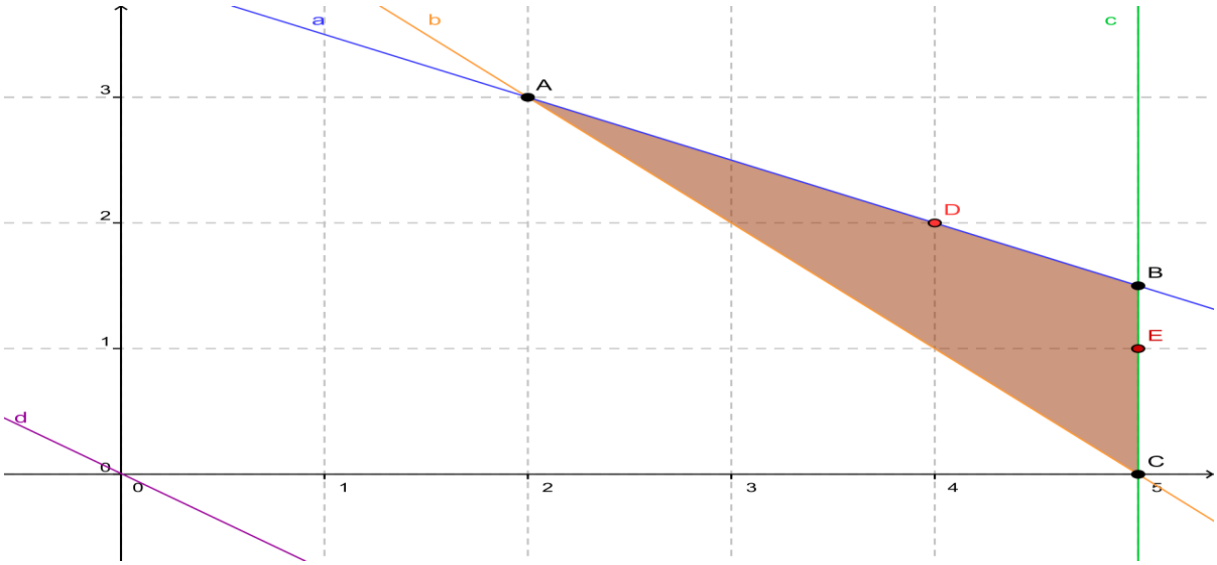
الجمهوريّة الجزائريّة الدّيمقراطيّة الشّعبيّة
وزارة التّعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أبو بكر بلقايد تلمسان
كليّة العلوم الاقتصاديّة، التّجاريّة وعلوم التّسيير
قسم علوم التّسيير

مطبوعة بيداغوجيّة بعنوان:

محاضرات وتمارين محلولة في مقياس رياضيات المؤسّسة

موجّهة لطلبة السّنة الثّانية ليسانس (شعبة علوم التّسيير)



من إعداد: د. خربوش محمّد
أستاذ محاضر- ب -

السّنة الجامعيّة: 2022 - 2023

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

المحتويات	الصّفحة
المقدّمة العامّة	01
الفصل الأوّل: البرمجة الخطيّة	
تمهيد	02
1- نشأة البرمجة الخطيّة	02
2- مفهوم البرمجة الخطيّة	02
3- مجالات استخدام البرمجة الخطيّة	03
3-1 - في حالة التّعظيم	03
3-2- في حالة التّدنية	03
4- تطبيقات البرمجة الخطية	04
5- فوائد البرمجة الخطية	04
6- شروط استخدام البرمجة الخطيّة	04
7- متطلّبات مشكلة البرمجة الخطيّة	05
8- فرضيات البرمجة الخطية	06
9- عناصر البرمجة الخطية	07
10- الشكل العامّ لنموذج البرمجة الخطيّة	07
11- صيغ النماذج الخطيّة	08
11-1- الصّيغة القانونيّة (النظاميّة): Forme *canonique*	08
11-2- الصّيغة القياسية (Forme standard)	09
11-3- الصيغة العامة (المختلطة) (Forme mixte)	10
12- محاسن وعيوب البرمجة الخطيّة	10

12-1- المزايا	10
12-2- العيوب	10
13- صياغة نموذج البرمجة الخطيّة	11
14- أمثلة عن صياغة المشكلة (المسألة)	12
تمارين محلولة	16
الفصل الثّاني : الطّريقة البيانيّة	
تمهيد	23
1- حلول مشكلة البرمجة الخطيّة	23
2- الطريقة البيانيّة	23
3- خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية	23
3-1- رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني	23
3-2- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة	24
3-3- تحديد إحداثيّات النّقاط الحديّة	24
3-4- حساب قيم دالّة الهدف Z	24
3-5- عمليّة اتّخاذ القرار	24
4- الحالات الخاصّة من الطّريقة البيانيّة	28
4-1- الحالة الأولى: حالة الحلول المتعدّدة أو حالة تعدّد الحلول المثلى	28
4-2- الحالة الثّانية: عدم وجود حلّ ممكن للمسألة	30
4-3- الحالة الثّالثة: حالة حيادية أحد القيود أو حالة وجود قيد محايد لا يؤثّر على الحلّ الممكن	32
4-4- الحالة الرّابعة: لا نهائيّة الدالّة الاقتصاديّة أو حالة حلول غير محدودة	34
تمارين محلولة	36
الفصل الثّالث : طريقة السّمبلكس	

تمهيد	49
1- طريقة السّمبلكس	49
2- مراحل حلّ النّموذج الخطّي بطريقة السّمبلكس	49
3- تعريفات هامّة	51
3-1- العنصر المحوري (البؤرة)	51
3-2- المعادلة المحوريّة	51
3-3- عناصر التّبديل	51
4- خطوات الحلّ باستخدام طريقة Big M	54
تمارين محلولة	57
الفصل الرّابع : النّموذج المرافق وتحليل الحساسيّة	
تمهيد	63
1- تعريف النموذج الثنائي	63
2- فوائد التحويل من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق	63
3- أهمية النموذج المرافق	63
4- قواعد الانتقال من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق	64
5- القواعد الأساسية لتشكيل النموذج الثنائي	66
5-1- الحالة الأولى: ظهور القيد i بإشارة ≥ في نموذج Max	66
5-2- الحالة الثانية: ظهور القيد i بإشارة = في نموذج Max	67
6 - استنتاج الحلّ الأمثل للبرنامج الأوّلي والحلّ الأمثل للبرنامج الثّنائي	68
7- تحليل الحساسيّة	70
7-1- تأثير التغيّر في معاملات متغيّرات القرار في دالّة الهدف (مدى الأمثليّة)	70
7-2- التغيّرات في قيم الطّرف الأيمن للقيود	74
7-3- إضافة متغيّر جديد	75

4-7- تأثير إضافة قيد جديد	76
5-7- التغيّر في معاملات (احتياجات) متغيّرات القرار في القيود	78
تمارين محلولة	79
الفصل الخامس : نماذج النّقل	
تمهيد	85
1- تعريف نموذج النّقل	85
2- متطلّبات بناء نموذج البرمجة الخطيّة لمشكلة النّقل	85
3- عرض مسألة النقل	85
4- تشكيل جدول مسائل النقل	86
5- الصياغة الرياضية لمسائل النقل	87
6- حل مسائل النقل	88
6-1- المرحلة الأولى: تحديد الحل الابتدائي	88
6-1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية	88
6-1-2- طريقة التكاليف الدنيا	89
6-1-3- طريقة فوجل	89
6-2- المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي	93
6-2-1- طريقة المسار المتعرج	94
6-2-1-1- خطوات عمل المسار المغلق وطريقة المسار المتعرج	94
6-2-2- طريقة التوزيع المعدلة	95
6-2-2-1- خطوات طريقة التوزيع المعدلة	95
الفصل السّادس : البرمجة غير الخطيّة	
تمهيد	96
1- مفهوم البرنامج غير الخطّي	96

2- طرق حلّ نماذج البرمجة غير الخطيّة	96
3- تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحلّ الأمثل	97
3-1- حدّ أعظم أو حدّ أدنى غير مقيّد	97
3-2- قيمة عظمى – مقيّد	97
3-3- قيمة دنيا – مقيّد	97
3-4- الدالّة الخطيّة	97
4- طرق الحلّ	97
الخاتمة العامّة	99
قائمة المراجع	100

المقدّمة العامّة

المقدّمة العامّة

مقدّمة عامّة:

إنّ عملية حل المشاكل الإدارية ليست بالعملية السهلة أو البسيطة، لأنّها عادة ما تحتوي على أسئلة ومسائل تنطوي على المجهول أو على ما هو مشكوك فيه. إن عملية حل المشكلات واتخاذ القرارات عملية رشيدة تسير وفق منهج علمي، ويعرّف المنهج العلمي في اتخاذ القرار بأنه (الأسلوب الذي يرتكز على الموضوعية والتمحيص العلمي والتفكير المنطقي غير المتحيز الذي يقوم على منهج علمي محدد يبدأ بتشخيص المشكلة أو الموقف، وتحديد الهدف أو الأهداف، وينتهي باختيار القرار الأنسب الذي يعالج المشكلة ويحقق الهدف) لذلك اتّفق معظم الباحثين على ضرورة تطبيق الأساليب الكميّة والتخلّي عن الطّرق القديمة المبنيّة على التوقّعات بناء على الحالات السّابقة أو الحدس والتخمين. إن هذه الأساليب العلميّة في مجموعها تعرف باسم الأساليب الكمية أو ما يسمى باسم التحليل الكمي أو بحوث العمليات (رياضيات المؤسسة)

رياضيات المؤسسة هي تطبيق علمي للطرق الرياضية والإحصائية من أجل حل مختلف المشاكل الإدارية والاقتصادية، التي تواجه متخذ القرار. تعتمد رياضيات المؤسّسة على الرّياضيات التّطبيقيّة التّي تستخدم منهجيّة بحوث العمليّات وأساليبها في حلّ المشكلات واتّخاذ القرارات الإداريّة، من بين الأساليب التّي تستخدمها رياضيات المؤسّسة في دراسة مختلف المشاكل الإداريّة: البرمجة الخطية، نماذج النقل، نماذج التّخصيص..... إلخ

نسعى من خلال هذه المطبوعة إلى تقديم أبرز مكونات مقياس رياضيات المؤسسة وفي عرضنا لفصول هذه المطبوعة راعينا السّهولة والتّوسّع في الشّرح مع إعطاء أمثلة وحلّ تمارين، وقد وزّعت محتويات هذه المطبوعة على فصول أساسيّة جاءت على النّحو التّالي:

الفصل الأوّل: البرمجة الخطيّة

الفصل الثّاني: الطّريقة البيانيّة

الفصل الثّالث: طريقة السّمبلكس

الفصل الرّابع: النّموذج المرافق وتحليل الحساسيّة

الفصل الخامس: نماذج النّقل

الفصل السّادس: البرمجة غير الخطيّة

الفصل الأوّل:

البرمجة الخطيّة

الفصل الأوّل: البرمجة الخطيّة

تمهيد:

البرمجة الخطيّة هي أحد الأساليب الرياضيّة المهمّة لبحوث العمليّات تمّ تطويرها واستخدامها من أجل معالجة النّماذج الخطيّة في بحوث العمليّات.

1- نشأة البرمجة الخطيّة:

خلال الحرب العالمية الثانية، نتيجة محدودية الموارد العسكرية، كلّفت الحكومة البريطانية فريقاً من كبار العلماء بدراسة مسائل كيفية توزيع مواردها العسكرية، وما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري، ولقد أطلق على دراسات هذا الفريق اسم بحوث العمليات أو البحث العملياتي. ثم أخذت هذه التسمية تطلق على كافة الأبحاث والدراسات التي تتعامل مع مسائل البرمجة أو التوزيع ومسائل اتخاذ القرار. وقد حثّت النتائج المشجعة لفريق بحوث العمليات البريطاني الإدارة العسكرية الجوية الأمريكية على تكوين فريق مشابه للقيام بالدراسات اللازمة في هذا المجال. فقد وجدت هذه الفرق أن أساليب مسائل التفضيل التقليدية، كطريقة مضاريب لاغرانج مثلاً، ليست ذات فائدة كبيرة في حل مسائل البرمجة الخطية، مما استوجب إيجاد أساليب أكثر فعاليّة. في عام 1947 م طور جورج دانتزغ عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) لحل مسألة البرمجة الخطية؛ لكن لم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956م. وبعد نشر الطريقة المبسطة (السمبلكس) حدث تسارع كبير في استخدام وتطوير البرمجة الخطية. ومن المشاركات التطويرية المهمة في ذلك المجال أعمال جال Gal التي قام بها وحده أو بمشاركة آخرين معه، إذ قاموا بصياغة المسألة الثنائية لمسألة البرمجة الخطية. وحاليا، تستخدم البرمجة الخطية في مختلف المجالات الصناعية الاقتصادية، الخدماتية والعسكرية.

2- مفهوم البرمجة الخطيّة:

- اصطلاحا فإن كلمة **البرمجة** تعني سلسلة من الخطوات المنظمة يدويا أو آليا للوصول إلى الحل الذي يعظم أو يدني دالة النموذج في ظل مجموعة من القيود خلال فترة زمنية، وكلمة **خطية** تعني وجود علاقة خطية بين متغيرات دالة الهدف أي تتغير قيم المخرجات تبعا لتغير قيمة المدخلات بنفس النسبة أو في نفس الاتجاه زيادة أو نقصاً.
- البرنامج الخطّي هو صيغة رياضيّة مشتقّة من واقع معيّن هدفها البحث عن أمثليّة الاستخدام عن طريق دالّة رياضيّة تتكوّن من مجموعة من المتغيّرات من الدّرجة الأولى، تسمّى **بدالّة الهدف أو الدّالة الاقتصاديّة** في وجود مجموعة من القيود تكون في شكل معادلات أو متراجحات أو هما معا من الدّرجة الأولى أيضا
- البرمجة الخطيّة هي الطّريقة الرّياضيّة لتخصيص الموارد النادرة أو المحدّدة من أجل تحقيق هدف معيّن ضمن شروط أو قيود معيّنة حيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف والقيود في صورة معادلات أو متباينات خطيّة.
- البرمجة الخطيّة هي الطّريقة الرّياضيّة التّي تستخدم للمساعدة في التّخطيط وصنع القرارات المتعلّقة بالتّوزيع الأمثل للموارد المتاحة وذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التّكاليف

- البرمجة الخطيّة هي إحدى الأساليب الكميّة التّي تستخدم للمساعدة في حلّ المشكلات واتّخاذ القرارات الإداريّة. سميّت البرمجة الخطيّة بهذا الاسم لأنّها تستخدم معادلة الخطّ المستقيم في بناء النموذج الرّياضي الذّي يتكوّن من معادلتين أو أكثر ويساعد على تحيدي بدائل الحلول الممكنة واختيار البديل الأفضل من بينها.
- تعرّف البرمجة الخطيّة على أنّها أسلوب رياضي يستخدم لإيجاد الحلّ الأمثل (قيمة عظمى – قيمة صغرى) لاقتران خطّي معطى (اقتران الهدف في ظلّ وجود مجموعة من القيود التّي يمكن التّعبير عنها بمتباينات خطيّة.
- **البرمجة الخطية** بالإنجليزية (Linear programming) : هي أسلوب أساسي ومهم يساعد متخذي القرار على اتخاذ قرارات صحيحة وبطريقة علمية. وتعد مسائل البرمجة الخطية جزءاً من مسائل البرمجة الرياضية التي تشمل الخطية منها واللاخطية؛ ثم إن البرمجة الرياضية هي بدورها جزء من موضوع أكثر شمولية، يسمى بحوث العمليات أو البحث العملياتي، التي تتعلق جميعها بمسائل التنظيم والإدارة ومسائل النقل والزراعة والصناعة وما إلى ذلك.
- الأسلوب الرياضي الذّي يهدف الى تعظيم Maximiser أو تصغير Minimiser دالة خطية تسمّى دالة الهدف ومحدّدة في وجود حدود معروفة تسمّى القيود.

3- مجالات استخدام البرمجة الخطيّة:

تستخدم البرمجة الخطيّة في كلّ المسائل الاقتصاديّة التّي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيّرات الاقتصاديّة بهدف إيجاد أمثليّة الاستخدام في وجود مجموعة من القيود الماليّة أو التقنيّة أو هما معا

من المواضيع التّي تستخدم فيها البرمجة الخطيّة في مجالات العلوم الاقتصاديّة، الماليّة، التّجاريّة وعلوم التّسيير عامّة ما يلي:

3-1 - في حالة التّعظيم:

- تعظيم الأرباح
- تعظيم الإنتاج
- تعظيم طاقات التّخزين
- تعظيم استخدام رؤوس الأموال
- تعظيم استخدام اليد العاملة
- وغير ذلك من المسائل الواقعية التّي يكون هدفها التّعظيم

3-2- في حالة التّدنية:

- تقليص (تدنية) التّكاليف
- تقليص (تدنية) الخسائر
- تقليص (تدنية) عدد الموظفين

- تقليص (تدنية) الأجور الاجماليّة

4- تطبيقات البرمجة الخطية:

للبرمجة الخطيّة تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كلّ يوم لحلّ الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها:

- **التطبيقات التّسويقيّة Marketing Applications:** مثل اختيار وسائط الإعلانات وبحوث التسويق
- **التّطبيقات الماليّة Financial Applications:** مثل التّخطيط المالي، تحليل الأوراق والأسهم الماليّة أو اختيار المحفظة الاستثماريّة.
- **تطبيقات إدارة الإنتاج Production Management Applications** مثل الإنتاج المختلط (المزيج الإنتاج)، تخطيط الإنتاج، النّقل والتّخصيص أو قرار الشراء أو الصنع
- **مشاكل المزج Blending Problems**
- **مشاكل تخطيط المشروعات Project Planning Problems**

5- فوائد البرمجة الخطية:

للبرمجة الخطية فوائد عديدة نذكر منها:

- ترجمة المشاكل الواقعية في شكل رياضي مما يسمح بمعالجة عدد كبير من المتغيرات والتعبير عنها في شكل رياضي مبسط.
- تحقيق أكبر قدر ممكن من الأرباح أو تخفيض أكبر قدر ممكن من التكاليف.
- وسيلة مساعدة في اتخاد القرارات الكمية باستخدام الأساليب والطرق العلمية الحديثة.
- تحقيق أفضل استغلال للطاقة المتاحة.
- استبعاد الحلول الغير منطقية والغير مقبولة والتي تعتبر غير ممكنة من جهة والتركيز على الحلول الممكنة فقط واختيار أحسنها.
- انتاج حجم معين من بعض المنتوجات للوفاء باحتياجات معينة.

6- شروط استخدام البرمجة الخطيّة:

يتطلّب استخدام أسلوب البرمجة الخطيّة ضرورة توفّر عدّة شروط يمكن ذكرها على النّحو التّالي:

- يجب أن يكون هناك هدف يراد تحقيقه وعادة يكون هذا الهدف هو تعظيم الأرباح إلى أقصى ما يمكن أو تخفيض التّكاليف إلى أدنى ما يمكن وذلك حتّى يمكن صياغة المشكلة في صورة نموذج رياضي وفقا لأسلوب البرمجة الخطيّة.

- يجب أن تكون عناصر المشكلة ومتغيّراها قابلة للقياس الكمّي بمعنى أنّه يمكن قياسها كميّا وعلى ذلك فإنّ العناصر والمتغيّرات التّي لا يمكن التّعبير عنها في صورة كميّة لا يمكن ادراجها في النموذج الرياضي للبرمجة الخطية.
- يجب أن تكون متغيّرات المشكلة قابلة للتجزئة بمعنى أنّه يمكن للمتغيّرات أن تأخذ قيما أو كميّات كسريّة، أي جزء من وحدة القياس، أي يسمح بإنتاج كسور من المنتج النّهائي في برنامج الإنتاج الأمثل.
- يجب أن تكون الإدارة في حالة تأكّد تامّ فيما يتعلّق بالعوامل والمتغيّرات الخاصّة بالمشكلة كالموارد المتاحة والمستوى التّقني ونتائج البرامج المختلفة وهذا يعني أنّه لا مجال للاحتمالات في أسلوب البرمجة الخطيّة حيث أنّه من الأساليب المحدّدة وهذا يعني أنّ هذا الأسلوب يصلح للتّطبيق في محيط التّأكّد وفي حالة توفّر المعلومات التّامة ولا يصلح استخدامه في محيط المخاطرة وعدم التّأكّد.
- يجب أن تكون كلّ العلاقات بين متغيّرات المشكلة خطيّة، وهذا يعني أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة على هيئة معادلات ومتباينات من الدرجة الأولى.
- يجب أن تأخذ جميع متغيّرات المشكلة قيما أو كميّات موجبة أو تكون مساوية للصّفر، أي لا يسمح لها بأن تأخذ قيما أو كميّات سالبة. **(شرط عدم السّلبيّة)**
- يجب أن يتمّ التّعامل مع فترة زمنيّة واحدة وهذا يعني أنّ أسلوب البرمجة الخطيّة أسلوب ثابت غير حركي لا يهتمّ بدراسة أثر النتائج في فترة معيّنة على الفترات الأخرى (Static State)
- يجب أن تكون عوامل المتغيّرات في كلّ من الهدف والموارد الاقتصاديّة المتاحة ثابتة خلال الفترة الزمنيّة التي يعد عنها البرنامج الأمثل.
- يجب أن يكون هناك حدودا ثابتة للموارد الاقتصاديّة المتاحة، حيث أنّه لولا وجود مثل هذه الحدود الثّابتة أو القيود لما كان هناك مشكلة أصلا ولما كان هناك داعي لاستخدام أسلوب البرمجة.
- يجب أن يكون هناك بدائل يتمّ الاختيار بينها وقد تأخذ تلك البدائل صورة تشكيلات مختلفة من المنتجات.

