+3x_2 \leq 240$

يجب أولا رسم المعادلة $4x_1+3x_2=240$

$2x_1+x_2=100 \rightarrow$ (2)

(1)

x_1	0	50
x_2	100	0

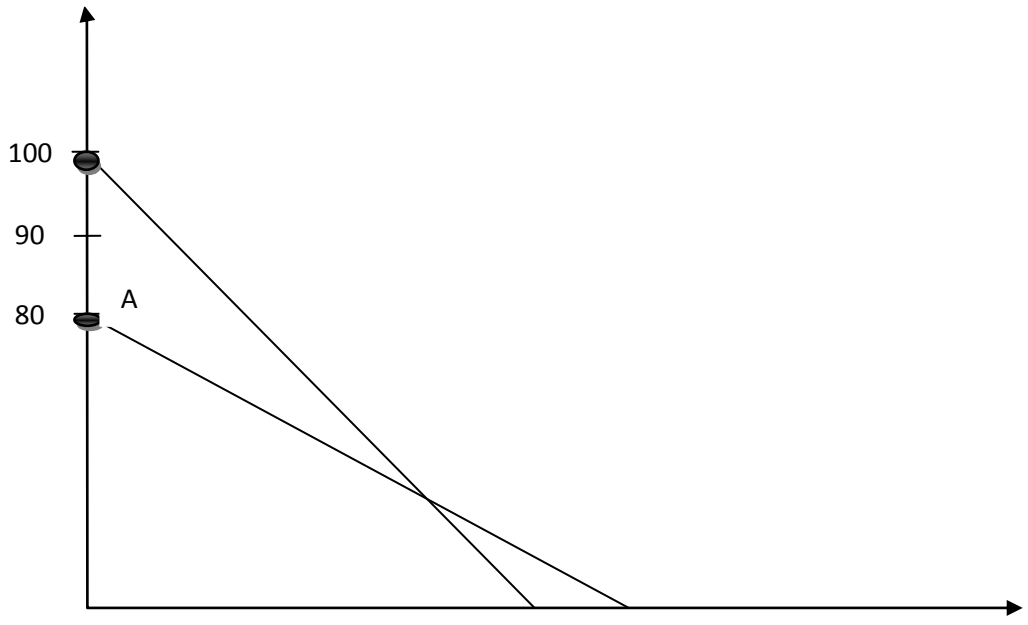
(2)

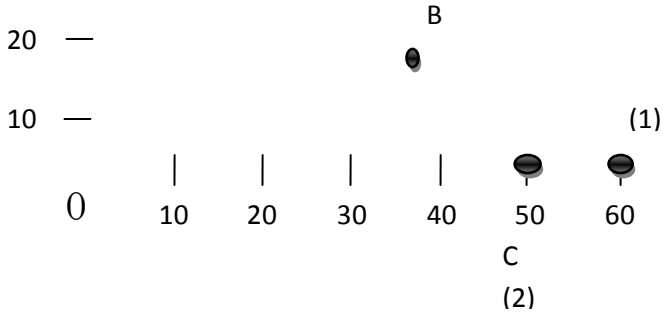
x_1	0	60
x_2	80	0

يمثل المحور الأفقي عدد الأرائك والمحور العمودي عدد الطاولات.

يمثل المستقيم رقم (1) الحد الأعلى لقيد النجارة بينما المستقيم رقم (2) الحد الأعلى لقيا

عدد الطاولات





تسمى المنطقة أدنى الخطين منطقة الحلول الممكنة، وهي المنطقة التي تشترك فيها جميع قيود المسألة (OABC).

ب- تحديد إحداثيات منطقة الحل:

الإحداثية	عدد الأرائك	عدد الطاولات	الربح Z
O (0 ;0)	0	0	0
A (80 ;0)	0	80	4000
B (30 ;40)	30	40	4100
C (0 ;50)	50	0	3500

نقوم بتحديد إحداثية النقطة B من خلال التقاطع بين المستقيم (1) و (2).

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2=240\ldots.(1) \\ 2x_1+x_2=100\ldots.(2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) لدينا: $x_2=100-2x_1\ldots(*)$

بتعويض (*) في (1) نحصل على: $4x_1+3(100-2x_1)=240$

$x_1=30$; $x_2=40$

القرار: تقوم الشركة بإنتاج 30 وحدة من الأرائك و 40 وحدة من الطاولات لتتحصل بذلك على أعظم ربح يقدر بـ4100 دولار.

التمرين الثاني:

* تحويل القيود من متراجحات إلى معادلات لرسم المستقيمات وتحديد منطقة الحلول الممكنة:

$$6x_1+4x_2=30 \rightarrow (1)$$

$$4x_1+5x_2=20 \rightarrow (2)$$

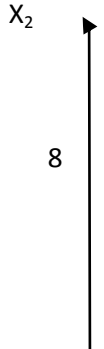
$$x_2=3 \rightarrow (3)$$

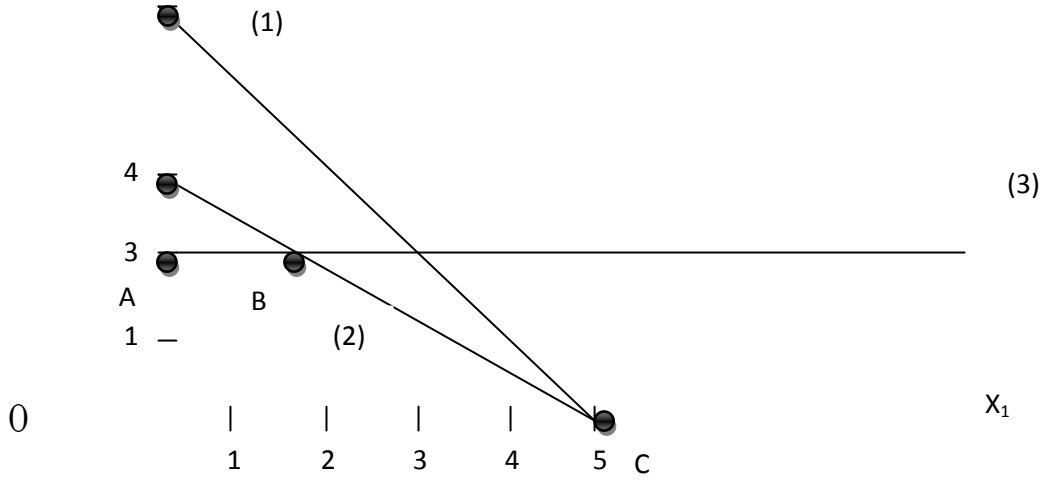
(1)

x_1	0	5
x_2	7.5	0

(2)

x_1	0	5
x_2	4	0





منطقة الحلول الممكنة (OABC)

* تحديد إحداثيات منطقة الحلول الممكنة:

الإحداثيات	x_1	x_2	دالة الهدف Max Z
0	0	0	0
A	0	3	9
B	5/4	3	23/2
C	5	0	10

* القرار: بمقارنة قيمة Z عند كل ركن نجد أن الركن B هو الذي يحقق أكبر ربح ممكن، وهذا يعني أنه يتوجب على المؤسسة إنتاج 5/4 وحدة من x_1 و 3 وحدات من x_2 لتحقيق ربح يقدر بـ23/2 وحدة نقدية.