7- متطلّبات مشكلة البرمجة الخطيّة:

تتطلّب مشكلة البرمجة الخطيّة خمس خصائص أساسيّة هي:

- أوّلا تحديد الهدف الذّي تسعى المنظّمة إلى تحقيقه من وراء حلّ المشكلة: أي وجود هدف واضح ومحدّد، معبّر عنه بصيغة رياضيّة يطلق عليها **دالّة الهدف Objective Function** وغالبا ما يتعلّق هذا الهدف بتحقيق أقصى عائد أو ربح أو الوصول بالتّكلفة إلى أدنى حدّ ممكن.
- ثانيا محدوديّة الموارد المتاحة لتحقيق الهدف، أي وجود قيود أو محدّدات **Contraints** لا يمكن تجاوزها منها ما يتعلّق برأس المال أو الموارد البشريّة أو الطّاقة التّشغيليّة للمكائن أو الموادّ الأوليّة وغيرها وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف.

- ثالثا توفّر عدد من البدائل المختلفة لاستخدام الموارد المتاحة قيد البرمجة، بحيث يكون بمقدور صانع القرار اختيار واحد من البدائل.
- رابعا إمكانيّة التّعبير عن كافّة بيانات المشكلة وهدف الدّراسة والمتغيّرات بصورة كميّة (رقميّة).
- خامسا وجود علاقة بين العوامل المتغيّرة في المشكلة الخاضعة للبرمجة وينبغي أن تكون هذه العلاقة خطيّة، أي أن تكون دالّة الهدف والقيود المفروضة على دالّة المشكلة من الدّرجة الأولى سواء كانت القيود على هيئة معادلات أو متباينات.

8- فرضيات البرمجة الخطية:

تستند البرمجة الخطية في أساسها النظري إلى مجموعة من الافتراضات الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها، والتي يمكن إجمالها فيما يلي:

- **الخطية:** أي أن تكون العلاقة بين متغيرات المشكلة علاقة خطية، وهذا يعني أن تكون دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة على هيئة معادلات ومتباينات من الدرجة الأولى.
- **عدم السلبية:** تعني أن كل المتغيرات التي تدخل ضمن دالة الهدف ومعادلات ومتباينات نموذج البرمجة الخطية يجب أن تكون غير سالبة (أي أكبر أو تساوي الصفر)، إذ لا يمكن أن يكون حجم الإنتاج على سبيل المثال سالباً بأي حال من الأحوال.
- **التأكد التام:** أي أن جميع عناصر المشكلة محدودة ومؤكدة، فتقنية البرمجة الخطية تقتصر في تطبيقها على تلك المشاكل التي تتضمن اتخاذ القرار في ظل التأكد التام، فالشخص القائم بتعريف المشكلة لا تواجهه عملية التنبؤ أو التخمين، حيث أنه يُفترض العلم التام بالظروف والعلاقات التي سوف تسود في المستقبل، لذلك يجب أن تكون جميع معاملات المتغيرات في المسألة مؤكدة وثابتة.
- **القابلية للتجزئة:** أي أن حل مشكلة البرمجة الخطية ليس بالضرورة أن يكون بأعداد صحيحة، وهذا يعني قبول كسور كقيم لعوامل القرار، وإذا كان من الصعب إنتاج أجزاء من المنتج فعند ذلك نلجأ إلى استخدام البرمجة بالأعداد الصحيحة أو الرقمية.
- **التناسبية:** تعني أن كل وحدة من وحدات الإنتاج المتماثل تستخدم الكمية نفسها من الموارد المتاحة، فعلى سبيل المثال إذا كنا نحتاج إلى وحدتين من المواد الأولية لإنتاج وحدة واحدة تامة من منتج معين، فإننا نحتاج إلى أربعين وحدة من المواد الأولية لإنتاج عشرين وحدة من هذا الإنتاج.
- **الإضافية:** تعني أن مجموع كمية الموارد المستخدمة لكل الأنشطة يجب أن يساوي مجموع الموارد المستخدمة في كل نشاط على انفراد، فإذا كنا ننتج أربعة منتجات وكان الربح الناجم عن بيع وحدة واحدة من كل هذه المنتجات هو 8، 10، 12، 6 وحدات نقدية على التوالي، فإن إجمالي الربح الناجم عن إنتاج وبيع ثلاث وحدات من كل منتج هو 3 (8+10+12+6) = 108 وحدات نقدية.

9- عناصر البرمجة الخطية:

- **دالة الهدف:** ان الهدف الذي نسعى الي الوصول اليه من وراء حلّ المشكلة يتمثّل في الوصول الى الأمثليّة L'optimalité والتي تأخذ أحد الوجهين:

تعظيم Maximisation: (الأرباح، العوائد، المبيعات)

تدنية (تقليل) Minimisation: (تكاليف، خسائر، الزمن، المخاطرة)

يمكن التعبير عن هذا الهدف بمعادلة رياضية تسمّى دالة الهدف.

- **القيود:** تعكس القيود في معظم الحالات محدوديّة الموارد وتعبّر عن مجموعة المحدّدات التّي لا يستطيع متخذ القرار التحكّم فيها.

- **المتغيّرات:** تعبّر عن متغيّرات القرار وهي المجاهيل التّي تعبّر عن الشيء المطلوب تحديده في المشكلة قيد البحث كما يجب أن تكون كلّ المتغيّرات في البرنامج الخطّي غير سالبة أي يجب أن تكون موجبة أو معدومة.

10- الشكل العامّ لنموذج البرمجة الخطيّة:

يعدّ النموذج الرياضي ترجمة رياضيّة للمشكلة المراد حلّها والمكوّنة من دالّة الهدف، القيود والمتغيّرات. يمكن صياغة النموذج الرّياضي على الشّكل التّالي:

دالّة الهدف تأخذ الشّكل التّالي:

$$Opt\ \ F(x)\ \ =\ \ \sum_{j=1}^{n} C_j\ \ X_j$$

Opt : تعني الأمثلية (*Optimalité*) : أي إما التعظيم (*Max*) أو التخفيض (*Min*)

C_j : معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدوي أو التكلفة الوحدوية لكل منتج.

X_j : رموز للكميات (عدد الوحدات) المنتجة لكل منتج، و هي المجاهيل التي نبحث عنها.

j : مؤشر لعدد متغيرات (مجاهيل) النموذج و المقدرة بـ*(n)*.

القيود: هي عبارة عن الشروط (الظروف) التي تتواجد فيها المؤسسة، ويعبر عنها رياضيا في شكل معادلات أو متراجحات ذات الصيغة الرياضية التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ X_j\ \geq\ b_i$$

أو

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ X_j \ \leq b_i$$

حيث أن:

$\mathbf{a_{ij}}$: المعاملات الفنية، أي الكميات المستهلكة من الموارد (الطاقات الإنتاجية) للإنتاج الوحدوي من المنتجات.

$\mathbf{b_i}$: الكميات المتاحة من الموارد.

i : عدد الأسطر، و هي بعدد القيود (m).

j : عدد الأعمدة، و هي بعدد المتغيرات أي المجاهيل (n).

قيود عدم السلبية: أي أن جميع قيم المتغيرات يجب أن تكون موجبة أو منعدمة، لأنه لا يمكن إنتاج منتجات سالبة.

11- صيغ النماذج الخطيّة:

يمكننا أن نميّز بشكل عامّ بين 3 صيغ: النظاميّة (القانونيّة)، القياسيّة والصّيغة المختلطة

11-1- الصّيغة القانونيّة (النظاميّة): Forme *canonique*

تعتبر هذه الصّيغة الشّكل الأوّلي الذّي يأخذه النموذج الرياضي عند تشكيل المسألة رياضيا وتأخذ مسألة البرمجة الخطيّة هذه الصّيغة إذا كانت:

- جميع متغيّرات القرار غير سالبة
- جميع متراجحات القيود من نوع واحد (كلّها من نوع أقلّ أو يساوي أو من نوع أكبر أو يساوي) أي هي الصيغة التي تحتوي على إشارتي ≤ أو ≥ فقط.
- إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أقل أو تساوي فإننا نبحث عن التعظيم (*Max*).
- أما إذا كانت الصيغة تحتوي على إشارة أكبر أو تساوي، فإننا نبحث عن التخفيض (*Min*).
- كميّة الموارد المتاحة أو الطرف الأيمن من المتراجحة غير محدّد الإشارة.

يمكن تمثيل الصّيغة النظاميّة للنموذج الخطّي كمايلي:

في حالة التّعظيم:

دالّة الهدف:

$$Max\ (Z)\ =\ \sum_{j=1}^{n} C_j\ \ X_j$$

القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ X_j\ \leq b_i \qquad i = 1, 2, 3 \dots \dots \dots m$$

$$X_i\ \geq 0 \qquad j = 1, 2, \dots \dots \dots n$$

في حالة التّقليل:

دالّة الهدف:

$$Min\ (W)\ =\ \sum_{j=1}^{n} C_j\ \ X_j$$

القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ X_j\ \geq b_i \qquad i = 1, 2, 3 \dots \dots \dots m$$

$$X_i\ \geq 0 \qquad j = 1, 2, \dots \dots \dots n$$

11-2- الصّيغة القياسية (Forme standard):

هي الصيغة التي تحتوي على إشارة = فقط، كذلك هي الصّيغة التّي تستخدم لإيجاد الحلّ الأوّلي في البرنامج الخطّي. يأخذ البرنامج الخطّي الصّيغة القياسيّة (المعياريّة) إذا كانت: جميع متغيّرات القرار غير سالبة، جميع القيود على شكل معادلات أو مساواة (ما عدا شرط عدم سلبيّة المتغيّرات الذّي يعتبر قيد أيضا)، الطّرف الأيمن من القيد غير سالب.

دالّة الهدف:

$$Max\ (Z)\ =\ \sum_{j=1}^{n} C_j\ \ X_j$$

أو

$$Min\ (W)\ =\ \sum_{j=1}^{n} C_j\ \ X_j$$

القيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ \ X_j\ = b_i \qquad i = 1, 2\ , 3\ \dots\dots\dots m$$

$$X_i\ \geq 0 \qquad j = 1, 2, \dots\dots\dots n$$

3-11- الصيغة العامة (المختلطة) (Forme mixte):

عادة ما تكتب البرامج الخطية في بداية وضعها على شكل صيغة عامة تحتوي على كل الإشارات (≤، =، ≥).

12- محاسن وعيوب البرمجة الخطيّة:

12-1- المزايا:

- تخصّص الموارد المحدودة نحو أفضل الاستخدامات.
- تؤدّي إلى تحسين نوعيّة القرارات التّي تتخذها الإدارة.
- تمكن من تحديد القيود التّي تشكل عائقا أمام المؤسّسة.
- يمكن استخدام تحليل الحساسيّة الذّي يسمح باستخدام أسعار الظلّ في تحديد الفائدة التّي يمكن جنيها من تخفيف بعض القيود أو اتخاذ بعض القرارات الاستثنائيّة.
- التفكير المنطقي ومنح الرؤية الشاملة الكاملة للمسائل.
- تحديد أفضل الحلول عبر تقييم التكلفة والأرباح.
- قاعدة البيانات التي توفرها البرمجة الخطية تعتبر الأمثل للموارد النادرة.
- تطبيق التعديلات المختلفة على الحلول وفقا للظروف المتغيرة.
- حلّ المشكلات ذات الأبعاد المتعدّدة.

12-2- العيوب:

بالرّغم من أنّ البرمجة الخطيّة قد أثبتت أنّها وسيلة جيدة لحلّ المشاكل الكبيرة والمعقّدة في القطاعين العامّ والخاصّ، إلاّ أن هناك بعض العيوب من أهمّها:

- عدم ضمان الحصول على قيم صحيحة لمتغيّرات القرار باستخدام البرمجة الخطيّة.

- عدم السّماح بحالة عدم التأكّد **Uncertainty** في البرمجة الخطيّة ذلك أنّ نموذج البرمجة الخطيّة يفترض المعرفة التّامة بمساهمات متغيّرات القرار واحتياجاتها وكذلك المصادر المتاحة، بعكس ما هو موجود في الواقع ولحلّ هذه المشكلة فهنالك وسائل أخرى يمكن استخدامها كالبرمجة الخطيّة في حالة عدم التأكّد أو برمجة الفرصة المحدّدة.
- افتراض العلاقات الخطيّة أو المستقيمة فيما يتعلّق بدالّة الهدف والقيود ذلك أنّه وفي بعض الحالات العملية فإنّ تلك العلاقات قد تكون غير خطيّة وتتمّ معالجتها باستخدام البرمجة غير الخطيّة.
- صعوبة تحديد دالة الهدف.
- من الصعب العثور على القيود التكنولوجية والمالية الفعالة اللازمة لتحقيق الهدف المطلوب.
- صعوبة التعبير المباشر عن القيود على أنها متباينات خطية.
- صعوبة تقدير القيم لمختلف المعاملات الثابتة كالأسعار.
- افتراض البرمجة الخطية بأنها عبارة عن العلاقات الخطية بين المدخلات والمخرجات، لكنه في الواقع من الصعب ذلك، لأن بعض المشاكل الواقعية كالتجارية والصناعية من الممكن أن تكون غير خطية.
- افتراض البرمجة الخطية بأنها تعتمد على مبدأ المنافسة الكاملة في الأسواق، لكنها في حقيقة الأمر ليست كذلك.
- افتراض البرمجة الخطية ثبات العوائد، لكن في الواقع العوائد متغيرة إما بالزيادة أو النقصان.
- تقنية البرمجة الخطية تقنية معقدة، فحل المشكلة يتطلب تكبير او تصغير متغير محدد بطرق تعبير صعبة ومعقدة لما تتضمنه من عدد كبير من الحسابات الكبيرة كطريقة .simplex

13- صياغة نموذج البرمجة الخطيّة:

في هذه الفقرة سنشرح الطّريقة التي تترجم بواسطتها المشكلة المدروسة إلى علاقات رياضيّة أي أسلوب صياغتها بشكل رياضي وذلك بتحديد دالة الهدف الخطية التي تخضع للعديد من القيود الخطية وتعتبر هذه المرحلة من أعقد المراحل في تحليل المشاكل الاداريّة أو الاقتصاديّة أو الهندسيّة لأنّه بمجرّد الانتهاء من صياغة المشكلة بشكل كمّي تصبح بقيّة المراحل سهلة لأنّ المراحل المتبقيّة تتضمّن إيجاد حلّ البرنامج المصاغ بإحدى الخوارزميّات المعروفة (البيانيّة – السّمبلكس) وإذا استخدم الحاسوب في إيجاد الحلّ المناسب فنكون بذلك قد اختصرنا وقتا وجهدا كبيرين.

غالبا ما تتبع الخطوات التالية مع معظم المشاكل التي تصاغ بشكل خطّي:

أوّلا: التّعبير عن المشكلة بصورة وصفيّة وذلك من خلال تحديد ما يلي:

- تحديد الهدف النهائي للمشكلة المدروسة، أي تحديد ما إذا كانت تتعلّق بتعظيم الأرباح أو تخفيض التّكاليف أو تقليل كميّة عناصر الإنتاج المستخدمة أو الاستفادة القصوى من عنصر العمل البشري وغيرها من الأهداف
- بعد تحديد الهدف النّهائي يجب توضيح العلاقة الموجودة بين الهدف والمتغيّرات التّي يستطيع متّخذ القرار السيطرة عليها.

- تعريف القيود المتعلّقة بالمشكلة المدروسة.

ثانيا: المرحلة التالية بعد أن يتم التعريف الوصفي للمشكلة هي تحويل الشكل الوصفي للمشكلة إلى شكل رياضي وذلك بوضعها في الصيغة الرياضية المناسبة وذلك باتّباع الخطوات التّالية:

- تحديد المتغيّرات X_j **حيث** $j = 1,2,.....n$ المتعلّقة بالمشكلة وتعريفها مع تعريف وحدات القياس المستعملة بالنّسبة لكلّ متغيّر.
- تحديد معاملات مساهمة المتغيّرات في تحقيق الهدف (C_i) مع تعريف الوحدات المستعملة لقياس تلك المساهمة.
- تحديد دالة الهدف مع التأكّد من استخدام وحدة القياس نفسها.
- تحديد معاملات المتغيّرات (معدّلات الاحلال) (a_{ij}) مع الأخذ بعين الاعتبار وحدات القياس المناسبة لكلّ معامل.
- تحديد الموارد المتاحة أو المتطلّبات اللاّزمة لحلّ المشكلة أي الثّابت إلى يمين الشروط الخطيّة (b_i) مع تحديد وحدات القياس المستعملة.
- التّعبير عن القيود المتعلّقة بكلّ مورد من الموارد المتاحة بصورة رياضيّة والتأكّد من انسجام وحدات القياس لكلّ من القيود.
- تحديد شرط عدم السّلبيّة المتعلّق بالمتغيّرات في المشكلة المطروحة أو الشروط الأخرى ان وجدت.

إنّ اتباع هذه الخطوات في صياغة النماذج الخطيّة سوف يقلّل إلى حدّ كبير من الأخطاء الممكن ارتكابها. يجب الإشارة إلى أنّ نماذج البرمجة الخطيّة لا تتضمّن الحصول على قيم المتغيّرات بأرقام صحيحة وانما يمكن أن تكون القيم أرقاما صحيحة وحقيقيّة وقد لا يكون هذا مناسبا لبعض الحالات الاقتصاديّة كما في تحديد كميّات انتاج السّيارات أو الطّائرات لذلك من أجل الحصول على قيم صحيحة توجد أساليب متعددة تدعى أساليب البرمجة الخطيّة العدديّة الصّحيحة.

14- أمثلة عن صياغة المشكلة (المسألة):

مثال رقم 01:

تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائيّة والمنزليّة نوعين من الثّلاجات ذات الحجم العادي والحجم الكبير. تمرّ عمليّة التّصنيع في ثلاثة مراحل وهي مرحلة التجميع، مرحلة الطّلاء ثمّ مرحلة مراقبة جودة الانتاج. أمّا الوقت اللاّزم لإنهاء كلّ مرحلة من مراحل التّصنيع الثّلاث فقد تمّ تحديدها في الجدول التّالي :

النّوع	الوقت اللاّزم للتّجميع	الوقت اللاّزم للطّلاء	الوقت اللاّزم للرّقابة على الجودة
ثلاجة الحجم العادي	3.6	1.6	0.5
ثلاجة الحجم الكبيرة	4.8	1.8	0.6

فإذا كان الوقت المتاح أسبوعيّا للقيام بكلّ مرحلة من مراحل التّصنيع يبلغ 4800 ساعة لمرحلة التّجميع و1980 ساعة لمرحلة الطّلاء و900 ساعة لمرحلة الرّقابة على جودة الإنتاج، تتوقّع الشّركة أن تبيع أسبوعيّا على الاقلّ ما يعادل 300 ثلاجة ذو الحجم العادي و180 ثلاجة ذو الحجم الكبير. بناء على هذه المعلومات فإنّ مدير الإنتاج يرغب في تحديد الكميّة الواجب انتاجها أسبوعيّا من كلّ نوع من الثّلاجات بحيث تحقّق الشركة أكبر كميّة ممكنة من الرّبح مع العلم أنّ ربح الشّركة من كلّ ثلاجة ذو الحجم العادي يعادل 50 دينار بينما ربح الشركة من كلّ ثلاجة ذو الحجم الكبير يعادل 75 دينار.

الحلّ:

أوّلا: تحديد المشكلة بصورة وصفيّة

تهتمّ هذه المشكلة بتخطيط الإنتاج بصورة أسبوعيّة من أجل الحصول على أكبر ربح ممكن مع الأخذ بعين الاعتبار أوقات العمل المتاحة لمراحل الإنتاج الثّلاث والبالغة 4800 ساعة لمرحلة التّجميع و1980 ساعة لمرحلة الطّلاء و900 ساعة لمرحلة الرّقابة على الجودة وكذلك كميّة الطّلب الأسبوعيّة التّي لا تقلّ عن 300 ثلاجة من الحجم العادي و180 ثلاجة من الحجم الكبير.