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم (3)	قسم علوم التسيير

صياغة نموذج البرمجة الخطية

التمرين الأول:

تنتج إحدى المؤسسات نوعين من المنتجات (متخصصة في إنتاج الأجهزة الكهربائية)، النوع الأول A والنوع الثاني B، وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية المتاحة لثلاثة أنواع من الماكينات (1،2،3).

يحتاج المنتج A: 6 ساعات على الماكينة 1، 3سا على الماكينة 2، و2سا على الماكينة 3.

المنتج B: 4سا على الماكينة 1، 5سا على الماكينة 2، و 3سا على الماكينة 3.

علما أن عدد ساعات التشغيل المتاحة أسبوعيا هي: 60سا للماكينة 1، 50سا للماكينة 2، و 70سا للماكينة 3. وأن الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتج A بلغ 80 وحدة نقدية، ومن المنتج B، 95 وحدة نقدية.

* صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج عدد الوحدات من كلا المنتوجين بما يحقق للمنظمة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

حل التمرين الأول:

يمكن تلخيص المعلومات في الجدول التالي:

عدد ساعات التشغيل المتاحة أسبوعيا	المنتجات		الماكينات
	المنتج A	المنتج B	
60	4	6	الماكينة (1)
50	5	3	الماكينة (2)
70	3	2	الماكينة (3)
	95	80	الربح المتوقع

نفترض انطلاقا مما سبق أن عدد الوحدات المنتجة من المنتوج A هو x_1 وعدد الوحدات المنتجة من المنتوج B هو x_2، إذن لدينا متغيري قرار اثنين فقط.

تكون إذن الصياغة كما يلي:

* دالة الهدف: $Max\ Z= 80x_1+95x_2$

* القيود: sub to :

قيد الماكينة 1 $6x_1+4x_2 \leq 60$

قيد الماكينة 2 $3x_1+5x_2 \leq 50$

قيد الماكينة 3 $2x_1+3x_2 \leq 70$

شرط عدم السلبية $x_1 ;x_2 \geq 0$

التمرين الثاني:

ترغب الشركة العامة لإنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاثة أنواع من التركيبات الغذائية (التركيبة 1،2،3) وأن كل تركيبة تتضمن مزيج من البروتين والألياف.

تحتاج التركيبة1: 20 كغ بروتين، 50 كغ ألياف.

التركيبة 2: 25 كغ بروتين، 40 كغ ألياف.

التركيبة 3: 30 كغ بروتين، 60 كغ ألياف.

علما بأن الاحتياجات الدنيا من المركبين هي 180 كغ بروتين و 650 كغ ألياف، وأن تكاليف شراء المركبات الداخلة في كل تركيبة هي 100 ون للتركيبة 1، و 150 للتركيبة 2، و 120 للتركيبة 3.

* صياغة نموذج البرمجة الخطية لإنتاج التركيبات الغذائية الثلاث، لما يجعل تكاليف إنتاج التركيبات أقل ما يمكن.

حل التمرين الثاني:

- استنتاج متغيرات القرار:

نضع x_1 ← عدد الوحدات المنتجة من التركيبة 1.

x_2 ← عدد الوحدات المنتجة من التركيبة 2.

x_3 ← عدد الوحدات المنتجة من التركيبة 3.

دالة الهدف Z تمثل هنا دالة التكاليف الكلية المتوقعة.

- الصيغ المعيارية:

1/ Max $Z= 10x_1+10x_2+0x_3+0x_4$

Sub to : $\begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3=20 \\ 3x_1+x_4=15 \end{cases}$

$x_i \geq 0$ i= (1;…;u)

2/ Max $Z= 2x_1+4x_2+0x_3+0x_4$

Sub to: $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+4x_2+x_4=8 \end{cases}$

$x_i \geq 0$ i= (1;…;u)

3/ Max Z=

4/ Max Z=

5/ Max Z= $10x_1+15x_2+0x_3$

Sub to: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3000 \\ x_2=2000 \end{cases}$

$x_1;x_2;x_3 \geq 0$

6/ Max Z= $3x_1-x_2$

Sub to : $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=4 \\ x_1-x_4=4 \\ x_1+x_2+x_5 \leq 8 \end{cases}$ $x_1;x_2;x_3;x_4;x_5 \geq 0$

حل التمرين الأول:

* تحويل النموذج وإضافة المتغيرات:

Min z= $2.5x_1+4x_2+0x_3+0x_4+My_1+My_2$

Sub to : $\begin{cases} x_1+x_3=100 \\ x_2-x_4+y_1=200 \\ x_1+x_2+y_2=250 \end{cases}$

$x_1;x_2;x_3;x_4 \geq 0$ $y_1;y_2 \geq 0$

* الحل الابتدائي:

ß	C_b/ Z_j	b	2.5	1	0	0	M	M	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_1	0	100	1	0	1	0	0	0	/
←y_1	M	200	0	(1) pivo	0	-1	1	0	$200/1=200_{min}$
y_2	M	250	1	1	0	0	0	1	250/1=250
ΔJ= zj-cj			(M-2.5)	(2M-4) max	0	-M	0	0	

x_3	0	100	1	0	1	1	0	0	100
x_2	4	200	0	1	0	-1	1	0	/
y_2	M	50	(1) pivo	0	0	1	-1	1	50_{min}
			$(M-2.5)_{max}$	0	0	(M-1)	(4-2M)	0	

x_3	0	50	0	0	1	0	-1	-1
x_2	4	200	0	1	0	-1	1	0
x_1	2.5	50	1	0	0	1	-1	1
			0	0	0	-1.5	(1.5-M)	(2.5-M)

$x_1=50$; $x_2=200$; $Z=925$

Min $Z= 2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+My_1+My_2$

sub to: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$

$2x_1+2x_2-x_4+y_1=4$

$x_1+x_2+y_2=3$

$x_i \geq 0 \quad i=(1;\ldots;u) \qquad y_j \geq 0 \quad j=(1;2)$

ß	C_b/Z_j	b_i	2	3	0	0	M	M	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_3	0	6	1	1	1	0	0	0	6/1
y_1	M	4	$(2)_{pivo}$	2	0	-1	1	0	$4/2_{min}$
y_2	M	3	1	1	0	0	0	1	3/1
Δj= zj-cj			(3M-2)	(3M-3)	0	-M	0	0	7M
x_3	0	4	0	1	1	1/2	-1/2	0	8
x_1	2	2	1	1	0	-1/2	1/2	0	-
y_2	M	1	0	0	0	$(1/2)_{pivo}$	-1/2	1	2
			0	-1	0	(-1+M/2)	(1-3M/2)	0	M+4
x_3	0	3	0	1	1	0	0	-1	
x_1	2	3	1	1	0	0	0	1	
x_4	0	2	0	0	0	1	-1	2	
			0	-1	0	0	-M	2-M	6