ثانيا: صياغة المشكلة بشكل رياضي

لنفرض أنّ X_1 تشير إلى عدد الثلاجات الواجب انتاجها أسبوعيّا من الحجم العادي.

لنفرض أنّ X_2 تشير إلى عدد الثلاجات الواجب انتاجها أسبوعيّا من الحجم الكبير.

دالّة الهدف:

$$\mathbf{Max\ Z = 50X_1 + 75X_2}$$

أمّا الشّروط الخطيّة فلدينا نوعين من الشّروط: **شروط الإنتاج وشروط الطّلب على الإنتاج**

ان شروط الإنتاج تتعلّق بأوقات العمل المتاحة في كلّ مرحلة من مراحل التّصنيع. بالنّسبة للمرحلة الأولى فإنّ الحجم العادي من الثّلاجات X_1 يحتاج إلى 3.6 ساعة من وقت التّجميع بينما يحتاج الحجم الكبير X_2 **إلى 4.8 ساعة** ومجموع ما يلزم من ساعات العمل في مرحلة التّجميع يجب ألا يتعدّى الوقت المتاح أسبوعيّا لمرحلة التّجميع 4800 ساعة وبالتّالي فإنّ الشّرط الأوّل يكتب:

$$3.6\,X_1 + 4.8X_2 \leq 4800$$

بنفس الطّريقة نحصل على الشّرط الثّاني والثّالث من شروط الإنتاج اللّذان يكتبان بالشّكل:

$$1.6\,X_1 + 1.8X_2 \leq 1980$$

$$0.6\,X_1 + 0.6X_2 \leq 900$$

أمّا شروط الطّلب على الإنتاج فهي قيود تتعلّق بالحدّ الأدنى المتوقّع من المبيعات أسبوعيّا وهي سهلة حيث أنّ وحدات القياس هي نفسها في طرفي المتراجحة.

(عدد البرادات المتوقّع بيعها من الحجم العادي) 300 ≤ (عدد البرادات المنتجة من الحجم العادي) X_1

(عدد الثّلاجات المتوقّع بيعها من الحجم الكبير) 180 ≤ (عدد البرادات المنتجة من الحجم الكبير) X_2

بالإضافة إلى شروط عدم السّلبيّة إذ أنّه لا يمكن أن يكون عدد الثّلاجات المنتجة سالبا.

ممّا سبق نكتب البرنامج الرّياضي الخطّي للمسألة المدروسة بالشّكل:

$$\mathbf{Max\ Z = 50X_1 + 75X_2}$$

$$3.6\,X_1 + 4.8X_2 \leq 4800$$

$$1.6\,X_1 + 1.8X_2 \leq 1980$$

$$0.6\,X_1 + 0.6X_2 \leq 900$$

$$X_1 \geq 300$$

$$X_2 \geq 180$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

مثال رقم 02:

غداء حيواني مركّب من ثلاثة أنواع من الطّعام إذا كانت الوحدة من كلّ نوع تحتوي على كربوهيدرات، دهون، بروتين، فيتامين كما يأتي:

	العدد بالوحدات				
النّوع	**كربوهيدرات**	**دهون**	**بروتين**	**فيتامين**	**تكلفة الوحدة**
الأوّل	10	12	11	6	150
الثّاني	7	5	10	4	130
الثّالث	5	3	9	3	120

إذا علمت أنّ الحيوان يحتاج 50 وحدة من الكربوهيدرات و40 وحدة من الدّهون و60 وحدة بروتين و30 وحدة فيتامين على الأقلّ أسبوعيّا.

أكتب برنامجا خطيّا مناسبا لهذه المسألة؟

الحلّ:

نفرض أنّ عدد الوحدات من النّوع الأوّل X_1 ومن النّوع الثّاني X_2 ومن النّوع الثّالث X_3

	النّوع الأوّل	النّوع الثّاني	النّوع الثّالث
العدد	X_1	X_2	X_3
كربوهيدرات	$10X_1$	$7X_2$	$5X_3$
دهون	$12X_1$	$5X_2$	$3X_3$
بروتين	$11X_1$	$10X_2$	$9X_3$
فيتامين	$6X_1$	$4X_2$	$3X_3$
التّكلفة	$150X_1$	$130X_2$	$120X_3$

التّكلفة الكليّة = تكلفة النوّع الأوّل + الثّاني + الثّالث

دالّة الهدف $\text{Min } Z = 150X_1 + 130X_2 + 120X_3$

مجموعة القيود:

الحيوان يحتاج 50 وحدة كربوهيدرات على الأقلّ أسبوعيّا $10X_1 + 7X_2 + 5X_3 \geq 50$

الحيوان يحتاج 40 وحدة دهون على الأقلّ أسبوعيّا $12X_1 + 5X_2 + 3X_3 \geq 40$

الحيوان يحتاج 60 وحدة بروتين على الأقلّ أسبوعيّا $11X_1 + 10X_2 + 9X_3 \geq 60$

الحيوان يحتاج 30 وحدة فيتامين على الأقلّ أسبوعيّا $6X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 30$

قيود عدم السّلبيّة: $X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0 \quad , X_3 \geq 0$

تمارين محلولة

التمرين الأول:

تنتج مؤسّسة نوعين من السّلع: الأول بسكويت والثاني شوكولاتة حيث:

يحتاج الأول 4 ساعات في قسم التصنيع و2 ساعات في قسم التغليف أما الثاني فيحتاج 5 ساعات في قسم التصنيع و3 ساعات في قسم التغليف.

يعمل في المصنع عمال بحجم 8 ساعات في قسم التصنيع و6 ساعات في قسم التغليف.

يحقّق النوع الأول ربحا قدره 20 دج للوحدة الواحدة ويحقّق الثاني ربحا قدره 40 دج للوحدة

المطلوب:

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يسمح للمؤسسة بتحقيق أكبر ربح ممكن.

الحلّ :

$$\text{Max } Z = 20X_1 + 40X_2$$

Soumise aux contraintes :

$4X_1 + 5X_2 \leq 8$ **قيد قسم التّصنيع**

$2X_1 + 3X_2 \leq 6$ **قيد قسم التّغليف**

$X_1, X_2 \geq 0$ **شرط عدم السّلبيّة**

التمرين الثاني:

تقوم شركة الأوراس للنجارة بإنتاج 3 أنواع من المنتجات: الكراسي، الطاولات والخزائن وتقوم بيعها للمدارس. حيث تحقّق ربحا عن كلّ وحدة من: (الكراسي، الطاولات والخزائن) قدره 350، 250 و500 دج. عملية الإنتاج تستدعي مرور هذه المنتجات بثلاث ورشات.

يوضّح الجدول التالي الوقت الذّي يستغرقه كلّ منتوج في كلّ ورشة بالإضافة الى الطاقة المتاحة في كلّ قسم.

الورشات	المنتوج			مجموع ساعات العمل المتاحة في القسم
	الكراسي	الطاولات	الخزائن	
الورشة 1	4	5	3	420
الورشة 2	3	2	4	300
الورشة 3	6	3	5	240

المطلوب:

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذّي يسمح للمؤسسة بتحقيق أكبر ربح ممكن.

الحلّ :

$$Max\ Z = 350X_1 + 250X_2 + 500X_3$$

Soumise aux contraintes :

$4X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 420$	قيد الورشة 1
$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 300$	قيد الورشة 2
$6X_1 + 3X_2 + 5X_3 \leq 240$	قيد الورشة 3
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$	شرط عدم السّلبيّة

التمرين الثالث:

تقوم مؤسسة المراعي بإنتاج منتجين اثنين: الحليب والعصائر، وذلك في ظل القيود التي تفرضها الطاقة الإنتاجية والطاقة التمويلية، والجدول أدناه يوضح البيانات الخاصة بالمنتجين.

المنتجات	سعر بيع الوحدة	تكلفة الوحدة	عدد الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة		
			القسم 1	القسم 2	القسم 3
الحليب	14	10	0,5	0,3	0,2
العصائر	11	8	0,3	0,4	0,1
الطاقة المتاحة بالأقسام	-	-	500	400	200

حيث أن المؤسسة تتوفر على مبلغ 30000دج، علما أنه يتم تخزين هذه المنتجات قبل تسويقها في مخزن طاقته الاستيعابية 300 وحدة، حيث أن الحجم التخزيني للعصائر ضعف الحليب.

المطلوب: بناء النموذج الرياضي لهذه المسألة.

الحلّ :

صياغة دالة الهدف:

الربح الإجمالي للمؤسسة = الربح المترتب عن بيع الحليب+ الربح المترتب عن بيع العصائر

الربح الإجمالي للمؤسسة = $(14 - 10 = 4\ x_1) + (11 - 8 = 3\ x_2)$

وعليه تصبح دالة الهدف كالتالي:

$$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$$

قيد القسم الأول $0.5x_1 + 0.3x_2 \leq 500$

قيد القسم الثاني $0.3x_1 + 0.4x_2 \leq 400$

قيد القسم الثالث $0.2x_1 + 0.1x_2 \leq 200$

قيد المبلغ المتاح $10x_1 + 8x_2 \leq 30.000$

قيد التّخزين $x_1 + 2x_2 \leq 300$

قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى $x_1 \geq 0$

قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية $x_2 \geq 0$

التمرين الرابع:

تقوم مؤسّسة بإنتاج 4 أنواع من المنتجات P_1، P_2، P_3، P_4 باستخدام 3 موادّ أوليّة M_1، M_2، M_3 المعلومات المتعلقة بالمشكل موضوع الدراسة مبينة في الجدول أدناه:

المنتوج	المادة الأولية M_1	المادة الأولية M_2	المادة الأولية M_3	التكلفة
الأول P_1	10	3	3	150
الثاني P_2	7	4	4	200
الثالث P_3	5	3	2	350
الرابع P_4	5	2	2	250
الكمية المتاحة	60	50	40	

المطلوب: بناء النموذج الرياضي لهذه المسألة.

الحلّ :

$$\textbf{Min } Z = 150X_1 + 200X_2 + 350X_3 + 250X_4$$

Soumise aux contraintes :

قيد المادّة الأوليّة M_1 $\quad 10X_1 + 7X_2 + 5X_3 + 5X_4 \leq 60$

قيد المادّة الأوليّة M_2 $\quad 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 2X_4 \leq 50$

قيد المادّة الأوليّة M_3 $\quad 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 + 2X_4 \leq 40$

شرط عدم السّلبيّة $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

التمرين الخامس:

تقوم مؤسسة بإنتاج منتجين P_1، P_2. تستخدم المؤسسة مادّتين أوليّتين هما: *Mat-1*، *Mat-2* بكميات متفاوتة، بالإضافة إلى ذلك تستخدم المؤسسة آلتين: *Machine-1* ، *Machine-2*. المعلومات المتعلقة بالمشكل موضوع الدراسة مبينة في الجدول أدناه:

	Mat-1	Mat-2	Machine-1	Machine-2
المنتج P_1	01	05	02	00
المنتج P_2	01	06	01	03

المؤسسة لا تتوفر إلا على 400 وحدة من المادة الخام الأولى أما المادة الخام الأخرى فإنها تستجيب لأي برنامج إنتاجي. فيما يخص الطاقة القصوى للآلتين فهي على التوالي 600 و900 ساعة، وحسب مدير المبيعات لهذه المؤسسة فإن هذه الأخيرة يجب عليها على الأقل إنتاج 150 وحدة من P_1، أما عن الربح المترتب عن المنتجين فهو على التوالي: 300 و200 دج.

المطلوب:

1- صياغة نموذج البرمجة الخطية الذّي يسمح للمؤسسة بتحقيق أكبر ربح ممكن.

الحلّ :

$$Max\ Z = 300\,X_1 + 200\,X_2$$

Soumise aux contraintes

المادة الأولية 01	$X_1 + X_2 \leq 400$
الالة 01	$2X_1 + X_2 \leq 600$
الالة 02	$3X_2 \leq 900$
المنتج 01	$X_1 \geq 150$
قيد عدم سلبية المتغيرة الأولى	$X_1 \geq 0$
قيد عدم سلبية المتغيرة الثانية	$X_2 \geq 0$

التمرين السادس:

تقوم احدى الشركات بإنتاج أنواع مختلفة من الأسمدة الزراعية فاذا وردت الى الشركة طلبية للحصول على 24000 كغ من أسمدة معيّنة.

يتكون هذا النوع من الأسمدة من ثلاثة مركبات هي A، B، C والمواصفات المطلوبة لذلك السماد كما وردت في الطلبية مبيّنة كما يلي:

1. يجب أن يحتوي السماد على الأقل على 6000 كغ من المركب B
2. يجب أن لا يحتوي السماد على أكثر من 8000 كغ من المركب A
3. يجب أن يحتوي السماد على الأقل على 4000 كغ من المركب C

إذا علمت أن تكلفة الكيلوغرام الوحد من المركب A تساوي 4 دينار وتكلفة الكيلوغرام الواحد من المركب B تساوي 6 دينار وتكلفة الكيلوغرام الواحد من المركب C تساوي 5 دينار

المطلوب: بناء النموذج الرياضي لهذه المسألة.

الحلّ :

$$\text{Min } Z = 4A + 6B + 5C$$

Soumise aux contraintes

$$A + B + C = 24000$$

$$A \leq 8000$$

$$B \geq 6000$$

$$C \geq 4000$$

التّمرين السّابع:

ربّة بيت تريد تحضير طبق أكل انطلاقا من اللّحم والخضر الطّازجة وهذا الطّبق يلزم أن يحتوي على الاقلّ على: 3000 حريرة، 2000 غ بروتين، 0.5 غ بروتين، 0.5 غ كاليسيوم، 15 ملغ حديد و10 وحدات من فيتامين A، كما لا يجب أن تتعدّى عدد الحريرات في الطّبق 6000 حريرة. الخصائص الغذائية للّحم والخضر معطاة كمايلي:

	1 وحدة وزنيّة من اللّحم	1 وحدة وزنيّة من الخضر
الحريرات	3000ح	2000ح
البروتين	350غ	100غ
الكالسيوم	2.5غ	0غ
الحديد	10ملغ	30ملغ
فيتامين A	50 وحدة	4 وحدات

مع العلم أنّ ثمن شراء كلّ وحدة وزنيّة من اللّحم 10 و.ن وثمن شراء كلّ وحدة وزنيّة من الخضر 2 و.ن.

المطلوب:

كوّن النموذج الخطّي الذّي يسمح لربّة البيت بتحقيق برنامجها الغذائي بأقلّ تكلفة شراء ممكنة.

الحلّ:

$$Min\ Z = 10X_1 + 2X_2$$

Soumise aux contraintes

$$3000X_1 + 2000X_2 \geq 3000$$

$$3000X_1 + 2000X_2 \leq 6000$$

$$350X_1 + 100X_2 \geq 200$$

$$2.5X_1 \geq 0.5$$

$$10X_1 + 30X_2 \geq 15$$

$$50X_1 + 4X_2 \geq 10$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

التّمرين الثّامن:

من أجل إنتاج نوع معيّن من الفولاذ، يقوم مصنع ما بمزج الفولاذ العادي مع 3 مركبات كيميائيّة معيّنة (**K، L، P**) كموادّ مساعدة ومن أجل ضمان السّير الحسن لبرنامجه الإنتاجي، يقوم المصنع بتحضير هذه المركبات الكيميائيّة الثّلاثة في إحدى ورشاته انطلاقا من مادّتين خامتين (**A,B**) اللّتان يقوم بشرائهما. الخصائص التقنيّة لهذين المادّتين هي:

	كلّ وحدة من المادّة الخام A و B تحتوي على		الكميّة اللاّزم توفّرها من المركبات الكيميائيّة
	A	B	K ، P ، L
المركبات الكيميائيّة المستخرجة: K ، P ، L	3	1	9
	2	1	8
	1	1	6

من أجل تحقيق برنامجه الإنتاجي يجب على المصنع إنتاج على الأقلّ 9 وحدات من المركب الكيميائي K، 8 وحدات من L و6 وحدات من P. فإذا عرفنا أنّ ثمن شراء الوحدة من المادّة الخام A هو 3 و.ن وثمن شراء الوحدة من المادّة الخامّ B هو 2 و.ن

المطلوب:

كوّن النموذج الخطّي الخاصّ بنشاط المصنع المذكور، الذّي يسمح له بتحقيق برنامجه الإنتاجي بأقلّ تكلفة ممكنة.

الحلّ:

$$Min\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

Soumise aux contraintes

$$3X_1 + X_2 \geq 9$$

$$2X_1 + X_2 \geq 8$$

$$X_1 + X_2 \geq 6$$

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0$$

الفصل الثّاني:

الطريقة البيانيّة

الفصل الثّاني: الطريقة البيانيّة

تمهيد:

نعني بحلّ البرنامج الخطّي، إيجاد قيم المتغيّرات التّي تجعل دالّة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود سواء كانت دالّة الهدف في حالة تعظيم أو في حالة تدنية. يمكن إيجاد حلّ للبرنامج الخطّي بإحدى الطريقتين:

أوّلا الطّريقة البيانيّة: هي شائعة الاستخدام فقط في البرامج التّي تحتوي على متغيّرين على الأكثر.

ثانيا طريقة السّمبلكس أو طريقة الجداول: وهي طريقة عامّة تستخدم مهما كان عدد متغيّرات البرنامج.

1- حلول مشكلة البرمجة الخطيّة:

تصنّف حلول مشكلة البرمجة الخطيّة إلى ما يلي:

- **حلّ ممكن Feasible Solution:** وهو الحلّ الذّي يلبّي احتياجات جميع القيود، أي لا يتعارض مع أيّ من القيود الفعليّة.
- **حلّ غير ممكن Infeasible Solution:** وهو الحلّ الذّي يلبّي احتياجات جزء من القيود، أي يتعارض مع واحد أو أكثر من القيود.
- **حلّ أمثل Optimal Solution:** وهو أفضل الحلول الممكنة وقد يوجد للمشكلة حلّ أمثل وحيد **Unique** أو عدّة حلول مثلى **Alternate Optimal Solutions** ويقدّم تعدّد الحلول المثلى مرونة أكبر لصانع القرار عند قيامه بتنفيذ أحدها.
- **حلّ غير أمثل Non Optimal Solution:** هو أيّ حلّ ممكن أو غير ممكن لا يتمّ تصنيفه كحلّ أمثل.

2- الطريقة البيانيّة:

تستعمل الطريقة البيانيّة كمدخل في البرمجة الخطيّة لحلّ المسائل البسيطة حيث يمكن حلّ النموذج الرّياضي بهذه الطريقة عندما يكون النموذج متكوّن من متغيّرين فقط لكي نتمكّن من تمثيلها على منحنى بياني ثنائي الأبعاد أو استخدام رسم في معلم ثلاثي الأبعاد في حالو وجود 3 متغيّرات لكنّها تحتاج إلى برامج الحاسوب لصعوبة تطبيقها يدويّا.

تعتبر طريقة الرسم البياني طريقة سهلة وبسيطة وواضحة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية خاصة تلك المسائل التي تحتوي على متغيرين على الأكثر وعلى عدد بسيط من القيود كما تفيد طريقة الرسم البياني كمقدمة لدراسة طرق وأساليب أخرى أكثر تعقيدا في حل مشاكل البرمجة الخطية مثل السمبلكس.

3- خطوات الحل باستعمال الطريقة البيانية: تتمثل خطوات الحل وفق الطريقة البيانية فيما يلي:

3-1- رسم مستقيمات القيود في منحنى بياني: ذلك من أجل تمثيل كلّ قيد بخطّ مستقيم في معلم متعامد ومتجانس حيث المحور الأفقي يمثّل X_1 والمحور العمودي يمثّل X_2

- نحوّل المتراجحات إلى معادلات لنتمكن من رسمها.
- نحدّد احداثيّات نقطتين لكلّ قيد

- نرسم المستقيمات التّي تمثّل القيود.

2-3- تحديد منطقة الحلول الممكنة المشتركة:

أ – نحدّد منطقة الحلول الممكنة لكلّ قيد وحده وذلك حسب نوع إشارته

- إذا كانت العلاقة في القيد ≤ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه كبر المتغيرات.
- إذا كانت العلاقة في القيد ≥ فإن اتجاه الحل سوف يكون باتجاه صغر المتغيرات.
- إذا كانت العلاقة في القيد = فإن اتجاه الحل سوف يقع على الخط.

ب- نحدّد منطقة الحلول الممكنة المشتركة التّي تحقّق كلّ القيود.

3-3- تحديد إحداثيّات النّقاط الحديّة: الحلّ الأمثل يقع على أحد النّقاط الحديّة لزوايا المضلّع الذّي يمثّل منطقة الحلول الممكنة المشتركة. لذلك نستعين بجدول لتحديد إحداثيّات النّقاط الحديّة.

- النّقاط التّي تتقاطع مع المحور العمودي أو الأفقي نستنتج احداثيّاتها من المنحنى البياني.
- النّقاط التّي تمثّل تقاطع بين قيدين نحدّد إحداثيّاتها من خلال حلّ جملة معادلتين بين معادلتي القيدين المعنيّين بالتّقاطع.

4-3- حساب قيم دالّة الهدف Z: المقابلة لكلّ نقطة، ذلك بتعويض إحداثيات كلّ نقطة في دالّة الهدف من خلال تشكيل جدول ينظّم عمليّة الحلّ.

5-3- عمليّة اتّخاذ القرار: تكون الإجابة عبارة عن تفسير الحلّ الأمثل اقتصاديا من خلال استنتاج الحلّ الأمثل من الجدول وذلك باختيار:

- احداثيّات النّقطة التّي تقابل أكبر قيمة ل Z في حالة Max
- احداثيّات النّقطة التّي تقابل أقلّ (أصغر) قيمة ل Z في حالة Min باستثناء الصّفر لأنّ الإنتاج يكون عندها معدوم.

<u>مثال على الطريقة البيانية في حالة التعظيم Maximisation</u>

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$2X_1 + X_2 \leq 9$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام الطريقة البيانيّة

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $2X_1 + X_2 \leq 9$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2X_1 + X_2 = 9$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 9 \Rightarrow X_2 = 9$ A (0, 9)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 9 \Rightarrow X_1 = 4.5$ B (4.5, 0)

1-2- القيد الثاني: $X_1 + 2X_2 \leq 6$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $X_1 + 2X_2 = 6$

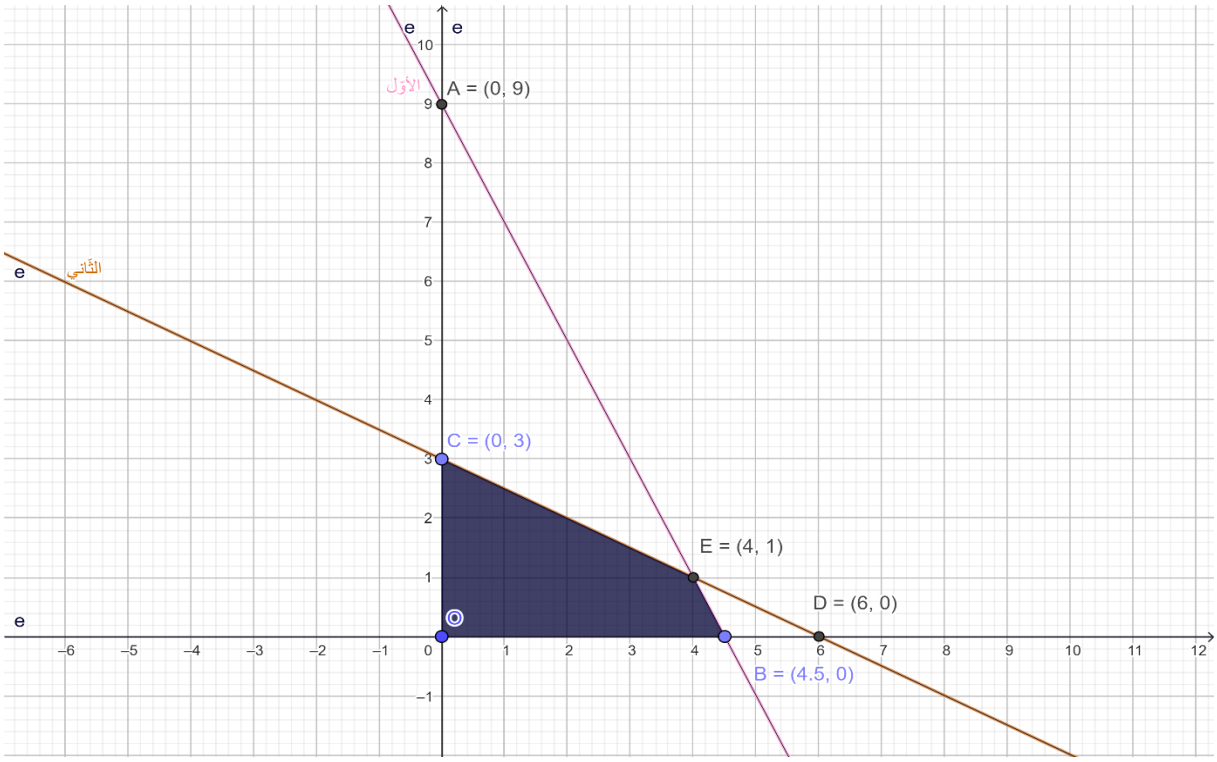
نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 6 \Rightarrow X_2 = 3$ C (0, 3)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 6 \Rightarrow X_1 = 6$ D (6, 0)

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:



بالنسبة للنقطة E فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $2X_1 + X_2 = 9$ و $X_1 + 2X_2 = 6$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

$$E\ (4,1)$$

3- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 3X_1 + 2X_2$
O	(0, 0)	$Z = 3(0) + 2(0) = 0$
B	(4.5, 0)	$Z = 3(4.5) + 2(0) = 13.5$
E	(4, 1)	$Z = 3(4) + 2(1) = 14$
C	(0, 3)	$Z = 3(0) + 2(3) = 6$

النقطة E تمثّل الحلّ الأمثل لأنها تحقّق أعلى ربح ممكن.

القرار الاداري:

يجب انتاج 4 وحدات من المنتج الأول $X_1 = 4$

يجب انتاج وحدة واحدة من المنتج الثاني $X_2 = 1$

من أجل تحقيق ربح قدره $Z = 14$

مثال على الطريقة البيانية في حالة التّقليل Minimisation

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 12X_2$$

Soumise aux contraintes

$$20X_1 + 10X_2 \geq 100$$

$$10X_1 + 10X_2 \geq 80$$

$$10X_2 \geq 40$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام الطريقة البيانيّة

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $20X_1 + 10X_2 \geq 100$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $20X_1 + 10X_2 = 100$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 10\ X_2 = 100 \Rightarrow X_2 = 10$ A (0, 10)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 20\ X_1 = 100 \Rightarrow X_1 = 5$ B (5, 0)

2-1- القيد الثاني: $10\ X_1 + 10\ X_2 \geq 80$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\ X_1 + 10\ X_2 = 80$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 10\ X_2 = 80 \Rightarrow X_2 = 8$ C (0, 8)

نضع:

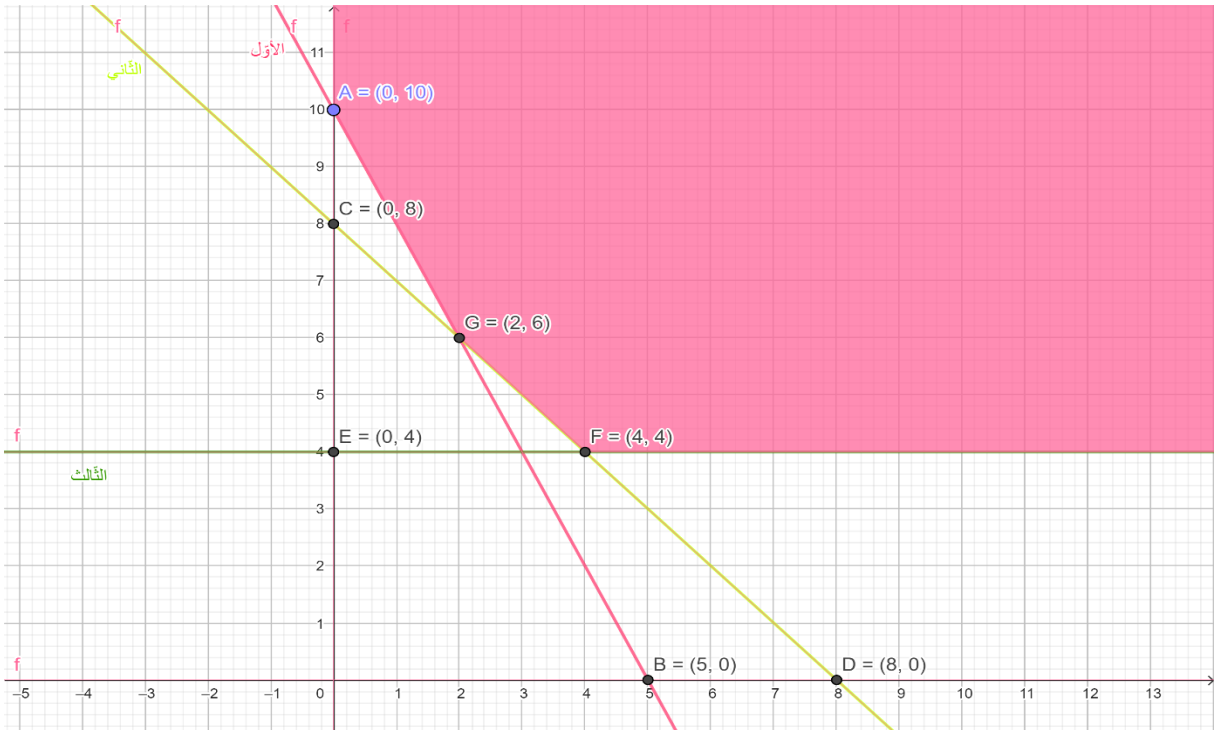
$X_2 = 0 \Rightarrow 10\ X_1 = 80 \Rightarrow X_1 = 8$ D (8, 0)

3-1- القيد الثالث: $10\ X_2 \geq 40$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\ X_2 = 40$

$X_1 = 0$ $X_2 = 4$ E (0, 4)

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:



بالنسبة للنقطة G فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $20\ X_1 + 10\ X_2 = 100$ و $10\ X_1 + 10\ X_2 = 80$

وعليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

G (2, 6)

بالنسبة للنقطة F فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $10\ X_2 = 40$ و $10X_1 + 10\ X_2 = 80$ و عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

F (4, 4)

3- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 10X_1 + 12X_2$
A	(0, 10)	$Z = 10(0) + 12(10) = 120$
G	(2, 6)	$Z = 10(2) + 12(6) = 92$
F	(4, 4)	$Z = 10(4) + 12(4) = 88$

النقطة F تمثّل الحلّ الأمثل لأنها تحقّق أقل تكلفة ممكنة.

القرار الإداري يجب انتاج 4 وحدات من المنتج الأول $X_1 = 4$ و 4 وحدات من المنتج الثاني $X_2 = 4$ لكي يحقّق أقلّ تكلفة ممكنة $Z = 88$

4- الحالات الخاصّة من الطّريقة البيانيّة:

4-1- الحالة الأولى: حالة الحلول المتعدّدة أو حالة تعدّد الحلول المثلى:

مثال:

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 10X_2$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$3X_1 + 6X_2 \leq 30$$
$$3X_1 + 5X_2 \geq 15$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $3X_1 + 6X_2 \leq 30$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $3X_1 + 6X_2 = 30$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5 \Rightarrow X_2 = 5$ A (0, 5)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 3X_1 = 30 \Rightarrow X_1 = 10$ B (10, 0)

2-1- القيد الثاني: $3X_1 + 5X_2 \geq 15$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $3X_1 + 5X_2 = 15$

نضع:

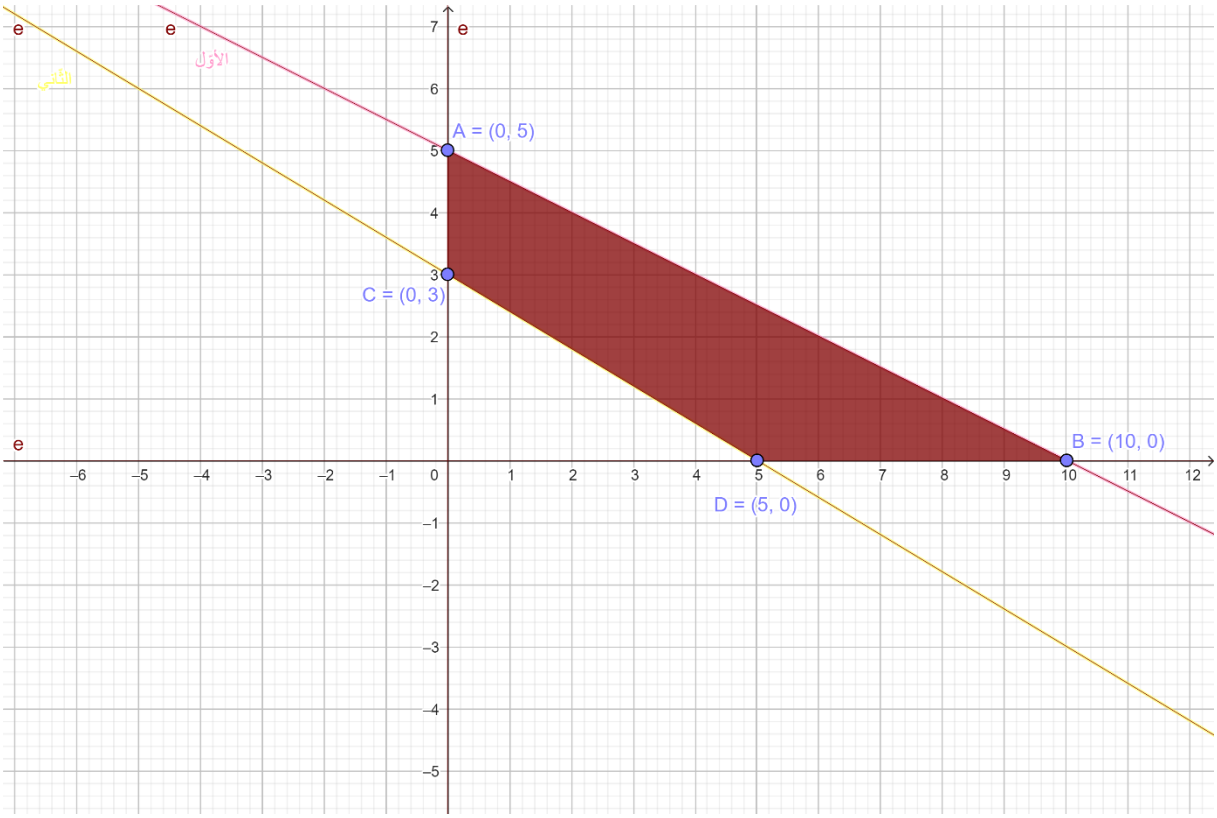
$$X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5X_2 = 15 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 3 \qquad C\ (0, 3)$$

نضع:

$$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3X_1 = 15 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 5 \qquad D\ (5, 0)$$

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نقوم بتحديد منطقة الحلول الممكنة بالنّسبة لكلّ قيد حسب اشارته. في هذه الحالة تختلف إشارة القيود، ثمّ نحدّد منطقة الحلول الممكنة المشتركة التّي تحقّق كافّة القيود. والتّي تمثّل بيانيّا منطقة تقاطع الحلول المكنة بالنّسبة لكافّة القيود. لنستنتج أنّ منطقة الحلّ المشترك تقع بين المستقيمين.



3- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 6X_1 + 10X_2$
A	(0, 5)	$Z = 6(0) + 10(5) = 50$
B	(10, 0)	$Z = 6(10) + 10(0) = 60$
C	(0, 3)	$Z = 6(0) + 10(3) = 30$
D	(5, 0)	$Z = 6(5) + 10(0) = 30$

قيمة دالّة الهدف التّي تحقّق أدنى تكلفة تتمثّل في Z = 30 تقابل النّقطتين الحديتين C و D ذات الاحداثيات (0, 3) و (5, 0) وعليه فإنّ الحلّ الأمثل للبرنامج الخطّي يكون عند النقطتين ويشمل كلّ نقاط القطعة المستقيمة D, C

هذه الحالة الخاصّة تدعى حالة تعدّد الحلول المثلى.

القرار الإداري: على الشّركة الاختيار إمّا:

عدم انتاج أي وحدة من X_1 وإنتاج 3 وحدات من X_2 لتحقيق أدنى تكلفة قدرها 30 وحدة نقديّة.

أو عدم انتاج أي وحدة من X_2 وإنتاج 5 وحدات من X_1 لتحقيق أدنى تكلفة قدرها 30 وحدة نقديّة.

2-4- الحالة الثّانية: عدم وجود حلّ ممكن للمسألة

نقول عادة أنّه لا يوجد حلّ ممكن للمسألة إذا لم يتمّ تحقيق جميع قيود المسألة. ولا يمكن لهذا النوع من المشاكل أن يظهر إذا ما كانت كلّ قيود المسألة من نوع أصغر أو يساوي لأنّ متغيّرات الفروق تعطي دائما حلاّ ممكنا. لكنّ في حالة استعمال قيود من نوع أكبر أو تساوي فالأمر مختلف وقد لا نتحصّل على حلّ للمسألة. وينتج ذلك عادة عن سوء صياغة المسألة حيث تكون القيود عادة متضاربة أو متعاكسة وهذا ما يمكن ملاحظته من الحلّ البياني للنموذج الرّياضي التّالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$2X_1 + X_2 \leq 2$$
$$3X_1 + 4X_2 \geq 12$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $2X_1 + X_2 \leq 2$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2X_1 + X_2 = 2$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 2 \Rightarrow X_2 = 2$ A (0, 2)

نضع:

$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2X_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 1 \qquad B\ (1, 0)$

2-1- القيد الثاني: $3X_1 + 4X_2 \geq 12$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $3X_1 + 4X_2 = 12$

نضع:

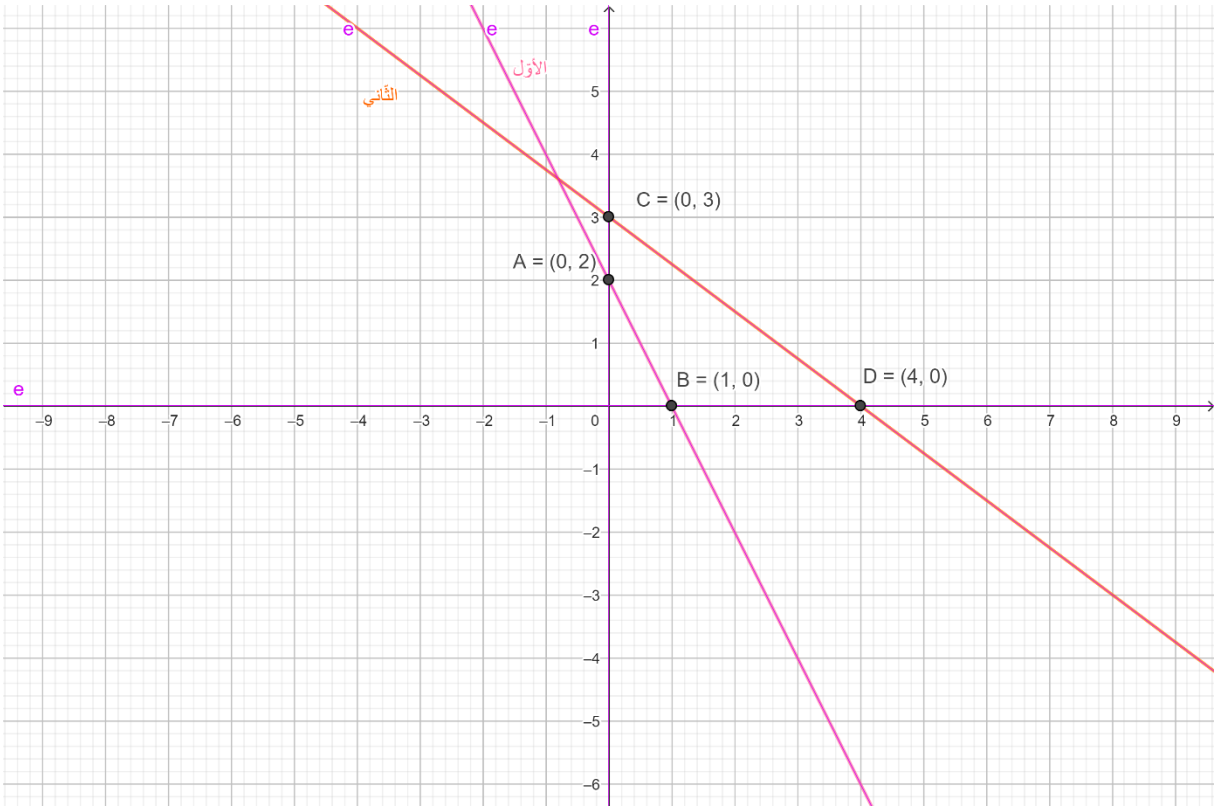
$X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\,X_2 = 12 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 3 \qquad C\ (0, 3)$

نضع:

$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,X_1 = 12 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 4 \qquad D\ (4, 0)$

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

من خلال التّمثيل البياني لهذه المسألة، نرى بشكل جليّ تناقض قيود المسألة حيث لا توجد أي منطقة أو نقطة مشتركة بينهما



3-4- الحالة الثّالثة: حالة حيادية أحد القيود أو حالة وجود قيد محايد لا يؤثّر على الحلّ الممكن

عند تعدّد القيود فإنّه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحلّ الممكن في أيّة نقطة وحينها يكون هذا القيد حياديّا تماما حيث يمكن حذفه كليّة من البرنامج دون أن يحدث ذلك أيّ تأثير على النّظام.