$x_1=3$; $x_2=0$; $Z=6$

حل التمرين الثاني:

$\text{Min } W= 2000y_1+5500y_2$

$$\text{Sub to : } \begin{cases} y_1+2y_2 \geq 20 \\ y_1+5y_2 \geq 30 \\ y_1 ; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\text{Min } W= 2000y_1+5500y_2+0y_3+0y_4+MS_1+MS_2$

$$\text{Sub to : } \begin{cases} y_1+2y_2-y_3+S_1=20 \\ \end{cases}$$

$y_1+5y_2-y_4+S_2=30$

$i=(1;\dots;u)\quad y_i;S_j\geq 0\qquad j=1;2$

ß	cb	b	2000	5500	0	0	M	M	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
S_1	M	20	1	2	-1	0	1	0	20/2
S_2	M	30	1	5	0	-1	0	1	30/5
Z_j-c_j			(2M-2000)	(7M-5500)	-M	-M	0	0	
S_1	M	8	3/5	0	-1	2/5	1	-1/5	10/3
y_2	5500	6	1/5	1	0	-1/5	0	1/5	30
			3/5M-900	0	-M	(2/5M-1100)	0	5500-7/5M	
y_1	2000	40/3	1	0	-5/3	2/3	5/3	-2/3	
y_2	5500	10/3	0	1	1/3	-1/3	-1/3	1/3	
			0	0	-1500	-500	(-1500 -M)	(500-M)	

$Z=w=45000$; $x1=1500$; $x2=500$

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم (2)	قسم علوم التسيير

حل التمارين باستخدام طريقة simplex

حل التمرين الأول:

نقوم أولا بتحويل البرنامج الخطي إلى الشكل المعياري الأساسي:

$$\text{Max } Z= x_1+x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s.c : } \begin{cases} x_1+5x_2+x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_4=4 \\ x_1 ;x_2 ;x_3 ;x_4 \geq 0 \end{cases}$$

c	معاملات المتغيرات c في دالة الهدف c_b/z_j	الموارد المتاحة b	1	1	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	5	1	5	1	0	5/1=5
x_4	0	4	$(2)_{pivo}$	1	0	1	$4/2=2_{min}$
$\Delta_j= c_j-z_j$			1	1	0	0	
x_3	0	3	0	$(9/2)_{pivo}$	1	-1/2	$6/9=0.66_{min}$
x_1	1	2	1	1/2	0	1/2	4
$\Delta_j= c_j-z_j$			0	$1/2_{max}$	0	-1/2	
x_2	1	6/9	0	1	2/9	-1/9	
x_1	1	15/9	1	0	-1/9	5/9	

$\Delta_j= c_j-z_j$	0	0	-1/9	-4/9	

$x_1= 15/9=5/3$; $x_2= 6/9=2/3$; $Z= 7/3$

ß	C_b	b	40	50	0	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	[e] 18	[a] (3/2)	0	1	0	[c] -1/2	18/2/3=12
x_4	0	[f] 54	[b] 11/4	0	0	1	[d] -1/4	54/11/4=19.63
x_2	50	21	1/4	1	0	0	1/4	21/1/84
$\Delta_j= c_j-z_j$			27.5	0	0	0	-12.5	

a= 2-(1*2)/4= 2-(2/4)= (8-2)/4= 6/4=3/2

b= 3-(1*1)/4= 3-(1/4)= (12-1)/4= 11/4

c= 0-(1*2)/4= 0-(2/4)= 0-(1/2)= -1/2

d= 0-(1*1)/4= 0-(1/4)= -1/4

e= 60-(84*2)/4= 60-(168/4)= 60-42=18

f= 75-(84*1)/4=75-21=54

$\Delta j_{x1}= Cj_{x1}-Zj_{x1}= 40-((0*3/2)+(0*11/4)+(50*1/4))$

$\Delta j_{x5}= Cj_{x5}-Zj_{x5}= 40-(50/4)= 110/4= 27.5$

$= 0-((0*-1/2)+(0*-1/4)+(50*1/4))$

$= 0-(50/4)= -50/4= -12.5$

للحصول على العمود الوحدي نضرب في 3/2:

ß	C_b	b	40	50	0	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

x_1	40	12	1	0	2/3	0	-1/3	
x_4	0	21	0	0	-11/6	1	4/6	
x_2	50	18	0	1	-1/6	0	1/3	
$\Delta_j= c_j-z_j$			0	0	-110/6	0	-10/3	1380

*من الجدول نلاحظ أن جميع قيم Δ_j سالبة أو تساوي الصفر، ومنه نكون قد وصلنا للحل الأمثل.

$x_1=12$; $x_2=18$; $Z=1380u$

$$\text{Max } Z= 40x_1+50x_2$$
$$\text{s.c : } 2x_1+2x_2 \leq 60$$
$$3x_1+x_2 \leq 75$$
$$x_1+4x_2 \leq 84$$
$$x_1 ;x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z= 40x_1+50x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$
$$\text{s.c : } 2x_1+2x_2+x_3=60$$
$$3x_1+x_2+x_4=75$$
$$x_1+4x_2+x_5=84$$
$$x_j \geq 0 \quad ; j= 1 ;2 ;3 ;4 ;5$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	2	1	0	0
3	1	0	1	0
1	4	0	0	1

β	C_b/z_j	b	40	50	0	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	60	2	2	1	0	0	60/2=30
x_4	0	75	3	1	0	1	0	75/1=75
x_5	0	84	1	$(4)_{pivo}$	0	0	1	84/4=21
$\Delta_j= c_j-z_j$			40	50	0	0	0	

β← تمثل المتغيرات التي تشكل مصفوفة الوحدة (متغيرات الفرق الاصطناعية)

cb← تمثل معاملات المتغيرات β في دالة الهدف z

b⟵ الموارد المتاحة (الطرف الأيمن من المعادلات)

cj⟵ معاملات المتغيرات في دالة الهدف

في حالة Max⟵ $\Delta_j = c_j - z_j$

Min⟵ $\Delta_j = c_j - z_j$

في المحور الأفقي Δj نختار أكبر قيمة موجبة

في المحور العمودي o نختار أصغر قيمة

$\Delta j_{x1} = Cj_{x1} - Zj_{x1} = 40-((0*2)+(0*3)+(0*1)) = 40-0=40$

$\Delta j_{x2} = Cj_{x2} - Zj_{x2} = 50-((0*2)+(0*1)+(0*4)) = 50-0=50$

$\Delta j_{x3} = Cj_{x3} - Zj_{x3} = 0-((0*1)+(0*0)+(0*0)) = 0-0=0$

$\Delta j_{x4} = Cj_{x4} - Zj_{x4} = 0-((0*0)+(0*1)+(0*0)) = 0-0=0$

$\Delta j_{x5} = Cj_{x4} - Zj_{x4} = 0-((0*0)+(0*0)+(0*1)) = 0-0=0$

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم (3)	قسم علوم التسيير

الحل باستخدام طريقة Big M

حل التمرين الأول:

1- الصياغة الخطية:

نضع x_1 تمثل عدد ساعات العمل للعامل الأول

x_2 تمثل عدد ساعات العمل للعامل الثاني

$$\text{Min } Z= 2.5x_1+4x_2$$

$$\text{s.c : } x_1 \leq 100$$

$$x_2 \geq 200$$

$$x_1+x_2=250$$

$$x_1;x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z= 2.5x_1+4x_2+0x_3+0x_4+My_1+My_2$$

$$\text{s.c: } x_1+x_3=100$$

$$x_2-x_4+y_1=200$$

$$x_1+x_2+y_2=250$$

$$x_1;x_2;x_3;x_4 \geq 0$$

$$y_1 ; y_2 \geq 0$$

ß	C_b/Z_j	b	2.5	4	0	0	M	M	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_3	0	100	1	0	1	0	0	0	-
y_1	M	200	0	$(1)_{pivo}$	0	-1	1	0	200
y_2	M	250	1	1	0	0	0	1	250
$\Delta_j= c_j-z_j$			(M-2.5)	(2M-4)	0	-M	0	0	
x_3	0	100	1	0	1	1	0	0	100
x_2	4	200	0	1	0	-1	1	0	-
y_2	M	50	1	0	0	1	-1	1	50
$\Delta_j= c_j-z_j$			(M-2.5)	0	0	(M-4)	(4-2M)	0	
x_3	0	50	0	0	1	0	-1	-1	
x_2	4	200	0	1	0	-1	1	0	
x_1	2.5	50	1	0	0	1	-1	1	
$\Delta_j= c_j-z_j$				0	0	-1.5	(1.5-M)	(2.5-M)	925

x_1=50u ; x_2=200u ; Z=925da

حل التمرين الثاني:

$$\text{Min } z= 2x_1+3x_2+0x_3+0x_4+My_1+My_2$$

$$\text{s.c: } \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=6 \\ 2x_1+2x_2-x_4+y_1=4 \\ x_1+x_2+y_2=3 \\ x_1 ;x_2 ;x_3 ;x_4 \geq 0 \\ S_1 ;S_2 \geq 0 \end{cases}$$

ß	Z_j	b	2	3	0	0	M	M	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	
x_3	0	6	1	2	1	0	0	0	6
y_1	M	4	2	2	0	-1	1	0	2
y_2	M	3	1	1	0	0	0	1	3
$\Delta_j= c_j-z_j$			(3M-2)	(3M-3)	0	-M	0	0	7M
x_3	0	4	0	1	1	1/2	-1/2	0	8
x_1	2	2	1	1	0	-1/2	1/2	0	-
y_2	M	1	0	0	0	1/2	-1/2	1	2
$\Delta_j= c_j-z_j$			0	-1	0	(-1+M/2)	(1-3M/1)	0	M+4
x_3	0	3	0	1	1	0	0	-1	
x_1	2	3	1	1	0	0	0	1	
x_4	0	2	0	0	0	1	-1	2	
$\Delta_j= c_j-z_j$			0	-1	0	0	-M	2-M	6

$x_1=3$; $x_2=0$; $Z=6u$

حل التمرين الثالث:

$$\text{Min } W= 2000y_1+5500y_2$$

$$\text{s.c:} \quad \begin{cases} y_1+2y_2 \geq 20 \\ y_1+5y_2 \geq 30 \\ y_1 ; y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } W= 2000y_1+5500y_2+0e_1+0e_2+Ms_1+Ms_2$$

$$\text{s.c :} \begin{cases} y_1+2y_2-e_1+S_1=20 \\ y_1+5y_2-e_2+S_2=30 \end{cases}$$

$$y_j ; e_j ; S_j \geq 0 \quad j=1 ;2$$

ß	C_b	b	2000	5500	0	0	M	M	O
			y_1	y_2	e_1	e_2	S_1	S_2	
S_1	M	10	1	2	-1	0	1	0	10
S_2	M	6	1	(5)	0	-1	0	1	6
$\Delta_j= c_j-z_j$			(2M-2000)	(7M-5500)	-M	-M	0	0	
S_1	M	8	(3/5)	0	-1	2/5	1	-2/5	40/3
y_2	5500	6	1/5	1	0	-1/5	0	1/5	30
$\Delta_j= c_j-z_j$			3/5M-900	0	-M	(2/5M-1100)	0	1100-7/5M	
y_1	2000	40/3	1	0	-5/3	2/3	5/3	-2/3	
y_2	5500	10/3	0	1	1/3	-1/3	-1/3	1/3	
$\Delta_j= c_j-z_j$			0	0	-1500	-500	(-1500-M)	(500-M)	45000

$x_1=1500$; $x_2=500$; $Z=45000u$

مقياس رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم (4)	قسم علوم التسيير

الحل باستخدام طريقة simplex

التمرين الأول:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 70x_1+40x_2+60x_3$$

$$\text{s.c : } \begin{cases} 4x_1+2x_2+4x_3 \leq 1000 \\ 2x_1+2x_2+x_3 \leq 800 \\ x_1+3x_2+x_3 \leq 400 \\ x_1 ; x_2 ; x_3 \geq 0 \end{cases}$$

* فما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها والتي تحقق للمؤسسة أكبر ربح ممكن باستخدام طريقة simplex؟

التمرين الثاني:

باستخدام طريقة simplex أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

Max $Z= 40x_1+60x_2-20x_3$	Max $Z= 7x_1+4x_2+6x_3$	Min $Z= 6x_1+7x_2+8x_3$
s.c :	s.c :	s.c :
$3x_1+6x_2 \leq 300$	$4x_1+2x_2+4x_3 \leq 100$	$x_1+2x_2+x_3 \leq 100$
$4x_1+2x_2+x_3 \leq 220$	$2x_1+2x_2+x_3 \leq 80$	$3x_1+4x_2+2x_3 \leq 120$
$x_2+x_3 \leq 100$	$x_1+3x_2+2x_3 \leq 40$	$2x_1+6x_2+4x_3 \leq 200$
$x_1 ;x_2 ;x_3 \geq 0$	$x_1 ;x_2 ;x_3 \geq 0$	$x_1 ;x_2 ;x_3 \geq 0$

مقياس رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم (6)	قسم علوم التسيير