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 14X_2$$
Soumise aux contraintes
$$4X_1 + 8X_2 \geq 32$$
$$5X_1 + 8X_2 \leq 80$$
$$3X_1 \leq 54$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $4X_1 + 8X_2 \geq 32$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $4X_1 + 8X_2 = 32$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 4 \Rightarrow X_2 = 4$ A (0, 4)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 4X_1 = 32 \Rightarrow X_1 = 8$ B (8, 0)

1-2- القيد الثاني: $5X_1 + 8X_2 \leq 80$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $5X_1 + 8X_2 = 80$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 8X_2 = 80 \Rightarrow X_2 = 3$ C (0, 10)

نضع:

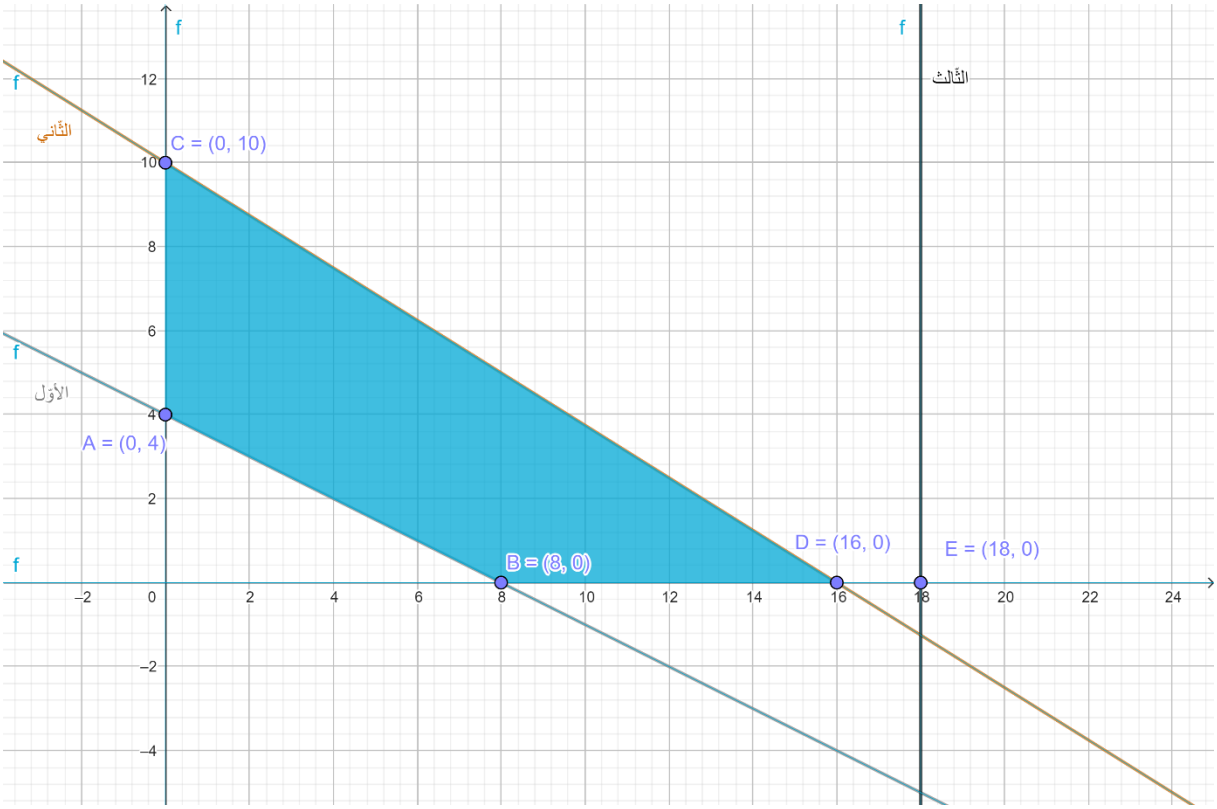
$X_2 = 0 \Rightarrow 5X_1 = 80 \Rightarrow X_1 = 16$ D (16, 0)

1-2- القيد الثّالث: $3X_1 \leq 54$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $3X_1 = 54$

$X_1 = \frac{54}{3} \Rightarrow X_1 = 18$ E (18, 0)

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:



تمثّل المنطقة ABCD منطقة الحلول المقبولة أي انّ الحلّ الأمثل يقع على أحد النّقاط الحديّة لزوايا المضلّع ABCD

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 10X_1 + 14X_2$
A	(0, 4)	$Z = 10(0) + 14(4) = 56$
B	(8, 0)	$Z = 10(8) + 14(0) = 80$
C	(0, 10)	$Z = 10(0) + 14(10) = 140$
D	(16, 0)	$Z = 10(16) + 14(0) = 160$

قيمة دالّة الهدف التّي تحقّق أقصى ربح ممكن تتمثّل في Z= 160 تقابل النّقطة الحديّة D ذات الإحداثيّات (16,0) وعليه فإنّ الحلّ الأمثل لهذا النّموذج هو $X_1 = 16 , X_2 = 0 , Z = 160$

يجي على المؤسّسة إنتاج 16 وحدة من X_1 وعدم إنتاج أي وحدة من X_2 من أجل تحقيق ربح قدره 160

4-4- الحالة الرّابعة: لا نهائيّة الدالّة الاقتصاديّة أو حالة حلول غير محدودة Unbounded Solution

في حالة التّعظيم تكون غالبيّة القيود أقلّ أو تساوي مقدار ثابت، غير أنّه في بعض الأحيان يكون هناك تناقض بين دالّة الهدف والقيود، فتكون هذه الأخيرة كلّها أكبر أو تساوي في حالة التّعظيم وهذا ما يجعل دالّة الهدف تأخذ قيمة لانهائيّة ولا يمكن حينئذ تحديد حل نهائي ومحدّد للدّالة.

مثال:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$X_1 \geq 3$$
$$X_2 \geq 2$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $X_1 \geq 3$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $X_1 = 3$

نضع:

$$X_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad A\ (3, 0)$$

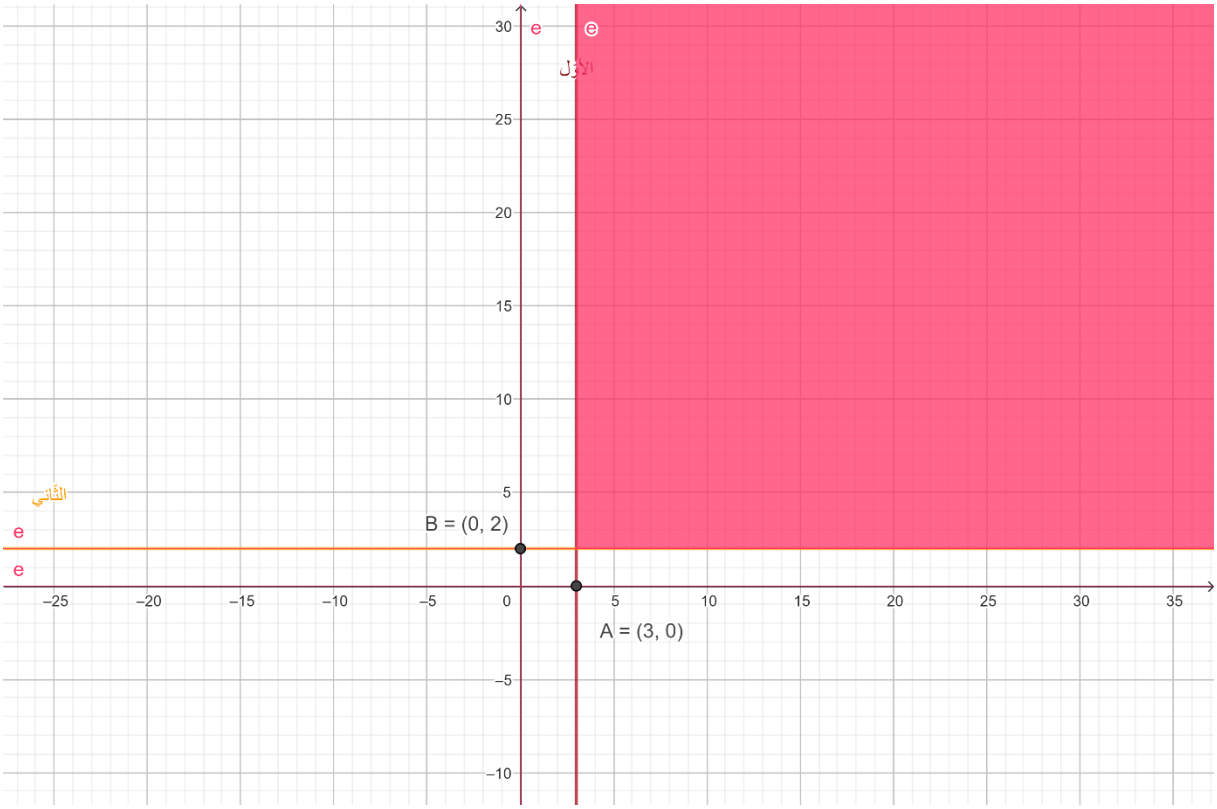
1-2- القيد الثاني: $X_2 \geq 2$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $X_2 = 2$

نضع:

$$X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad B\ (0, 2)$$

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:



نلاحظ من خلال الشّكل أنّ المنطقة الملوّنة تمثّل منطقة الحلول المقبولة أي أنّه توجد منطقة لانهائيّة تحقّق دالّة الهدف، فأيّة قيمة في اتجاه المنطقة الملوّنة تحقّق دالّة الهدف وبالتّالي نقول أنّ دالّة الهدف لانهائيّة.

نلاحظ أنّه مهما اخترنا نقطة أكبر في منطقة الحلول الممكنة تعطي ربح أكبر لأنّها تؤول إلى $+\infty$ هذه الحالة تدعى حالة الحلول غير المحدودة

تمارين محلولة:

تمرين رقم 01:

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

Soumise aux contraintes

$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 21$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_1 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحلّ الأمثل لنموذج البرمجة الخطيّة التّالي باستخدام الطّريقة البيانيّة

الحلّ :

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $5X_1 + 3X_2 \leq 30$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $5X_1 + 3X_2 = 30$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 3X_2 = 30 \Rightarrow X_2 = 10$ A (0, 10)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 5X_1 = 30 \Rightarrow X_1 = 6$ B (6, 0)

1-2- القيد الثاني: $2X_1 + 3X_2 \leq 21$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $2X_1 + 3X_2 = 21$

نضع:

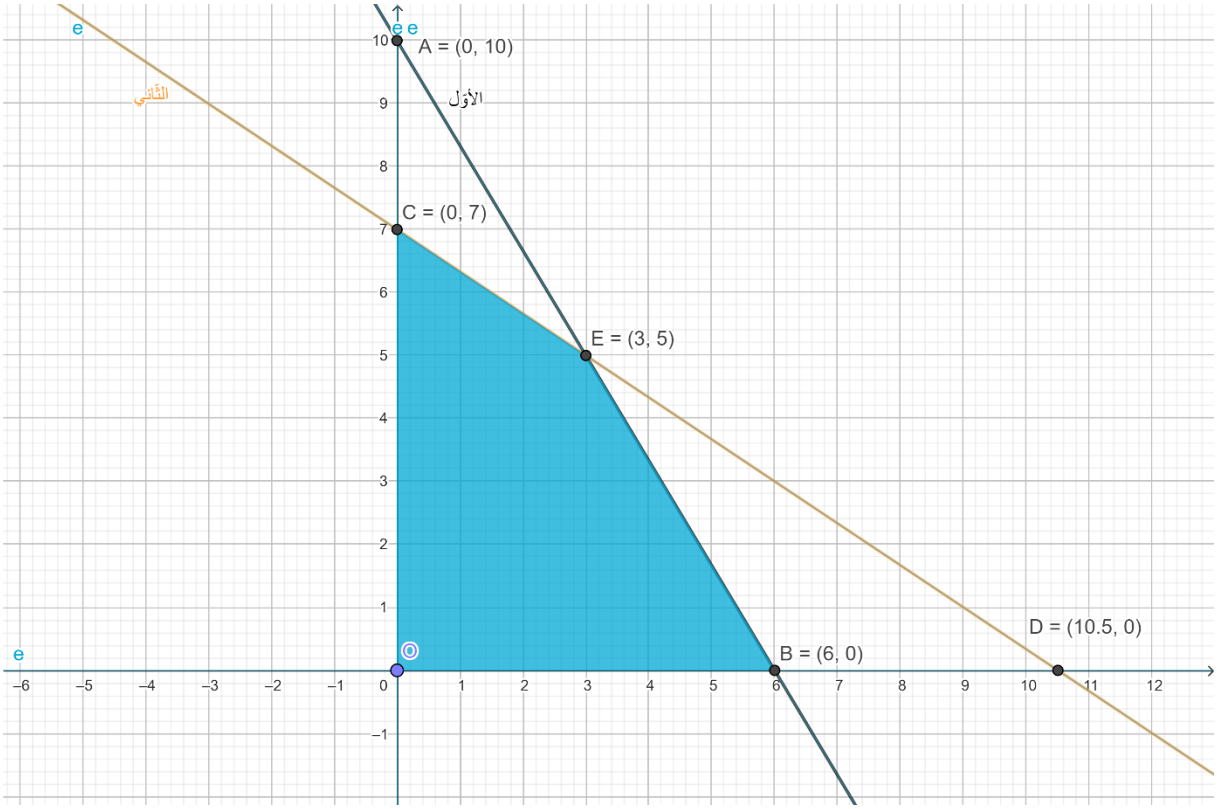
$X_1 = 0 \Rightarrow 3X_2 = 21 \Rightarrow X_2 = 7$ C (0, 7)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 21 \Rightarrow X_1 = 10.5$ D (10.5, 0)

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نقوم بمنطقة الحلول الممكنة بالنّسبة لكلّ قيد حسب إشارته في هذه الحالة كلّ القيود $\leq$ إذن منطقة الحلّ تقع تحت المستقيمات. ثمّ محدّد منطقة الحلول الممكنة المشتركة التّي تحقّق كافّة القيود والتّي تمثّل بيانيّا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنّسبة لكافّة القيود.



تمثّل المنطقة OCEB منطقة الحلول المقبولة أي انّ الحلّ الأمثل يقع على أحد النّقاط الحديّة لزوايا المضلّع OCEB نلاحظ أنّ قيم إحداثيّات النّقاط O,C ,B

بالنسبة للنقطة E فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $5X_1 + 3X_2 = 30$ و $2X_1 + 3X_2 = 21$

عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

بطرح المعادلتين نتحصّل على معادلة ذات مجهول واحد $3X_1 = 9$

$$X_1 = 3$$

نعوّض قيمة X_1 في أحد المعادلتين لاستنتاج قيمة X_2

$2(3) + 3X_2 = 21 \longrightarrow 3X_2 = 15 \longrightarrow X_2 = 5$

E (3 ,5)

3- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 4X_1 + 3X_2$
O	(0, 0)	$Z = 4(0) + 3(0) = 0$
C	(0, 7)	$Z = 4(0) + 3(7) = 21$
E	(3, 5)	$Z = 4(3) + 3(5) = 27$
B	(6, 0)	$Z = 4(6) + 3(0) = 24$

بما أنّ دالّة الهدف من النّوع Max فإنّ النّقطة (3,5) تحقّق الأمثل وتكون قيم المتغيّرات

$$X_1 = 3 \qquad X_2 = 5 \qquad Z = 27$$

يجب على المؤسّسة إنتاج 3 وحدات من X_1 وإنتاج 5 وحدات من X_2 **من أجل تحقيق ربح قدره 27 وحدة نقديّة**

التّمرين الثّاني:

$$\text{Min } Z = 300X_1 + 200X_2$$

Soumise aux contraintes

$$20X_1 + 20X_2 \geq 160$$

$$30X_1 + 10X_2 \geq 120$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_1 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحلّ الأمثل لنموذج البرمجة الخطيّة التّالي باستخدام الطّريقة البيانيّة

الحلّ :

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $20X_1 + 20X_2 \geq 160$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $20X_1 + 20X_2 = 160$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 20X_2 = 160 \Rightarrow X_2 = 8$ A (0, 8)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 20X_1 = 160 \Rightarrow X_1 = 8$ B (8, 0)

1-2- القيد الثاني: $30X_1 + 10X_2 \geq 120$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $30X_1 + 10X_2 = 120$

نضع:

$X_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 10X_2 = 120 \quad \Rightarrow \quad X_2 = 12 \qquad C\ (0, 12)$

نضع:

$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 30X_1 = 120 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 4 \qquad D\ (4, 0)$

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نقوم بمنطقة الحلول الممكنة بالنّسبة لكلّ قيد حسب إشارته في هذه الحالة كلّ القيود $\geq$ إذن منطقة الحلّ تقع فوق المستقيمات. ثمّ محدّد منطقة الحلول الممكنة المشتركة التّي تحقّق كافّة القيود والتّي تمثّل بيانيّا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنّسبة لكافّة القيود.

تمثّل المنطقة CEB منطقة الحلول المقبولة أي انّ الحلّ الأمثل يقع على أحد النّقاط الحديّة لزوايا المضلّع CEB نلاحظ أنّ قيم إحداثيّات النّقاط B،C معروفة

بالنسبة للنقطة E فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $20X_1 + 20X_2 = 160$

و $30X_1 + 10X_2 = 120$

عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

E = (2, 6)

اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 300X_1 + 200X_2$
C	(0, 12)	$Z = 300(0) + 200(12) = 2400$
E	(2, 6)	$Z = 300(2) + 200(6) = 1800$
B	(8, 0)	$Z = 300(8) + 200(0) = 2400$

بما أنّ دالّة الهدف من النّوع Min فإنّ النّقطة (2,6) تحقّق الأمثل وتكون قيم المتغيّرات

$$X_1 = 2 \qquad X_2 = 6 \qquad Z = 1800$$

تمرين رقم 03: (تعدّد الحالات المثلى)

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 10X_2$$

Soumise aux contraintes

$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 45$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحلّ الأمثل لنموذج البرمجة الخطيّة التّالي باستخدام الطّريقة البيانيّة

الحلّ :

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $X_1 + 2X_2 \leq 40$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $X_1 + 2X_2 = 40$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 40 \Rightarrow X_2 = 20$ A (0, 20)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 40 \Rightarrow X_1 = 40$ B (40, 0)

1-2- القيد الثاني: $X_1 + 3X_2 \leq 45$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $X_1 + 3X_2 = 45$

نضع:

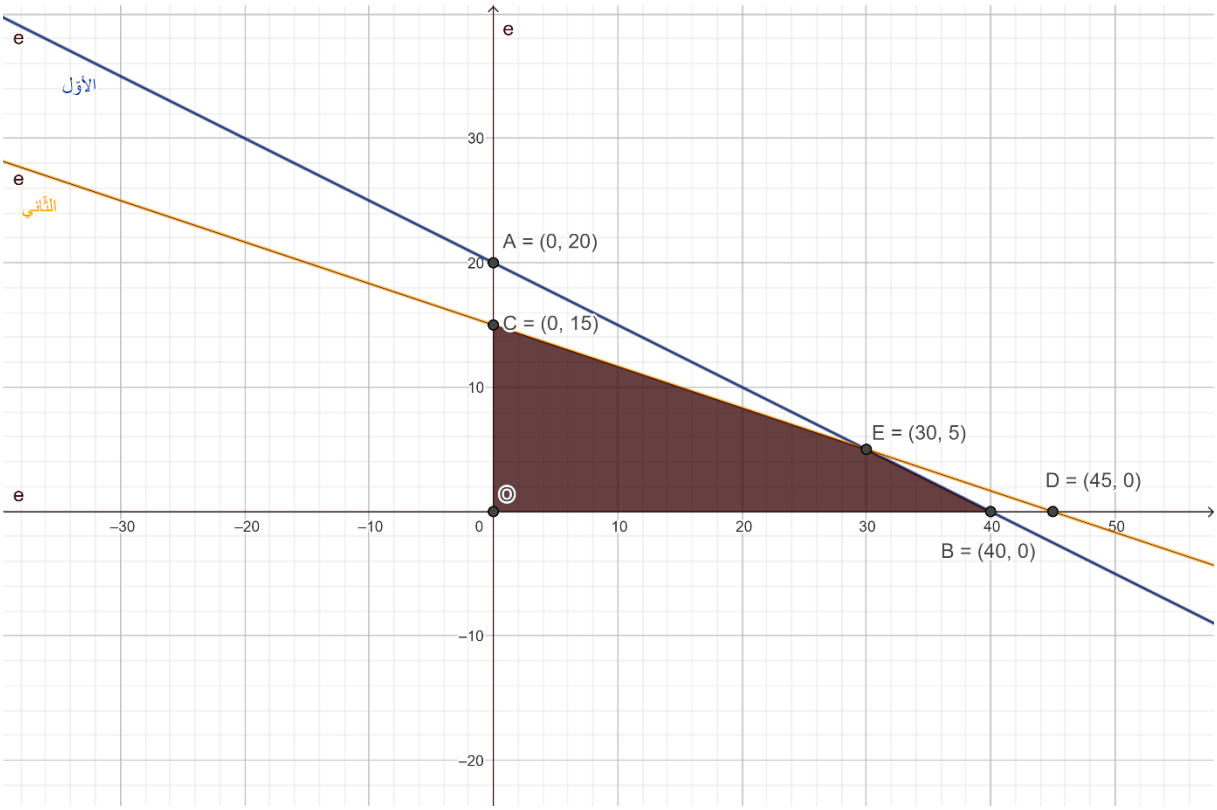
$X_1 = 0 \Rightarrow 3X_2 = 45 \Rightarrow X_2 = 15$ C (0, 15)

نضع:

$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 45 \quad \Rightarrow \quad$ D (45, 0)

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

نقوم بمنطقة الحلول الممكنة بالنّسبة لكلّ قيد حسب إشارته في هذه الحالة كلّ القيود $\leq$ إذن منطقة الحلّ تقع تحت المستقيمات. ثمّ محدّد منطقة الحلول الممكنة المشتركة التّي تحقّق كافّة القيود والتّي تمثّل بيانيّا منطقة تقاطع الحلول الممكنة بالنّسبة لكافّة القيود.



تمثّل المنطقة OCEB منطقة الحلول المقبولة أي انّ الحلّ الأمثل يقع على أحد النّقاط الحديّة لزوايا المضلّع OCEB نلاحظ أنّ قيم إحداثيّات النّقاط O ,C , B معروفة

بالنسبة للنقطة E فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $20X_1 + 20X_2 = 160$

و $30X_1 + 10X_2 = 120$

عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

E = (30, 5)

3- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

النقاط الرأسية	الإحداثيات	$Z = 5X_1 + 10X_2$
O	(0, 0)	$Z = 5(0) + 10(0) = 0$
C	(0, 15)	$Z = 5(0) + 10(15) = 150$
E	(30, 5)	$Z = 5(30) + 10(5) = 200$
B	(40, 0)	$Z = 5(40) + 10(0) = 200$

قيمة دالّة الهدف التّي تحقّق أكبر ربح تتمثّل في Z = 200 تقابل النّقطتين الحديتين E وB ذات الاحداثيات (30, 5) و (40, 0) وعليه فإنّ الحلّ الأمثل للبرنامج الخطّي يكون عند النقطتين E و B

هذه الحالة الخاصّة تدعى حالة تعدّد الحلول المثلى.

$$X_1 = 30 \qquad X_2 = 5 \qquad Z = 200$$

$$X_1 = 40 \qquad X_2 = 0 \qquad Z = 200$$

يجب على المؤسّسة إنتاج 30 وحدات من X_1 وإنتاج 5 وحدات من X_2 **من أجل تحقيق ربح قدره 200 وحدة نقديّة**

أو يجب على المؤسّسة إنتاج 40 وحدات من X_1 وإنتاج 0 وحدات من X_2 **من أجل تحقيق ربح قدره 200 وحدة نقديّة**

تمرين رقم 04: (حالة لا نهائيّة الدالّة الاقتصاديّة أو حالة حلول غير محدودة)

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$

Soumise aux contraintes

$$4X_1 + 8X_2 \geq 40$$

$$X_1 \geq 6$$

$$X_2 \geq 4$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحلّ الأمثل لنموذج البرمجة الخطيّة التّالي باستخدام الطّريقة البيانيّة

الحلّ :

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $4X_1 + 8X_2 \geq 40$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $4X_1 + 8X_2 = 40$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 8X_2 = 40 \Rightarrow X_2 = 5$ A (0, 5)

نضع:

$X_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4X_1 = 40 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 10 \qquad B\ (10, 0)$

2-1- القيد الثاني: $X_1 \geq 6$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $X_1 = 6$

نضع:

$X_1 = 6 \quad \Rightarrow \qquad X_2 = 0 \qquad C\ (6, 0)$

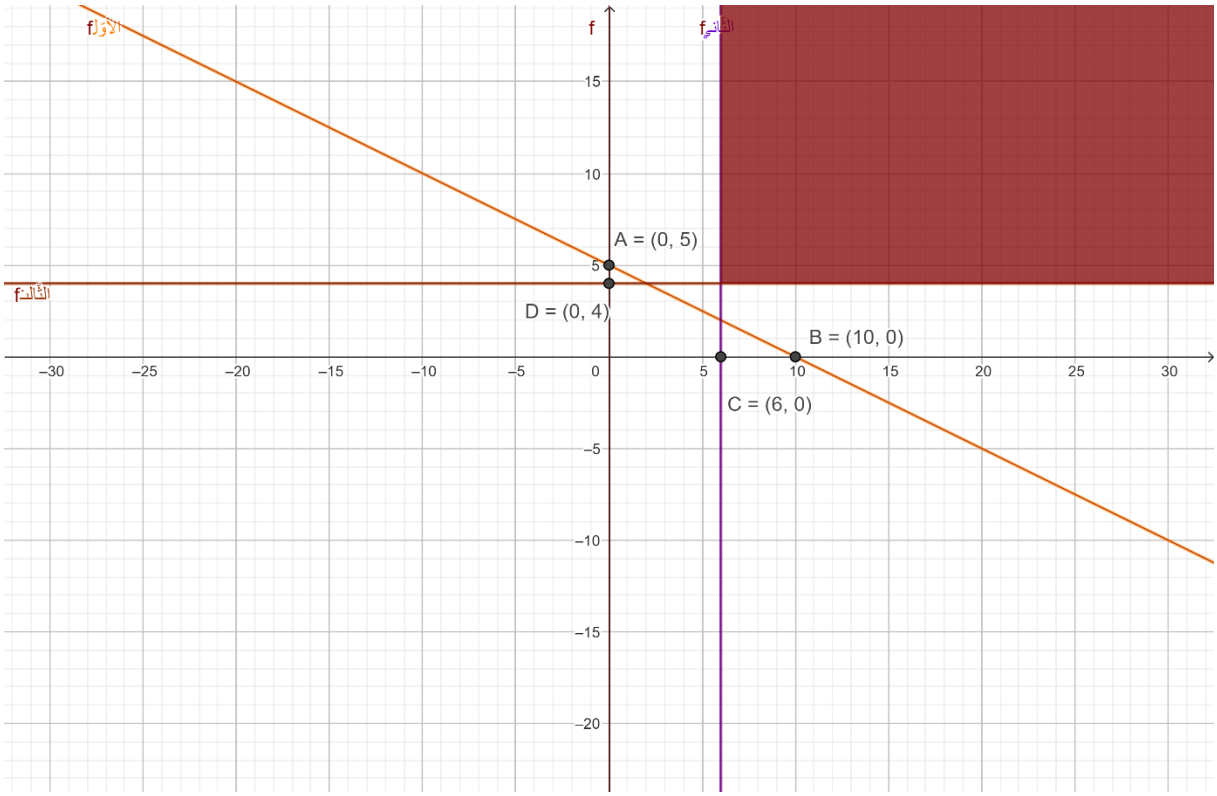
3-1- القيد الثّالث: $X_2 \geq 4$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $X_2 = 4$

نضع:

$X_1 = 0 \quad \Rightarrow \qquad X_2 = 4 \qquad D\ (0, 4)$

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:



باستعمال الطّريقة البيانيّة نلاحظ من خلال الشّكل أنّه توجد منطقة لا نهائيّة تحقّق دالّة الهدف فأيّة قيمة أو نقطة في المنطقة الملوّنة تحقّق دالّة الهدف وبالتّالي نقول أنّ دالة الهدف لا نهائيّة.

نلاحظ أنّه مهما اخترنا نقطة أكبر في منطقة الحلول الممكنة تعطي ربح أكبر لأنّها تؤول إلى $+\infty$ هذه الحالة تدعى حالة الحلول غير المحدودة

تمرين رقم 05: (عدم وجود حلّ أمثل)

$$\text{Min } Z = 20X_1 + 15X_2$$

Soumise aux contraintes

$$5X_1 + 10X_2 \leq 25$$

$$5X_1 + 10X_2 \geq 50$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحلّ الأمثل لنموذج البرمجة الخطيّة التّالي باستخدام الطّريقة البيانيّة

الحلّ :

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $5X_1 + 10X_2 \leq 25$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $5X_1 + 10X_2 = 25$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 10X_2 = 25 \Rightarrow X_2 = 2.5$ A (0, 2.5)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 5X_1 = 25 \Rightarrow X_1 = 5$ B (5, 0)

1-2- القيد الثاني: $5X_1 + 10X_2 \geq 50$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $5X_1 + 10X_2 = 50$

نضع:

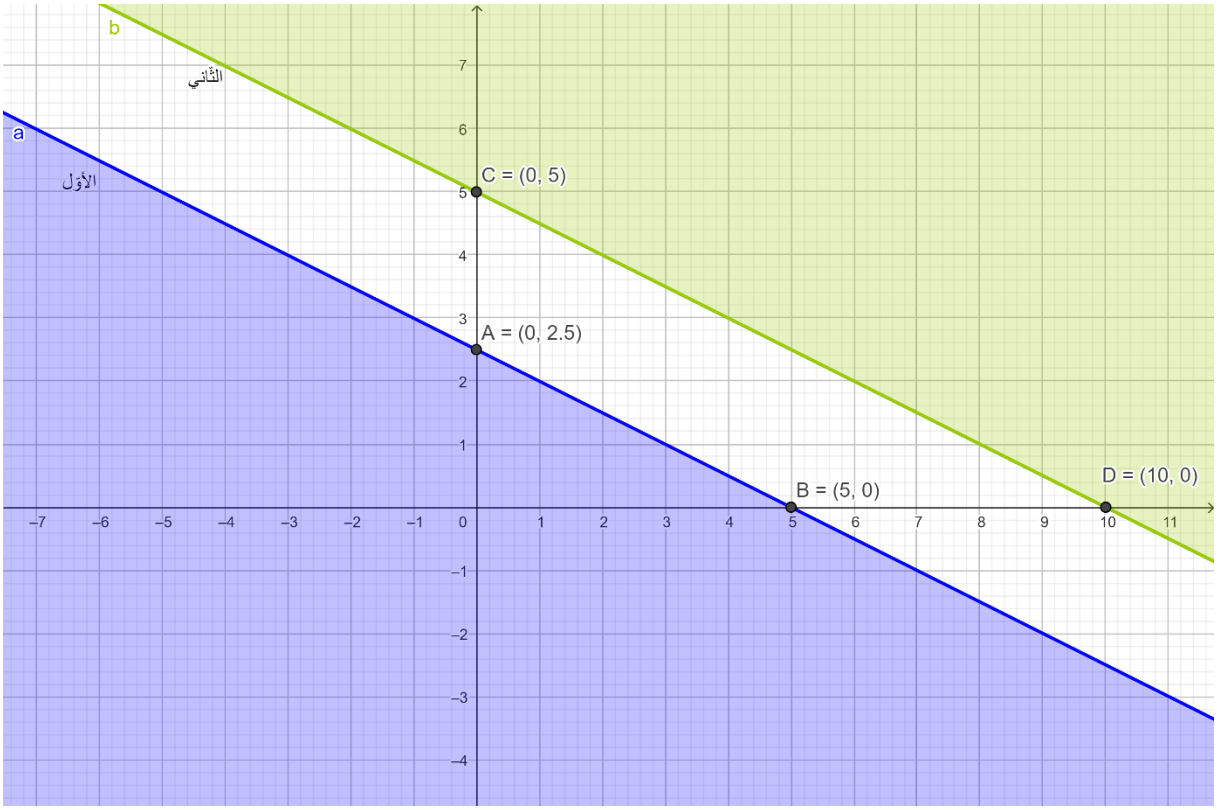
$X_1 = 0 \Rightarrow 10X_2 = 50 \Rightarrow X_2 = 5$ C (0, 5)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 5X_2 = 50 \Rightarrow X_2 = 10$ D (10, 0)

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:

من خلال التّمثيل البياني لهذه المسألة، نرى بشكل جليّ تناقض قيود المسألة حيث لا توجد أي منطقة أو نقطة مشتركة بينهما



تمرين رقم 06: (حياديّة أحد القيود)

$$\text{Max } Z = 20X_1 + 15X_2$$

Soumise aux contraintes

$$5X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 21$$

$$2X_1 + 2X_2 \leq 24$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب: أوجد الحلّ الأمثل لنموذج البرمجة الخطيّة التّالي باستخدام الطّريقة البيانيّة

الحلّ :

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد ومتجانس.

1-1- القيد الأول: $5X_1 + 3X_2 \leq 30$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $5X_1 + 3X_2 = 30$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 3X_2 = 30 \Rightarrow X_2 = 10$ A (0, 10)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 5X_1 = 30 \Rightarrow X_1 = 6$ B (6, 0)

1-2- القيد الثاني: $2X_1 + 3X_2 \leq 21$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $2X_1 + 3X_2 = 21$

نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 3X_2 = 21 \Rightarrow X_2 = 7$ C (0, 7)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 21 \Rightarrow X_1 = 10.5$ D (10.5, 0)

1-3- القيد الثّالث: $2X_1 + 2X_2 \leq 24$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي $2X_1 + 2X_2 = 24$

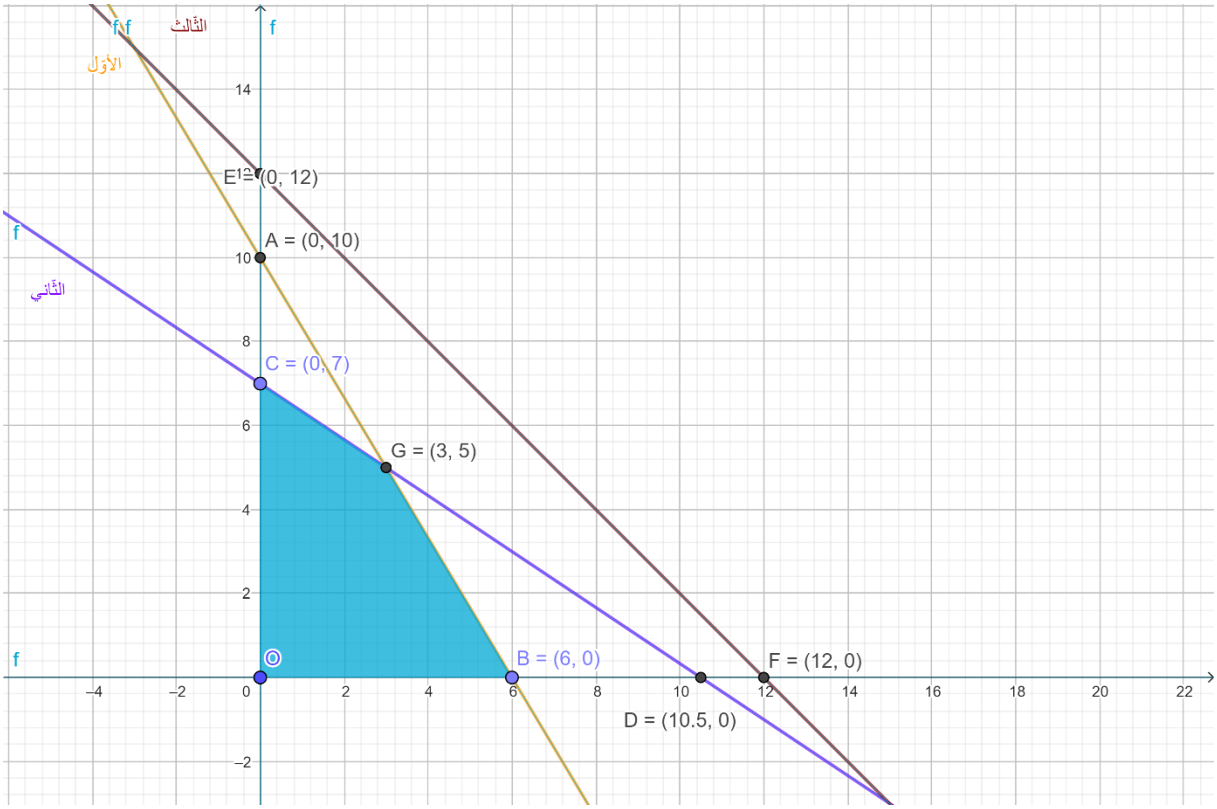
نضع:

$X_1 = 0 \Rightarrow 2X_2 = 24 \Rightarrow X_2 = 12$ E (0, 12)

نضع:

$X_2 = 0 \Rightarrow 2X_1 = 24 \Rightarrow X_1 = 12$ F (12, 0)

2- تحديد منطقة الحلول المقبولة:



عند تعدّد القيود فإنّه يمكن أن نجد أحد مستقيمات هذه القيود لا يلمس منطقة الحلّ الممكن في أيّة نقطة وحينها يكون هذا القيد حياديّا تماما حيث يمكن حذفه كليّة من البرنامج دون أن يحدث ذلك أيّ تأثير على النّظام. **في هذا التّمرين القيد الثّالث يمكن حذفه نهائيّا لأنّه لا يؤثّر على منطقة الحلّ الممكن.**

تمثّل المنطقة OCGB منطقة الحلول المقبولة أي انّ الحلّ الأمثل يقع على أحد النّقاط الحديّة لزوايا المضلّع OCGB نلاحظ أنّ قيم إحداثيّات النّقاط O,C ,B

بالنسبة للنقطة G فهي عبارة عن تقاطع المستقيمين: $5X_1 + 3X_2 = 30$ و $2X_1 + 3X_2 = 21$

عليه يتم حل جملة المعادلة لإيجاد إحداثيات هذه النقطة.

بطرح المعادلتين نتحصّل على معادلة ذات مجهول واحد $3X_1 = 9$

$$X_1 = 3$$

نعوّض قيمة X_1 في أحد المعادلتين لاستنتاج قيمة X_2

$2(3) + 3X_2 = 21 \longrightarrow 3X_2 = 15 \longrightarrow X_2 = 5$

G (3 ,5)

3- اختبار منطقة الحلول الممكنة في دالّة الهدف

$Z = 20X_1 + 15X_2$	الإحداثيات	النقاط الرأسية
$Z = 20(0) + 15(0) = 0$	(0, 0)	O
$Z = 20(0) + 15(7) = 105$	(0, 7)	C
$Z = 20(3) + 15(5) = 135$	(3, 5)	G
$Z = 20(6) + 15(0) = 120$	(6, 0)	B

بما أنّ دالّة الهدف من النّوع Max فإنّ النّقطة (3,5) تحقّق الأمثل وتكون قيم المتغيّرات

$$X_1 = 3 \qquad X_2 = 5 \qquad Z = 135$$

يجب على المؤسّسة إنتاج 3 وحدات من X_1 وإنتاج 5 وحدات من X_2 **من أجل تحقيق ربح قدره 135 وحدة نقديّة**

الفصل الثّالث:

طريقة السّمبلكس

الفصل الثّالث: طريقة السّمبلكس

تمهيد:

لقد رأينا سابقا أنّ الطّريقة البيانيّة تستعمل بالخصوص في حلّ النماذج التّي لا تتعدّى عدد المتغيّرات فيها اثنين، فإذا ما أصبح عدد المتغيّرات في النموذج الخطّي أكثر من ذلك فإنّه يصعب رسم معادلات القيود الفنيّة بيانيا. حتى من النّاحية الجبريّة فإنّه عندما يصبح عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات فإنّه يتعقد عمليّا حلّ هذا النوع من النماذج بيانيّا. لذلك ظهرت إلى الوجود طريقة ال **Simplex** لتسهيل إيجاد حلّ للنّماذج الخطيّة التّي يصعب حلّها بالطّريقة البيانيّة وطريقة السّمبلكس ماهي إلاّ تعميم للطّريقة البيانيّة حيث رأينا أنّه في هذه الطّريقة الحلّ الأمثل يقع في أحد أركان منطقة الحلول الممكنة وتقوم طريقة السّمبلكس بفحص هذه الأركان بطريقة منظّمة للوصول إلى الحلّ الأمثل.