Min $Z= 3x_1+x_2$

s.c : $5x_1+3x_2 \leq 10$

$4x_1+6x_2 \leq 20$

$x_i \geq 0 \quad i=(1 ;2)$

الحل باستخدام طريقة big m

التمرين الأول:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

Min $Z= 30x_1+24x_2+18x_3$

s.c : $5x_1+2x_2+x_3 \geq 80$

$3x_1+3x_2+3x_3 \geq 60$

$$x_1 ; x_2 ; x_3 \geq 0$$

* ما هي الكميات المثلى الواجب إنتاجها والتي تحقق للمؤسسة أقل تكلفة ممكنة؟

التمرين الثاني:

باستخدام طريقة simplex أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه:

Min	Min	Min
$Z=100x_1+120x_2+200x_3$	$Z=100x_1+80x_2+40x_3$	$Z=80x_1+120x_2+84x_3$
s.c :	s.c :	s.c :
$x_1+3x_2+2x_3 \geq 6$	$4x_1+2x_2+x_3 \geq 7$	$5x_1+15x_2+7x_3 \geq 20$
$2x_1+4x_2+6x_3 \geq 7$	$2x_1+2x_2+3x_3 \geq 4$	$10x_1+12x_2+21x_3 \geq 15$
$x_1+2x_2+4x_3 \geq 8$	$4x_1+x_2+2x_3 \geq 6$	$4x_2+5x_2+3x_3 \geq 18$
$x_1 ; x_2 ; x_3 \geq 0$	$x_1 ; x_2 ; x_3 \geq 0$	$x_1 ; x_2 ; x_3 \geq 0$

البرمجة الخطية: الحل باستخدام simplex

التمرين الأول:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.c: } \begin{cases} x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

* أوجد الكميات المنتجة من x_1 و x_2 التي تعظم ربح المؤسسة.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

$$\text{s.c : } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 150 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 120 \\ x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 \geq 0 \end{cases}$$

حيث أن: x_1 عدد الدراجات الهوائية من النوع A

x_2 عدد الدراجات الهوائية من نوع B

x_3 عدد الدراجات الهوائية من نوع C

x_4 عدد الدراجات الهوائية من نوع D

* حدد عدد الدراجات الهوائية من الأنواع D;C;B;A التي يجب على المؤسسة إنتاجها للحصول على أكبر قدر ممكن من الأرباح، وذلك باستخدام طريقة simplex.

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم (8)	قسم علوم التسيير

التمرين الثاني:

$$\text{Max } Z= x_1+2x_2+3x_3+2x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{s.c : } \begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_5=150 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+4x_4+x_6=120 \\ x_1 ;x_2 ;x_3 ;x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ß	C_b/Z_j	b	1	2	3	2	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	0	150	2	1	2	3	1	0	75
x_6	0	120	3	4	2	4	0	1	60
$\Delta_j= c_j-z_j$			1	2	13	2	0	0	0
x_5	0	30	-1	-3	0	-1	1	-1	
x_3	3	60	3/2	2	1	2	0	1/2	
$\Delta_j= c_j-z_j$			-7/2	-4	0	-4	0	-3/2	180

$$\begin{cases} x_1=x_2=x_4=x_6=0 \\ x_3=60 \\ x_5=30 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z= x_1+2x_2+3x_4$$

$$\text{s.c : } \begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+3x_4 \leq 150 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+4x_4 \leq 120 \\ x_i \geq 0 \qquad i= (1 ;2 ;2 ;4) \end{cases}$$

Z=180

التمرين الثاني:

* جد الحل الأمثل لنماذج البرمجة الخطية التالية باستخدام الطريقة المبسطة:

1/ Max Z= $10x_1+10x_2$ s.c : $2x_1+4x_2 \leq 20$ $3x_1 \leq 15$ $x_1 ; x_2 \geq 0$	2/ Max Z= $2x_1+4x_2$ s.c : $2x_1+x_2 \leq 4$ $x_1+4x_2 \leq 8$ $x_1 ; x_2 \geq 0$
3/ Max Z= $80x_1+50x_2$ s.c : $4x_1+2x_2 \leq 400$ $3x_1+5x_2 \leq 750$ $5x_1+x_2 \leq 400$ $x_1 ; x_2 \geq 0$	4/ Max Z= $8x_1+5x_2$ s.c : $4x_1+2x_2 \leq 20$ $4x_1+8x_2 \leq 32$ $2x_1 \leq 4$ $x_1 ; x_2 \geq 0$

Big M :

5/ Max Z= $10x_1+15x_2$ s.c : $x_1+x_2 \leq 300$ $x_2= 200$ $x_1 ; x_2 \geq 0$	6/ Max Z= $3x_1-x_2$ s.c : $x_1-2x_2 \geq 4$ $x_1 \geq 4$ $x_1+x_2 \leq 8$ $x_1 ; x_2 \geq 0$

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم 04	قسم علوم التسيير

البرمجة الخطية: طريقة Big M

ملاحظة:

المعاملات في دالة الهدف		
	Max	Min
إضافة متغير الفرق $\leq$ (أصغر أو يساوي)	0	0
إضافة متغير اصطناعي =	-M	+M
طرح متغير الفائض $\geq$	0	0
و إضافة متغير اصطناعي	-M	+M

التمرين الأول:

نعتبر النماذج التالية:

1/ Min $Z= 2.5x_1+4x_2$	2/ Min $Z= 2x_1+3x_2$
s.c :	s.c :
$x_1 \leq 100$	$x_1+x_2 \leq 6$
$x_2 \geq 200$	$2x_1+2x_2 \geq 4$
$x_1+x_2=250$	$x_1+x_2=3$

$x_1 ; x_2 \geq 0$	$x_1 ; x_2 \geq 0$

* حلها باستخدام طريقة Big M أو ما يسمى بطريقة الجزاءات أو العقوبات.

التمرين الثاني:

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2$$

$$\text{s.c} : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 5500 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

* أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بعد تحويله للنموذج المرافق.

التمرين الثالث:

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 8x_2$$

$$\text{s.c} : \begin{cases} -x_1 + x_2 = 200 \\ x_1 \leq 80 \\ x_2 \geq 60 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = (1 ; 2)$$

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم 05	قسم علوم التسيير

تمارين حلو المسألة الثنائية (1)

1/ Min $Z= 5x_1+2x_2+x_3$ s.c : $2x_1+3x_2+x_3 \geq 20$ $6x_1+8x_2+5x_3 \geq 30$	Max $W= 20w_1+30w_2+40w_3+50w_4$ s.c : $2w_1+6w_2+7w_3+w_4 \leq 5$ $3w_1+8w_2+w_3+2w_4 \leq 2$

$7x_1+x_2+5x_3 \geq 40$ $x_1+2x_2\ 4x_3 \geq 50$ $x_1\ ;x_2\ ;x_3 \geq 0$	$w_1+5w_2+5w_3+4w_4 \leq 1$ $w_1;w_2;w_3;w_4 \geq 0$
2/Max Z= $2x_1+x_2$ s.c : $x_1+5x_2 \leq 10$ $x_1+3x_2 \leq 6$ $2x_1+2x_2 \leq 8$ $x_1\ ;x_2 \geq 0$	Min W= 10w1+6w2+8w3 s.c : $w_1+w_2+w_3 \geq 2$ $5w_1+3w_2+2w_1 \geq 1$ $w_1;w_2;w_3 \geq 0$
3/Max Z= $5x_1+2x_2+4x_3$ s.c : $x_1+2x_2+x_3 \leq 10$ $2x_1-x_2+3x_3 \leq 8$ $x_1\ ;x_2 \geq 0$	Min W= $10w_1+8w_2$ s.c : $w_1+2w_2 \geq 5$ $2w_1-w_2 \geq 2$ $w_1+3w_2 \geq 4$ $w_1;w_2 \geq 0$
Min Z= $4x_1+5x_2+3x_3$ s.c : $2x_1+3x_2+4x_3 \leq 2500$ $x_1+3x_2+x_3 \geq 7500$ $x_1 \geq 250$ $x_2 \geq 300$ $x_3 \geq 0$ $x_1\ ;x_2\ ;x_3 \geq 0$	

البرمجة الخطية: النموذج المرافق

التمرين الأول:

نفترض أنه لدينا النموذج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 12x_1 + 15x_2$$

$$\text{s.c : } \begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1- أوجد حل النموذج الأصلي

2- اشتق النموذج المرافق وأوجد الحل الأمثل له انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج الأصلي

3- تأكد من الحل بحل النموذج المرافق باستخدام طريقة simplex (big m)

تطبيق رياضيات المؤسسة	سلسلة رقم 6	قسم علوم التسيير

حل التطبيق

1- إيجاد الحل الأمثل للنموذج الأصلي:

$$\text{Max } z= 12x_1+15x_2+0x_3+0x_4+0x_5$$

$$\text{s.c : } \begin{cases} 6x_1+6x_2+x_3=36 \\ 4x_1+2x_2+x_4=30 \\ 4x_1+8x_2+x_5=40 \\ x_1;x_2;x_3;x_4;x_5 \geq 0 \end{cases}$$

ß	C_b	b	12	15	0	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	36	6	6	1	0	0	6
x_4	0	30	4	2	0	1	0	15
x_5	0	40	4	8	0	0	1	5
$\Delta_j= c_j-z_j$			12	15	0	0	0	0
x_3	0	6	3	0	1	0	-3/4	2
x_4	0	20	3	0	0	1	-1/4	20/3
x_2	15	5	1/2	1	0	0	1/8	10
$\Delta_j= c_j-z_j$			3	0	0	0	15/8	75
x_1	12	2	1	0	1/3	0	-1/4	
x_4	0	14	0	0	-1	1	1/2	
x_2	15	4	0	1	-1/6	0	1/4	

$\Delta_j = c_j - z_j$	0	0	-3/2	0	-3/4	84

$x_1^*=2$; $x_2^*=4 \rightarrow Z=84$

$x_3=x_5=0$ $W= 36(3/2)+30(0)+40(3/4)= 84$

$x_4=14$

2- صياغة النموذج المرافق:

⟵ متغيرات الحل الأساسي هي على الترتيب x_3; x_2; x_1 ومعاملاتها في سطر دالة الهدف Δ_j في جدول الحل الأمثل هي على الترتيب 3/2-، 0، و 3/4-.

⟵ بما أن x_3 جاءت في القيد الأول للنموذج الأولي فهي تقابل المتغير w_1 في النموذج المرافق وبالتالي فإن:

$w_1= \left|-3/2\right| =3/2$

⟵ نفس الشيء بالنسبة لـ: x4; x5

$w_2=0$

$w_3= \left|-3/4\right| =3/4$

$Z^*=W^* \Rightarrow W^*=84$

3- حل النموذج المرافق:

$$\text{Min } W= 36w_1+30w_2+40w_3+Mw_5+Mw_6-0w_4-0w_6$$

$$\text{s.c: } 6w_1+4w_2+4w_3-w_4+w_5=12$$

$$6w_1+2w_2+8w_3-w_6+w_7=15$$

$$w_j \geq 0 \qquad j=(1;\ldots;7)$$

$$\begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 8 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مسائل النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع الوحدات أو المنتجات من عدة مصادر للعرض إلى عدة مواقع للطلب بأقل تكلفة ممكنة.

يكون جدول النقل حسب الصيغة المعرفة بالجدول التالي (بفرض أن عدد مصادر العرض هو 3 وعدد مواقع الطلب هو 3).

إلى / من	A	B	C	العرض
I	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	a_1
II	c_{21}	c_{22}	c_{23}	a2

	x_{21}	x_{22}	x_{23}	
III	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	a3
الطلب	b1	b2	b3	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

حيث أن:

A;B;C ← مواقع الطلب

I;II;III ← مواقع العرض

C_{ij} ← تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى الموقع j

X_{ij} ← عدد الوحدات المنقولة

الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل $\sum a_i = \sum b_j$ العرض=الطلب

1- الحل الأساسي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي:

إلى / من	A	B	C	العرض
1	7 18	3 4	10 -	~~22~~ 4 0
2	4 -	6 18	0 6	~~24~~ ~~6~~ 0
3	5	8	9	~~14~~ 0

	-	-	14	
الطلب	~~18~~ 0	~~22~~ ~~18~~ 0	~~20~~ ~~14~~ 0	60 / 60

C= (18*7)+(4*3)+(18*6)+(6*0)+(14*9)=372

إلى / من	A	B	C	العرض
1	7 x_{11} 18	3 x_{12} 4	10 x_{13} -	22
2	4 x_{21} -	6 x_{22} 18	0 x_{23} 6	24
3	5 x_{31} -	8 x_{32} -	9 x_{33} 14	14
الطلب	18	22	20	60 / 60

2- تحسين الحل الأمثل:

طريقة التوزيع المعدل:

* عدد الخلايا المشغولة = 1-n+m

1-3+3= 5

5=5

* تكوين معادلات الخلايا المملوءة: $C_{ij}= U_i+V_j$

نفرض أن:	$C_{11}=u_1+v_1=7$
$u_1=0$	$C_{12}=u_1+v_2=3$
$u_2=3$	$C_{22}=u_2+v_2=6$
$u_3=12$	$C_{23}=u_2+v_3=0$
$v_1=7$	$C_{33}=u_3+v_3=9$
$v_2=3$	
$v_3=-3$	

* حساب التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة $C\hat{}_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$

$x_{13} \rightarrow C_{ij}-U_i-V_j= 10-0+3=13$

$x_{21} \rightarrow 4-3-7= -6$

$x_{31} \rightarrow C_{31}-U_3-V_1=5-12-7= -14$

$x_{32} \rightarrow C_{32}-U_3-V_2=8-12-3= -7$

نختار الخلية الفارغة x_{31} لأنها تحمل أكبر قيمة سالبة (-14) وبالتالي نقوم برسم المسار المغلق الذي يبدأ بـ$x31$ وينتهي بـx_{31}

$(+)x_{31} \rightarrow (-)x_{33} \rightarrow (+)x_{23} \rightarrow (-)x_{22} \rightarrow (+)x_{12} \rightarrow (-)x_{11} \rightarrow (+)x_{31}$

الخلايا التي تحمل إشارة سالبة في المسار هي: $x_{11}=18$; $x_{22}=18$; $x_{33}=14$

طريقة التوزيع المعدل: تحسين الحل الأولي (الأساسي)

تعتبر هذه الطريقة أسهل وأسرع من طريقة المسار المتعرج، إذ لا تتطلب رسم جميع المسارات المتعرجة، مما يقلل من الجهد والوقت، يمكن إتباع الخطوات التالية لاستخدام هذه الطريقة:

- ✓ التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة = $m+n-1$
- ✓ يتم تكوين معادلة لكل خلية مملوءة في جدول الحل الأساسي $C_{ij}=U_i+V_j$.

U_i ← المتغير الخاص بالصف i الذي تقع فيه الخلية المعنية.

V_j ← المتغير الخاص بالعمود j الذي تقع فيه الخلية المعنية.

C_{ij} ← تكلفة الخلية التي تقع في الصف i و العمود j.

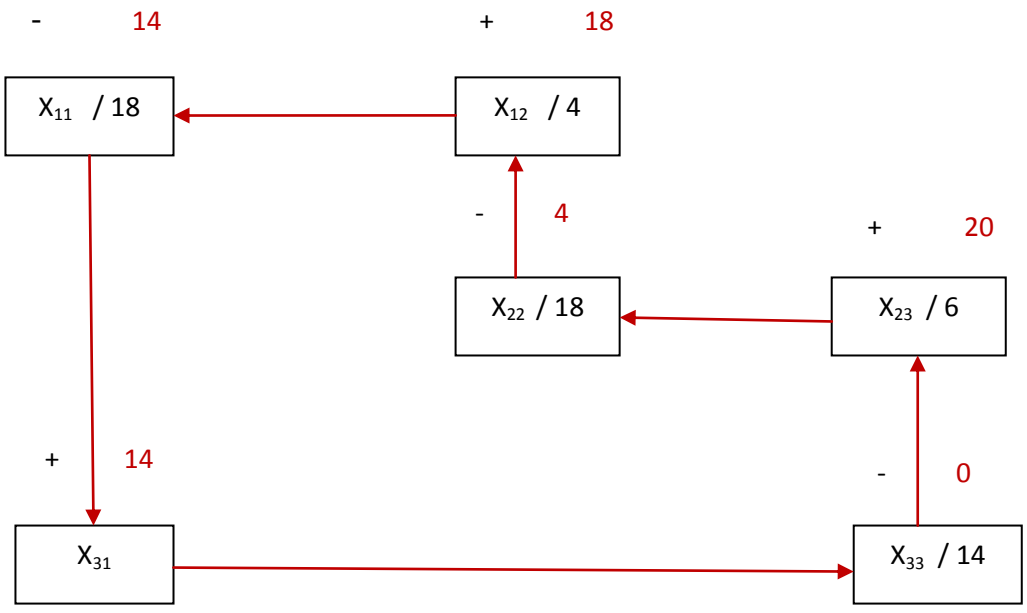
- ✓ إيجاد الحل للمعادلات للخلايا المملوءة بفرض أن $U_1=0$.
- ✓ حساب التكلفة الغير مباشرة للخلايا الفارغة وفقا للمعادلة $C^{\wedge}_{ij}=C_{ij}-(U_i+V_j)$

فإذا كانت هناك خلية أو أكثر من خلية مشغولة (فارغة)، تكون التكلفة غير المباشرة لها قيمة سالبة، فهذا يعني إمكانية تطوير الحل الأساسي لتخفيض التكاليف، وتعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة، ثم نكون المسار المغلق والذي يبدأ من الخلية ذات أكبر قيمة سالبة وينتهي بها.

- ✓ يبدأ المسار المغلق بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها، تعقبها علامة سالب (−) للخلية التي تليها في المسار وهكذا.
- ✓ يتم إشغال الخلية الفارغة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في المسار، بالكمية الأقل $Min(x_{nm})$، ويجب طرح المقدار وإضافته للخلايا المملوءة وفق إشارة المسار المغلق.
- ✓ ثم نعيد نفس الخطوات السابقة ونتوقف عن تحسين الحل عندما تكون كل قيم $C^{\wedge}_{ij}$ موجبة.

Min (x33=14 ;x22=18 ;x11=18)=x33=14

هدا يعني إضافة المقدار (14) إلى القمم التي تحمل الإشارة الموجبة وطرح المقدار (14) من القمم السالبة في المسار المغلق، وذلك كالتالي:



وبعد تعديل قيم المتغيرات الأساسية نحصل على الجدول التالي:

إلى / من	A	B	C	العرض
1	7 18	3 4	10 -	22
2	4 -	6 18	0 6	24
3	5 -	8 -	9 14	14
الطلب	18	22	20	60 / 60

C=(4*7)+(18*3)+(4*6)+(20*0)+(14*5)= 176

3- إيجاد التكلفة الغير مباشرة للخلايا الغير مملوءة:

$C^{\wedge}_{ij}= C_{ij}-(U_i+V_j)$

$C^{\wedge}_{21}= C_{21}-(U_2+V_1)=14-(-2+10)=6$

$C^{\wedge}_{22}= C_{22}-(U_2+V_2)=17-(9+8)=11$

$C^{\wedge}_{23}=C_{23}-(U_2+V_3)=5-(-2+6)=1$

$C^{\wedge}_{31}=C_{31}-(U_3+V_1)=18-(-1+10)=9$

$C^{\wedge}_{33}=C_{33}-(U_3+V_3)=11-(-1+6)=6$

$C^{\wedge}_{34}=C_{34}-(U_3+V_4)=9-(-1+4)=5$

بما أن قيم التكاليف الغير مباشرة للخلايا الغير مملوءة موجبة، فإن الحل الذي بين أيدينا هو الحل الأمثل بتكلفة Max Z=24500.

مثال:

		V_1	V_2	V_3	V_4	
		المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4	الكميات المنتجة
U_1	المركز 1	20 | 10	17 | -	15 | -	10 | 120	22
U_2	المركز 2	16 | 10	14 | 40	18 | -	13 | -	24
U_3	المركز 3	12 | 20	15 | -	11 | 80	10 | -	14
	الكميات المطلوبة	40	40	80	120	280

* جد الحل الأفضل مستخدما طريقة الأقل تكلفة في المصفوفة.

* اختبار أمثلة الحل الأفضل باستخدام طريقة (عوامل الضرب).

الحل:

Z= 3240

عدد الخلايا المملوءة = $m+n-1$

$4+3-1=6$

التكاليف المباشرة للخلايا المملوءة: $C_{ij}=U_i+V_j$; $0=U_1$

$C_{33}=U_3+V_3=11 \leftarrow 19=V_3$

$C_{11}=U_1+V_1=20 \Rightarrow V_1=20$

$C_{14}=U_1+V_4=10 \Rightarrow V_4=10$

$C_{21}=U_2+V_1=16 \Rightarrow U_2=-4$

$C_{22}=U_2+V_2=14 \Rightarrow V_2=18$

$C_{31}=U_3+V_1=12 \Rightarrow U_3=-8$

بافتراض $u1=0$ نحصل على ما سبق.

حساب التكاليف الغير مباشرة للخلايا الفارغة: $C^{\wedge}_{ij}= C_{ij}-(U_i+V_j)$

$C^{\wedge}_{12}=C_{12}-(U_1+V_2)=17-(0+18)=-1$

$C^{\wedge}_{13}=C_{13}-(U_1+V_3)=15-(0+9)=-4$ أكبر

بالقيمة المطلقة

$C^{\wedge}_{23}=C_{23}-(U_2+V_3)=18-(-4+19)=3$

$C^{\wedge}_{24}=C_{24}-(U_2+V_4)=13-(-4+10)=7$

$C^{\wedge}_{32}=C_{32}-(U_3+V_2)=15-(-8+18)=5$

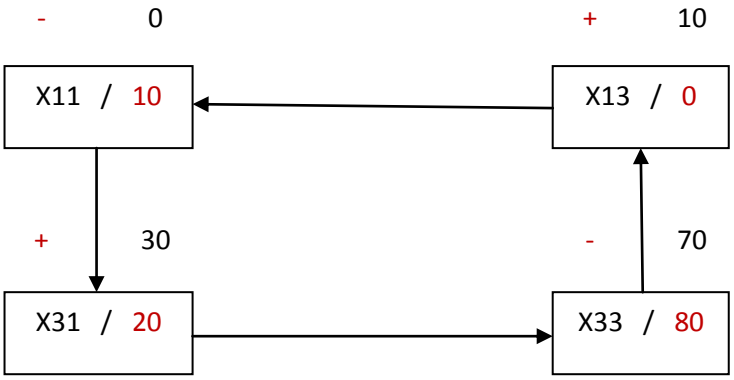
$C^{\wedge}_{34}=C_{34}-(U_3+V_4)=19-(-8+10)=17$

المسار: $(+)x_{13} \rightarrow (-)x_{11} \rightarrow (+)x_{31} \rightarrow (-)x_{33} \rightarrow (+)x_{13}$

الخلايا ذات الإشارة السالبة هي: $Min(10;20)$; $Min(x_{11};x_{33})$

بالتكاليف الوحدية نختار: $x_{11}=10$

نضيف 10 للخلايا التي تحمل الإشارة الموجبة ونطرحها من الخلايا ذات الإشارة السالبة



*يصبح جدول الحل:

20 0	17 -	15 10	10 120	130
16 10	14 40	18 0	13 -	50
12 30	15 -	11 70	19 -	100
40	10	80	120	

*نقوم بإعادة نفس الخطوات حتى الحصول على $C\hat{}_{ij} > 0$ كلها.

المراجع

– أبو القاسم مسعود الشيخ، **بحوث العمليات**، المجموعة العربية للتدريب و النشر، القاهرة، مصر، الطبعة الثانية، 2014.

2– اليامين فالتة، **بحوث العمليات**، ايتراك للنشر و التوزيع، الطبعة الأولى، القاهرة، مصر، 2006.

3– بوسهمين أحمد، طافر زهير، **فعالية استخدام أسلوب البرمجة الخطية في مؤسسة الأعمال**، ورقة بحثية مقدمة إلى الملتقى الوطني السادس حول الأساليب الكمية و دورها في اتخاذ القرارات الإدارية، يومي 23-24 نوفمبر 2008، جامعة 20 أوت 1955، سكيكدة.

4– جلال إبراهيم العبد، **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**، دار الجامعة الجديدة، الإسكندرية، مصر، 2014.

5– حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، **مدخل إلى بحوث العمليات**، دار مجدلاوي للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007.

6– سالم إلياس،مطبوعة بعنوان: **محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة**، جامعة مُحَّد بوضياف، المسيلة، 2016-2017.

7– سهيلة عبد الله سعيد، **الجديد في الأساليب الكمية و بحوث العمليات**، دار الحامد للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2007.

8– صوار يوسف، طاوش قندوسي، **محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B–** كلية العلوم الاقتصادية التجارية و علوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر.

9– عبد الرحمن بن مُحَّد أبو عمه، مُحَّد أحمد العش، **البرمجة الخطية**، مطبعة جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى، المملكة العربية السعودية، 1990.

10– عبد الرزاق الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية.

11– عبد الستار أحمد مُحَّد الآلوسي، **أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)**، دار القلم للنشر، الإمارات.

12– علي حازم اليامور، **استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود**، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء و المعلوماتية، 6-7 ديسمبر 2009، كلية علوم الحاسبات و الرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

13– مُحَّد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.

14– مُحَّد عبد العال النعيمي و آخرون، **بحوث العمليات**، دار وائل للنشر،عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.

15– مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، **بحوث العمليات و فاعلية القرارات**، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997.

16– مكيد علي، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية "نظرية الشبكات و مسائل النقل و التخصيص"**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.

17– منعم زمزير الموسوي، **بحوث العمليات–مدخل علمي لاتخاذ القرارات–**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الأولى، 2009.

18– يحياوي إلهام، **محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة**، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية و علوم التسيير،جامعة الحاج لخضر، باتنة، دون سنة النشر.

19-جلال إبراهيم العبد إدارة الانتاج و العمليات (مدخل كمي) دار جامعية 2002

المراجع

1– عبد الرحمن بن مُحَّد أبو عمه، مُحَّد أحمد العش، **البرمجة الخطية**، مطبعة جامعة الملك سعود، الطبعة الأولى، المملكة العربية السعودية، 1990.

2– عبد الرزاق الموسوي، **المدخل لبحوث العمليات**، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية.

3– عبد الستار أحمد مُحَّد الآلوسي، **أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)**، دار القلم للنشر، الإمارات.

4– علي حازم الياسور، **استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود**، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء و المعلوماتية، 6-7 ديسمبر 2009، كلية علوم الحاسبات و الرياضيات، جامعة الموصل، العراق.

5– مُحَّد راتول، **بحوث العمليات**، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، الطبعة الثانية، 2006.

6– مُحَّد عبد العال النعيمي و آخرون، **بحوث العمليات**، دار وائل للنشر،عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.

7– مصطفى أبو بكر، مصطفى مظهر، **بحوث العمليات و فاعلية القرارات**، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 1997.