1- طريقة السّمبلكس:

تقوم طريقة السمبلكس على فكرة تحسين الحلّ خلال كلّ جدول في دالّة الهدف أي أنّنا نبدأ بالجدول الأوّل الذّي يمثّل الحلّ الابتدائي (إنتاج معدوم) وننتقل من جدول إلى آخر لتحسين الحلّ إلى أن نصل إلى الجدول الذّي يمثّل الحلّ الأمثل والذّي لا يمكن تحسين دالّة الهدف بعده. تعتمد هذه الطّريقة لحلّ مسائل البرمجة الخطيّة على قاعدة أساسيّة تمّ استنتاجها سابقا في الطّريقة البيانيّة والتّي تنصّ على أنّ أيّ حلّ لمسألة البرنامج الخطّي سيكون على أحد النّقاط الحديّة فقط. حيث يعتمد استخدام طريقة السّمبلكس على مجموعة من الخطوات في شكل جداول تتطلّب إجراء عدد من العمليّات الحسابيّة وفق منهجيّة معيّنة على هذه الجداول التّي تلخّص المسألة محلّ الدّراسة والتّي تؤدّي في النّهاية إلى الحصول على الحلّ الأمثل إن وجد.

2- مراحل حلّ النّموذج الخطّي بطريقة السّمبلكس:

المرحلة الأولى: تحويل نموذج البرمجة الخطيّة من الصّيغة الأوليّة إلى الصّيغة القياسيّة أو المعياريّة **Standard Form** وذلك على النّحو التّالي :

1. تحويل القيود **Constraints** في نموذج البرمجة الخطيّة إلى معادلات كالآتي:

أ. إذا كانت إشارة القيد **أقلّ من أو يساوي** ($\leq$) يتمّ إضافة متغيّر مكمّل إلى الجانب الأيسر للقيد **ويسمّى المتغيّر الزائد أو المتغيّر الرّاكد Slack Variable** ويرمز له بالرّمز S_i ويظهر هذا المتغيّر بمعامل صفر في دالّة الهدف.

ب. إذا كانت إشارة القيد **أكبر من أو يساوي** ($\geq$) يتمّ طرح متغيّر فائض من الجانب الأيسر للقيد **ويسمّى المتغيّر الفائض Surplus Variable** ويرمز له بالرّمز S_i **ثمّ نضيف متغيّر اصطناعي Artificial Variable إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرّمز A_i.** ويظهر المتغيّر الفائض بمعامل صفر في دالّة الهدف. أمّا المتغيّر الاصطناعي فيظهر بمعامل **(M)** في دالّة الهدف والتّي ترمز إلى معامل رقمي كبير جدّا، أمّا إشارتها في دالّة الهدف فتكون موجبة **(+M)** عندما تكون دالّة الهدف **تخفيض أو تقليل (Minimization)** أمّا إذا كانت **دالّة الهدف تعظيم (Maximization) فإنّ إشارة M تكون سالبة (–M)**

ج. إذا كانت إشارة القيد **يساوي (=) يتمّ إضافة متغيّر اصطناعي Artificial Variable** إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرّمز A_i.

شارة القيد	الإجراء	دالة الهدف تعظيم Max	دالة الهدف تخفيض Min
أقلّ من أو يساوي ($\leq$)	$+S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
أكبر من أو يساوي ($\geq$)	$-S_i + A_i$	$0Si - MA_i$	$0Si + MA_i$
يساوي (=)	$+A_i$	$- MA_i$	$+ MA_i$

2. إعادة كتابة دالّة الهدف في ضوء المتغيّرات الجديدة التّي دخلت إلى نموذج البرمجة الخطيّة مع الأخذ بعين الاعتبار معامل المتغيّر وكيفيّة ظهوره في دالّة الهدف.

المرحلة الثّانية: تكوين جدول الحلّ الأوّلي (الأساسي) للحصول على حلّ أوّلي ممكن والذّي يناظر الحلّ الأوّلي عند نقطة الأصل في طريقة الحلّ البياني. يكون تنظيم بيانات الشّكل القياسي أو المعياري في جدول الحلّ الأوّلي كما هو مبيّن في الجدول

$Cj \rightarrow$		C_{ij}	C_{ij}	C_{ij}	0	0	0	الطّرف الأيمن للقيود B_i	R_i
$\downarrow$		X_{ij}	X_{ij}	X_{ij}	S_1	S_2	S_n		
S_1	0	معاملات المتغيّرات في القيد 1						b1	
S_2	0	معاملات المتغيّرات في القيد 2							
S_n	0	معاملات المتغيّرات في القيد n						b_n	
$Z_j = \sum C_j x_j$		Z_1	.....				....		
$Z = C_j - Z_j$		C1 –Z1	.....				.....		

المرحلة الثّالثة: التحقّق من أمثليّة الحلّ وذلك من خلال فحص قيم الصفّ $Z=C_j-Z_j$ والذّي يعبّر عن مدى مساهمة كلّ متغيّر من متغيّرات دالّة الهدف عند إضافة وحدة واحدة ويتمّ التّقييم على النّحو التّالي:

أ. إذا كانت دالّة الهدف تعظيم Max فإنّ الحلّ الأمثل يتحقّق عندما تكون جميع قيم الصفّ $Z=C_j-Z_j$ أقلّ من او تساوي صفر **0** $\leq C_j-Z_j$ سالبة أو أصفار

ب. إذا كانت دالّة الهدف تقليل Min فإنّ الحلّ الأمثل يتحقّق عندما تكون جميع قيم الصفّ $Z=C_j-Z_j$ أكبر من او تساوي صفر **0** $\geq C_j-Z_j$ موجبة أو أصفار

في حالة تحقّق شرط الأمثليّة يتمّ التوقف عند هذه المرحلة ويكون الحلّ المتحقّق الحلّ الأمثل وإذا لم يتحقّق شرط الأمثليّة يتمّ الانتقال إلى المرحلة الرّابعة.

المرحلة الرابعة: تحديد المتغيّر الدّاخلي والخارجي

أ. تحديد المتغيّر الدّاخلي يتمّ على أساس قيم صفّ تقييم الحلّ $Z = C_j - Z_j$ فإذا كانت دالّة الهدف تعظيم **Max نختار المتغيّر صاحب أعلى قيمة موجبة في صفّ** $Z = C_j - Z_j$ ويسمّى العمود الذّي يقع فيه **بعمود المتغيّر الدّاخلي** أمّا إذا كانت دالّة الهدف تقليل Min **نختار المتغيّر صاحب أعلى قيمة بإشارة سالبة في صفّ** $Z = C_j - Z_j$ ويسمّى العمود الذّي يقع فيه **بعمود المتغيّر الدّاخلي**

ب. تحديد المتغيّر الخارجي عن طريق قسمة قيم عمود الكميّات (الطّرف الأيمن للقيود) B_i **على القيم المناظرة أو المقابلة لها في عمود المتغيّر الدّاخلي** ويكون المتغيّر الخارجي هو المتغيّر الذّي يقابل أقلّ حاصل قسمة في عمود R_i **إذن نختار أقلّ قيمة موجبة ونترك القيم السّالبة وحالات عدم التّعيين.** يسمّى الصف الذّي يقع فيه المتغيّر الخارجي بالصفّ المحوري أو صفّ الارتكاز. ويسمّى العنصر الذّي يتقاطع عنده عمود المتغيّر الدّاخلي أو عمود الارتكاز مع صفّ المتغيّر الخارجي **بالعنصر المحوري أو البؤرة Pivot**

المرحلة الخامسة: يتمّ تعديل جدول الحلّ الأوّلي بتكوين جدول جديد عن طريق إجراء بعض التّحسينات أو التّعديلات على مصفوفة المعاملات في جدول الحلّ الأوّلي حيث يرتبط الجدول الجديد بجدول الحلّ الأوّلي باعتبار الجدول الجديد مرحلة لاحقة لجدول الحلّ الأوّلي وتتلخّص إجراءات تكوين الجدول الجديد كما يلي:

1. تحتسب قيم صفّ المتغيّر الدّاخلي (المتغيّر الدّاخل إلى الحلّ) بقسمة الصفّ بكامله على البؤرة وبالتّالي ينتقل المتغيّر الدّاخلي ويصبح صفّ جديد في الجدول الثّاني ويسمّى بالمعادلة المحوريّة وتصبح البؤرة = 1
2. يتمّ تكوين الجدول الجديد بوضع المعادلة المحوريّة ويتمّ العمل عليها بإنشاء صفوف جديدة في الجدول الثّاني، ننظر لكلّ عنصر من عناصر التّبديل الموجودة في عمود الارتكاز ونستخدم القانون الاتي:

سالب عنصر التّبديل * المعادلة المحوريّة + المعادلة القديمة (الأصليّة في الجدول السّابق) = معادلة جديدة (في الجدول الجديد)

3. بعد الانتهاء من عمليّة الحساب تتمّ عمليّة اختبار أمثليّة الحلّ **(المرحلة الثّالثة)**

3- تعريفات هامّة:

3-1- العنصر المحوري (البؤرة) Pivot Element:

هي القيمة التّي يتقاطع فيها صفّ المتغيّر الخارجي Leaving Variable مع عمود المتغيّر الدّاخلي Entering Variableأو القيمة التّي يتقاطع فيها صفّ الارتكاز مع عمود الارتكاز.

3-2- المعادلة المحوريّة Pivot Equation:

هي المعادلة أو الصفّ النّاتج بعد قسمة صفّ المتغيّر الخارجي على العنصر المحوري (البؤرة) أو قسمة صفّ الارتكاز على العنصر المحوري (البؤرة). بمعنى قسمة الصفّ الأصلي الأساسي على البؤرة.

3-3- عناصر التّبديل Alternative Elements:

العنصر الذّي يتمّ ضربه في المعادلة المحورية وهو موجود في عمود المتغيّر الدّاخلي (عمود الارتكاز) بخلاف البؤرة.

مثال تطبيقي على حالة التّعظيم Maximisation

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 7X$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$2X_1 + 4X_2 \leq 40$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 30$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري: (تحويل نموذج البرمجة الخطيّة (النموذج الأوّلي) الى الصّيغة القياسيّة)

$$\begin{cases} Max\ Z = 9X_1 + 7X \\ Soumise\ aux\ contraintes \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 40 \\ X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Max\ Z = 9X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 \\ Soumise\ aux\ contraintes \\ 2X_1 + 4X_2 + S_1 = 40 \\ X_1 + 3X_2 + S_2 = 30 \\ X_1, X_2 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 4 متغيرات، ومعادلتين فإنه يتم الحصول على أول حل أساسي مقبول عن طريق عدم متغيّرين (4-2=2) ولتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) X_1=0، X_2=0 وبعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: S_1=40، S_2=30 والذي يعتبر حل الأساس المقبول الأول، حيث أن Z=0 ما يعني أن المؤسسة لازالت في بداية نشاطها ولم تقم بعملية الإنتاج.

3- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

- تتم في المرحلة الأولى تشكيل جدول يضم في السطرين الأول والثاني متغيرات النموذج (متغيرات القرار، متغيرات الفجوة)، حيث تكتب في السطر الأول المتغيرات الأساسيّة وفي السطر الثاني معاملات هذه المتغيرات (C_j) في دالة الهدف
- تكتب في العمودين الأول والثاني (على اليسار) متغيرات الأساس المتحصل عليها من أول حل أساس مقبول مع معاملاتها (C_j)في دالة الهدف؛
- في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية؛
- في العمود B rayon تتم كتابة المتاح (من القيود الوظيفية)؛

- في السطر $Z_j = \sum C_j X_j$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها، مثلا: $(0\times2)+(0\times1)=0$، وذلك للحصول على القيمة Z_j و هكذا؛
- في السطر $Z = C_j - Z_j$ يتم طرح قيم Z_j من معاملات كافة المتغيرات في دالة الهدف (أول سطر C_j)؛

للحصول على قيمة دالة الهدف Zيتم ضرب معاملات متغيرات الأساس (العمود الأول C_j).

المتغيّر الدّاخلي (X_1) المتغيّر الخارجي (X_2)

	C_j →	9	7	0	0	**B rayon**	R_i
	↓	X_1	X_2	S_1	S_2		
S_1	0	2	4	1	0	40	40/2 = 20
S_2	0	1	3	0	1	30	30/1 = 30
$Z_j = \sum C_j x_j$		0	0	0	0	Z = 0	
$Z = C_j - Z_j$		9	7	0	0		

البؤرة = 2

تحديد المتغيّر الدّاخلي: أكبر قيمة في سطر $C_j - Z_j$ هي 9 المقابلة لعمود المتغيّر X_1 إذن X_1 هو المتغيّر الدّاخل في الجدول الموالي

تحديد المتغيّر الخارجي: أدنى قيمة موجبة في عمود النّسب R_i هي 20 المقابلة لسطر المتغيّر S_1 إذن S_1 هو المتغيّر الخارجي

تحديد البؤرة Pivot: هي نقطة تقاطع عمود المتغيّر الدّاخلي مع سطر المتغيّر الخارجي. البؤرة تساوي 2

للانتقال إلى الجدول الجديد يمكن الاستعانة بجداول مساعدة لحساب القيم الجديدة في الجدول الجديد

R_1 القديم هو سطر المتغيّر الخارجي S_1 في الجدول رقم 01

R_1 الجديد يمثّل المعادلة المحوريّة. **نحصل على المعادلة المحوريّة بقسمة سطر المتغيّر الخارجي S_1 على البؤرة، فنحصل على سطر X_1**

R_1(قديم)	2	4	1	0	40
R_1 (جديد) = R_1(قديم) /4	1	2	1/2	0	20

يتمّ تكوين الجدول الجديد بوضع المعادلة المحوريّة أي X_1 (الموجودة في الجدول الثّاني) و يتمّ العمل عليها بإنشاء صفوف جديدة في الجدول الثّاني، ننظر لكلّ عنصر من عناصر التّبديل الموجودة في عمود الارتكاز (أي عمود X1 الموجود في الجدول الأول) ونستخدم القانون الاتي:

سالب عنصر التّبديل * المعادلة المحوريّة + المعادلة القديمة (الأصليّة في الجدول السّابق) = معادلة جديدة (في الجدول الجديد)

R_2(قديم)	1	3	0	1	30
R_1 (جديد) = المعادة المحوريّة	1	2	1/2	0	20
$-1 * R_1$(جديد)	-1	-2	-1/2	0	-20
R_2(جديد) = $-1 * R_1$(جديد) + R2(قديم)	0	1	-1/2	1	10

		9	7	0	0	**B rayon**	**R_i**
C_j →	↓	X_1	X_2	S_1	S_2		
X_1	9	1	2	1/2	0	20	
S_2	0	0	1	-1/2	1	10	
$Z_j = \sum C_j x_j$		9	18	0	0	Z = 180	
$Z = C_j - Z_j$		0	-11	-9/2	0		

كلّ قيم $C_j - Z_j$ أقلّ أو تساوي الصّفر (تحقق شرط الأمثليّة في حالة التّعظيم) $C_j - Z_j \leq 0$ إذن الجدول الأخير يمثّل الحلّ الأمثل

الحلّ الأمثل $X_1 = 20$, $X_2 = 0$, $S_1 = 0$, $S_2 = 10$, $Z = 180$

القرار الإداري: انتاج 20 وحدة من X_1 وعدم انتاج أيّ وحدة من X_2 من أجل تحقيق أعلى ربح ممكن مقداره $Z = 180$

4- خطوات الحل باستخدام طريقة *Big M*:

طور هذا الأسلوب العالم *Charne*، ويقوم هذا الأسلوب على أساس إضافة معامل للمتغير الاصطناعي في دالة الهدف، ويتم حل النموذج بطريقة السمبلكس بصفة عادية. وبغية التعرف على مراحل تطبيق هذه الطريقة سوف نأخذ المثال التالي:

$$Min\ Z = 30\ X_1+24\ X_2+18\ X_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5X_1+2X_2+X_3 \geq 80 \\ 3X_1+3X_2+3X_3 \geq 60 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

1- كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Min\ Z = 30\ X_1+24\ X_2+18\ X_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5X_1+2X_2+X_3 - S_1 = 80 \\ 3X_1+3X_2+3X_3 - S_2 = 60 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

2- إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 5 متغيرات، و2 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساي مقبول عن طريق عدم 3متغيرات (5-2=3) ولتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) X_1=0، X_2=0، X_3=0 وبعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: S_1= (- 80)، S_2= (- 60)، والذي يعتبر حل أساس غير مقبول، لأن S_1 و S_2 لا تحققان قيود عدم سلبية المتغيرات، أي أن النموذج لا يتوفر على حل أساس مقبول، وعليه لا يمكن تطبيق طريقة السمبلكس لاشتراطها على توفر أول حل أساس مقبول.

وحتى يتسنى لنا توفير حل الأساس المقبول يتوجب علينا الاستعانة بمتغيرات جديدة تسمى المتغيرات المساعدة (الوهمية، الاصطناعية)، حيث تضاف متغيرة واحدة على مستوى كل قيد ليصبح النموذج كالتالي:

$$Min\ Z = 30\ X_1+24\ X_2+18\ X_3+0\ S_1+0\ S_2+\boldsymbol{M}\ A_1+\boldsymbol{M}\ A_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5X_1+2X_2+X_3 - S_1+\boldsymbol{A_1} = 80 \\ 3X_1+3X_2+3X_3 - S_2+\boldsymbol{A_2} = 60 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \\ S_1, S_2 \geq 0 \\ A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

بعد إضافة المتغيرات الوهمية A_1 و A_2 يصبح النموذج مكونا من 7 متغيرات و2 معادلات، وعليه يمكن إيجاد أول حل أساس مقبول وذلك عن طريق عدم متغيرات 5 متغيرات (5=2-7) فيصبح حل الأساس المقبول الأول كالتالي:

$$X_1=0,\quad X_2=0,\quad X_3=0,\quad S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=0\quad A_1=80\quad A_2=60$$

3- تشكيل جدول السمبلكس الأول:

		30	24	18	0	0	M	M	**B rayon**	**R_i**
C_j ↓	→	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**		
A_1	**M**	5	2	1	-1	0	1	0	80	16
A_2	**M**	3	3	3	0	-1	0	1	60	20
$Z_j = \sum C_j x_j$		8M	5M	4M	-M	-M	M	M	140M	
$Z = C_j - Z_j$		30-8M	24-5M	18-4M	M	M	0	0		

4- تشكيل جدول السمبلكس الثاني:

		30	24	18	0	0	M	M	**B rayon**	**R_i**
Cj ↓	→	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**		
X_1	**30**	1	2/5	1/5	-1/5	0	1/5	0	16	80
A_2	**M**	0	9/5	12/5	3/5	-1	-3/5	1	12	5
$Z_j = \sum C_j x_j$		30	12+9/5M	6+12/5M	-6+3/5M	-M	6-3/5M	M	480+12M	
$Z = C_j - Z_j$		0	12-9/5M	12-12/5M	6-3/5M	M	-6+8/5M	0		

5- تشكيل جدول السمبلكس الثالث:

		30	24	18	0	0	M	M	**B rayon**	**R_i**
Cj ↓	→	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**		
X_1	**30**	1	1/4	0	-1/4	1/12	/	/	15	
X_3	**18**	0	3/4	1	1/4	-5/12	/	/	5	
$Z_j = \sum C_j x_j$		30	21	18	-3	-5	/	/	450+90 = 540	
$Z = C_j - Z_j$		0	3	0	3	5	/	/		

نلاحظ من خلال جدول السمبلكس الثالث أن قيم معاملات Z كلها موجبة أو معدومة، وبالتالي فإن الحل الأخير المتوصل إليه هو الحل الأمثل

$$X_1 = 15 \ , \quad X_2 = 0 \ , X_3 = 5 \ , \quad Z = 540$$

تمارين محلولة

تمرين رقم 01

$$\text{Max } Z = 50X_1 + 120X_2$$

Soumise aux contraintes

$$2X_1 + 4X_2 \leq 80$$

$$3X_1 + X_2 \leq 60$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس

الحلّ:

		$C_j \rightarrow$	50	120	0	0	**B rayon**	**R_i**
			X_1	X_2	S_1	S_2		
S_1	0		2	4	1	0	80	80/4 = 20
S_2	0		3	1	0	1	60	60/1 = 60
$Z_j = \sum C_j X_j$			0	0	0	0	Z = 0	
$Z = C_j - Z_j$			50	120	0	0		

		$C_j \rightarrow$	50	120	0	0	**B rayon**	**R_i**
			X_1	X_2	S_1	S_2		
X_2	120		1/2	1	1/4	0	20	
S_2	0		5/2	0	-1/4	1	40	
$Z_j = \sum C_j X_j$			60	120	30	0	Z = 2400	
$Z = C_j - Z_j$			-10	0	-30	0		

الحلّ الأمثل $X_1 = 0$, $X_2 = 20$, $S_1 = 0$, $S_2 = 40$, $Z = 2400$

القرار الإداري:

انتاج **20** وحدة من X_2 وعدم انتاج أيّ وحدة من X_1 من أجل تحقيق أعلى ربح ممكن مقداره $Z = 2400$

تمرين رقم 02

$$\text{Max } Z = 400X_1 + 800X_2$$

Soumise aux contraintes

$$X_1 + 2X_2 \leq 60$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 120$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس

الحلّ:

	C_j →	400	800	0	0	***B rayon***	***R_i***
	↓	***X_1***	***X_2***	***S_1***	***S_2***		
S_1	**0**	1	2	1	0	60	60/2 = 30
S_2	***0***	4	3	0	1	120	120/3 = 40
$Z_j = \sum C_j X_j$		0	0	0	0	Z = 0	
$Z = C_j - Z_j$		400	800	0	0		

	C_j →	400	800	0	0	***B rayon***	***R_i***
	↓	***X_1***	***X_2***	***S_1***	***S_2***		
X_2	**800**	1/2	1	1/2	0	30	
S_2	***0***	5/2	0	-3/2	1	30	
$Z_j = \sum C_j X_j$		400	800	400	0	Z = 24000	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	-400	0		

الحلّ الأمثل $X_1 = 0$, $X_2 = 30$, $S_1 = 0$, $S_2 = 30$, $Z = 2400$

القرار الإداري:

انتاج **30** وحدة من X_2 وعدم انتاج أيّ وحدة من X_1 من أجل تحقيق أعلى ربح ممكن مقداره $Z = 24000$

تمرين رقم 03

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 8X_2$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$4X_1 + 2X_2 \leq 80$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 50$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس

الحلّ:

	$C_j \rightarrow$	10	8	0	0	**B rayon**	**R_i**
	$\downarrow$	X_1	X_2	S_1	S_2		
S_1	0	4	2	1	0	80	80/4 = 20
S_2	0	1	3	0	1	50	50/1 = 50
$Z_j = \sum C_j X_j$		0	0	0	0	Z = 0	
$Z = C_j - Z_j$		10	8	0	0		

	$C_j \rightarrow$	10	8	0	0	**B rayon**	**R_i**
	$\downarrow$	X_1	X_2	S_1	S_2		
X_1	10	1	1/2	1/4	0	20	20/1/2 = 40
S_2	0	0	3/2	-1/4	1	30	30/3/2 = 20
$Z_j = \sum C_j X_j$		10	5	5/2	0	Z = 200	
$Z = C_j - Z_j$		0	3	-5/2	0		

	$C_j \rightarrow$	10	8	0	0	**B rayon**	**R_i**
	$\downarrow$	X_1	X_2	S_1	S_2		
X_1	10	1	0	1/3	-1/3	10	
X_2	8	0	1	-1/6	2/3	20	
$Z_j = \sum C_j X_j$		10	8	2	2	Z = 260	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	-2	-2		

الحلّ الأمثل $X_1 = 10$, $X_2 = 20$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $Z = 260$

القرار الإداري:

انتاج **10** وحدة من X_1 وانتاج **20** وحدة من X_2 من أجل تحقيق أعلى ربح ممكن مقداره $Z = 260$

تمرين رقم 04

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 5X_2$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 6$$
$$2X_1 + 4X_2 \geq 8$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس

الحلّ:

	C_j →	3	5	0	0	M	***B* rayon**	***R_i***
	↓	***X₁***	***X₂***	***S₁***	***S₂***	**A₁**		
S₁	**0**	1	3	1	0	0	6	6/3 = 2
A₁	***M***	2	4	0	−1	1	8	8/4 = 2
$Z_j = \sum C_j X_j$		2M	4M	0	-M	M	**Z = 8M**	
$Z = C_j - Z_j$		3−2M	5−4M	0	M	0		

	C_j →	3	5	0	0	M	***B* rayon**	***R_i***
	↓	***X₁***	***X₂***	***S₁***	***S₂***	**A₁**		
S₁	**0**	−1/2	0	1	3/4	−3/4	0	
X₂	***5***	1/2	1	0	−1/4	1/4	2	
$Z_j = \sum C_j X_j$		5/2	5	0	-5/4	5/4	**Z = 10**	
$Z = C_j - Z_j$		1/2	0	0	5/4	M−5/4		

الحلّ الأمثل $X_1 = 0$, $X_2 = 2$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $Z = 10$

القرار الإداري:

انتاج وحدتين (2) من X_2 وعدم إنتاج أيّ وحدة من X_1 من أجل تحقيق أقلّ تكلفة ممكنة $Z = 10$

تمرين رقم 05

$$\text{Min } Z = 2X_1 + X_2$$
$$\text{Soumise aux contraintes}$$
$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

المطلوب في المثال التّالي إيجاد الحلّ الأمثل باستخدام طريقة السمبلكس

الحلّ :

		2	1	0	0	M	M	***B***	***Ri***
Cj		***x1***	***x2***	***S1***	***S2***	***A1***	***A2***	***rayon***	
A1	***M***	1	3	-1	0	1	0	30	30/3 = 10
A2	***M***	4	2	0	-1	0	1	40	40/2 = 20
$Z_j = \sum C_j X_j$		5M	5M	-M	-M	M	M	**Z = 70M**	
$Z = C_j - Z_j$		2-5M	1-5M	M	M	0	0		

		2	1	0	0	M	M	***B***	***Ri***
Cj		***x1***	***x2***	***S1***	***S2***	***A1***	***A2***	***rayon***	
X2	***1***	1/3	1	-1/3	0	1/3	0	10	30
A2	***M***	10/3	0	2/3	-1	-2/3	1	20	6
$Z_j = \sum C_j X_j$		1/3+10/3M	1	-1/3+2/3M	-M	1/3-2/3M	M	**Z = 10+20M**	
$Z = C_j - Z_j$		5/3-10/3M	0	1/3-2/3M	M	-1/3+5/3M	0		

		2	1	0	0	M	M	**B**	**R_i**
↓Cj		x_1	x_2	S_1	S_2	A_1	A_2	**rayon**	
X_2	1	0	1	-2/5	1/10	2/5	-1/10	8	
X_1	2	1	0	1/5	-3/10	-1/5	3/10	6	
$Z_j = \sum C_j X_j$		2	1	0	-1/2	0	1/2	**Z = 20**	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	0	1/2	M	M-1/2		

الحلّ الأمثل $X_1 = 6$, $X_2 = 8$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $Z = 20$

القرار الإداري:

انتاج 6 وحدات من X_1 و8 وحدات من X_2 من أجل تحقيق أقلّ تكلفة ممكنة $Z = 20$

الفصل الرّابع:

النّموذج المرافق وتحليل الحساسيّة

الفصل الرّابع: النّموذج المرافق وتحليل الحساسيّة

تمهيد:

تشير هذه النظرية (النّموذج المرافق) إلى أن لكل نموذج من نماذج التعظيم نموذجا مقابلا (ثنائيا) يمثل نموذج تدنية التكاليف، وأن هناك صفة مشتركة ما بين النموذجين تتمثل في أن الحل الأمثل لأحدهما يعطي الحل الأمثل للنموذج الآخر. إنّ كميّة الموارد المتاحة أو معاملات دالّة الهدف غالبا ما تكون مرتبطة بحالة عدم التأكّد لأنّ محيط المؤسّسة يتغيّر دائما الأمر الذّي يفرض على متّخذ القرار دراسة وتحليل هذا المجال، تتمّ معالجة هذا الموضوع باستخدام ما يسمّى تحليل الحساسيّة Sensitivity Analysis

1- تعريف النموذج الثنائي:

إن كلمة ثنائية في البرمجة الخطية مصدرها الرقم اثنان وتعني أن كل مشكلة يمكن صياغتها في قالب رياضي بطريقتين:

الطريقة الأولى :الصيغة الأصلية للنموذج وهي عبارة عن ترجمة مباشرة للهدف إما تعظيم أو تدنية.

الطريقة الثانية :فهي النموذج الثنائي (المرافق، الوجه الآخر) والمقصود به أن المرافق هو الوجه الآخر للصيغة الأصلية، إذْ يمكن القول أنّ مرافق مشكلة التعظيم هو مشكلة التدنية والعكس صحيح.

2- فوائد التحويل من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق:

- الحصول على نموذج يحتوي على عدد أقل من القيود وبذلك سوف يختصر العمل الحسابي لجداول السمبلكس والوصول إلى الحل الأمثل والحصول على نفس الحل المثالي سواء كان الحل للنموذج الأصلي أو الحلّ للنموذج الثنائي.
- إذا كان لأحد متغيرات النموذج الأصلي قيمة سالبة فإنّ حل النموذج هذا غير ممكن بينما في حالة النموذج المقابل يمكن إيجاد حل للمشكلة عند وجود متغيّر ذي قيمة سالبة.
- لغرض التعرف على أبعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية، البديلة) فإذا كان النموذج الأصلي وبصيغة ال Max أي المشكلة بصيغة تعظيم فبالإمكان التعرف على النموذج الثّنائي ويكون بصيغة ال Min وتمثيله لجانب التدنية (في نفس المشكلة) ، ولنفس المشكلة المعبر عنها أوّلا بالصيغة الأصلية.
- تساعد الإدارة على معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار.
- قد يتضمن النموذج الأصلي خاصة في حالة القيود أكبر من يساوي عمليات مع قدة أثناء الحل وذلك لدخول متغيرات اصطناعية، وهذا يمكن تجنبه بالتحويل إلى النموذج المرافق.

3- أهمية النموذج المرافق:

- يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل؛

- يساعد النموذج المقابل إلى إجراء تحليل ما بعد الأمثلية والتوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمشكلة أو إجراء تغيرات في معاملات المتغيّرات الأساسية.
- يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثيرا من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على فهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بالسعر المزدوج (والذّي يعرف أيضا بسعر الظلّ)

4- قواعد الانتقال من النموذج الأصلي إلى النموذج المرافق:

لإيجاد البرنامج الثّنائي لأي برنامج أوّلي في صيغته القانونيّة نتبع الخطوات التالية:

- تقلب صيغة دالّة الهدف، إذا كانت الصّيغة في البرنامج الأوّلي هي: Min فإنّها تتحوّل إلى Max في البرنامج الثّنائي، وإذا كانت الصّيغة في البرنامج الأوّلي هي: Max فإنّها تتحوّل إلى Min في البرنامج الثّنائي.
- تتعاكس المتراجحات، بحيث إذا ≤ (أقلّ أو تساوي) في حالة Max تتحوّل إلى ≥ (أكبر أو تساوي) و ≥ (أكبر أو تساوي) في حالة Min تتحوّل إلى ≤ (أقلّ أو تساوي).
- إذا كانت متغيّرات البرنامج الأوّلي هي: $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots\ldots X_n$ فإنّ متغيّرات النّموذج الثّنائي هي : $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots\ldots\ldots Y_m$ حيث m هي عدد قيود البرنامج الأوّلي.
- عمود الثوابت في البرنامج الأوّلي (كميّة الموارد المتاحة أو الطّرف الأيمن للقيد) يتحوّل إلى معاملات متغيّرات دالّة الهدف في البرنامج الثّنائي.
- معاملات كلّ متغيّرة في قيود البرنامج الأوّلي حسب ترتيب القيود تتحوّل إلى معاملات متغيّرات قيود البرنامج الثّنائي حسب نفس التّرتيب أي تحويل أعمدة النموذج الأصلي إلى صفوف في النموذج الثنائي
- معاملات دالّة الهدف في البرنامج الأوّلي تتحوّل إلى (كميّة الموارد المتاحة أو الطّرف الأيمن للقيد) أي ثوابت قيود البرنامج الثّنائي بنفس التّرتيب
- في كلا البرنامجين تكون المتغيّرات غير سالبة (مادام صيغة البرنامج الأوّلي قانونيّة).

إذا كان البرنامج الأوّلي في شكل الصّيغة القانونيّة التّالية:

$$Max\ Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

S /C

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 \leq b_2$$
$$X_1 \geq 0\ , X_2 \geq 0\ , X_3 \geq 0$$

فإنّ برنامجه الثّنائي هو:

$$Max\ W = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3$$

S /C

$$a_{11}\,X_1 + a_{21}\,Y_2 \;\leq\; C_1$$
$$a_{12}\,Y_1 + a_{22}\,Y_2 \;\leq\; C_2$$
$$a_{13}\,Y_1 + a_{23}\,Y_2 \;\leq\; C_3$$
$$Y_1 \geq 0\,, Y_2 \geq 0$$

النّموذج المرافق	النّموذج الأوّلي
$Min\ W = \sum_{j=1}^{n} b_j\ Y_j$	$Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j\ X_j$
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,Y_j \geq C_j$ i = 1,2.....m j = 1,2.....n	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,X_j \leq b_i$ i = 1,2.....m j = 1,2.....n
$Y_j \geq 0$	$X_j \geq 0$

النّموذج الأصلي	النّموذج المرافق
تعظيم Max Z	تدنية Min W
تدنية Min W	تعظيم Max Z
X	Y
مصفوفة المعاملات	منقول المصفوفة
الطّرف الأيمن للقيود	معاملات دالّة الهدف
معاملات دالّة الهدف	الطّرف الأيمن للقيود
القيود	**المتغيّرات**
القيد (i) من النّوع (=)	المتغيّر المرافق يكون غير محدّد الإشارة
القيد (i) من النّوع (≥)	المتغيّر المرافق يكون من النّوع (≤)
القيد (i) من النّوع (≤)	المتغيّر المرافق يكون من النّوع (≥)

5- القواعد الأساسية لتشكيل النموذج الثنائي:

نسعى من خلال هذه المرحلة إلى التعرف على مجموعة من القواعد والتي تستخدم عادة في تشكيل البرنامج الثنائي للنماذج الأصلية التي لا تكون في صورتها النموذجية (القانونية).

5-1- الحالة الأولى: ظهور القيد *i* بإشارة ≥ في نموذج *Max*:

لتوضيح هذه الحالة، سوف نتناولها في شكل مثال.

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10\ X_1 + 30\ X_2 + 40\ X_3$$

$$\text{Soumise aux contraintes}$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 + 8X_3 \leq 200 \\ 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \geq 400 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه، لذا وجب تحويله إلى متراجحة من الشكل **أقل أو تساوي** بضرب طرفيها في القيمة (-1)، فيصبح:

$$-2X_1 - 4X_2 - 3X_3 \leq -400$$

وعليه يصبح النموذج الثنائي كالتالي:

$$Min\ W = 200\ Y_1 - 400\ \mathbf{Y'_2}$$

$$\text{Soumise aux contraintes}$$

$$\begin{cases} 2Y_1 - 2\mathbf{Y'_2} \geq 10 \\ 2Y_1 - 4\mathbf{Y'_2} \geq 30 \\ 8Y_1 - 3\mathbf{Y'_2} \geq 40 \\ Y_1 \geq 0,\ \mathbf{Y'_2} \geq 0, \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني وبعد تعديله، لم يحافظ على إشارة بعض من معاملات النموذج الأصلي، وللمحافظة على إشارات النموذج الأولي نضع: $Y_2 = -\mathbf{Y'_2}$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج الثنائي كما يلي:

$$Min\ W = 200\ y_1 + 400\ \mathbf{y_2}$$

$$\text{Soumise aux contraintes}$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2\mathbf{Y_2} \geq 10 \\ 3y_1 + 4\mathbf{Y_2} \geq 30 \\ 8y_1 + 3\mathbf{Y_2} \geq 40 \\ Y_1 \geq 0,\ \mathbf{Y_2 \leq 0} \end{cases}$$

وعليه فإن ظهور القيد رقم *i* بإشارة أكبر أو تساوي ≥ في نموذج التعظيم الأولي (*Max*) يؤثر على المتغيرة رقم *i* فتكون أقل أو تساوي الصفر في نموذج التدنية الثنائي ($Y_i \leq 0$).

2-5- الحالة الثانية: ظهور القيد *i* بإشارة = في نموذج *Max*:

سنقوم بتوضيح هذه الحالة، في المثال أدناه.

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 100\ x_1 + 200\ x_2$$
$$Soumise\ aux\ contraintes$$
$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 60 \\ 6X_1 + 8X_2 = 50 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيد الثاني لا يحقق شرط الشكل النموذجي للنموذج أعلاه كونه مكتوبا في صورة معادلة، لذا وجب تحويله إلى متراجحتين إحداهما أقل أو تساوي والأخرى أكبر أو تساوي، فيصبح:

$$6X_1 + 8X_2 \leq 50$$
$$6X_1 + 8X_2 \geq 50$$

وبما أن المتراجحة الثانية تحقق هي الأخرى شرط الشكل النموذجي لنموذج التعظيم فيجب هي الأخرى تعديلها وذلك بضرب طرفيها في (-1) لتصبح من الشكل:

$$-6X_1 - 8X_2 \leq -50$$

وبناء على ذلك يصبح الشكل النموذجي للنموذج الأولي كما يلي:

$$Max\ Z = 100\ X_1 + 200\ X_2$$
$$Soumise\ aux\ contraintes$$
$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \leq 60 \\ 6X_1 + 8X_2 \leq 50 \\ -6X_1 - 8X_2 \leq -50 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

وعليه يمكن استنتاج النموذج الثنائي للنموذج أعلاه، فيكون كما يلي:

$$Min\ W = 60\ Y_1 + 50\ \mathbf{Y'_2} - 50\ \mathbf{Y''_2}$$
$$Soumise\ aux\ contraintes$$
$$\begin{cases} 2Y_1 + 6\ \mathbf{Y'_2} - 6\ \mathbf{Y''_2} \geq 100 \\ 4Y_1 + 8\ \mathbf{Y'_2} - 8\ \mathbf{Y''_2} \geq 2000 \\ Y_1 \geq 0,\ \mathbf{Y'_2} \geq 0,\ \mathbf{Y''_2} \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$Min\ W = 60\ Y_1 + 50(\mathbf{Y'_2} - \mathbf{Y''_2})$$
$$Soumise\ aux\ contraintes$$
$$\begin{cases} 2Y_1 + 6(\mathbf{Y'_2} - \mathbf{Y''_2}) \geq 120 \\ 4Y_1 + 8(\mathbf{Y'_2} - \mathbf{Y''_2}) \geq 240 \\ Y_1 \geq 0,\ \mathbf{Y'_2} \geq 0,\ \mathbf{Y''_2} \geq 0 \end{cases}$$

ما يلاحظ أن النموذج المقابل يحتوي على 3 متغيرات في حين أنه من المفروض وجود متغيرتين فقط باعتبار أن النموذج الأصلي يحتوي على قيدين فقط، لذلك وجب علينا تعديل البرنامج المرافق وذلك بوضع:

$$Y'_2 - Y''_2 = Y_2$$

فيصبح الشكل النهائي للنموذج المرافق كما يلي:

$$Min\ W = 60\ Y_1 + 50\ Y_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2Y_1 + 6Y_2 \geq 120 \\ 4Y_1 + 8Y_2 \geq 240 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \in R \end{cases}$$

ووفقا لذلك قد تكون:

- ❖ $Y_2 > 0$ إذا كانت : $Y'_2 > Y''_2$
- ❖ $Y_2 < 0$ إذا كانت : $Y'_2 < Y''_2$
- ❖ $Y_2 = 0$ إذا كانت : $Y'_2 = Y''_2$

وعليه فإن ظهور القيد رقم *i* بإشارة تساوي (=) في نموذج التعظيم الأولي (*Max*) يؤثر على المتغيرة رقم *i* فتكون غير محددة الإشارة في نموذج التدنية الثنائي *($Y_i \in R$)*.

6 - استنتاج الحلّ الأمثل للبرنامج الأوّلي والحلّ الأمثل للبرنامج الثّنائي

القيمة المطلقة التّي تقابل المتغيّرات Y_i للنموذج الثّنائي في سطر $C_j - F_j$ تمثّل قيمة المتغيّرات المتمّمة S_i للنموذج الاوّلي.

القيمة المطلقة التّي تقابل المتغيّرات المتمّمة S_i للنموذج الثّنائي في سطر $C_j - F_j$ تمثّل قيمة متغيّرات الإنتاج X_i للنموذج الاوّلي.

والعكس صحيح حيث يمكن استنتاج حلول النّموذج الثّنائي من خلال حلول النّموذج الأوّلي.

قيمة دالّة الهدف المثلى F للنّموذج الثّنائي هي نفسها قيمة Z في النّموذج الأوّلي.

مثال توضيحي:

يمثّل الجدول التّالي الحلّ الأمثل للنّموذج الأوّلي:

	$C_j \rightarrow$	4	5	0	0	**B rayon**	**R_i**
	$\downarrow C_j$	X_1	X_2	S_1	S_2		
X_1	4	1	3/2	1/4	0	3	
S_2	0	0	1/2	-1/4	1	5	
$Z_j = \sum C_j X_j$		4	6	1	0	Z = 12	
$Z = C_j - Z_j$		0	-1	-1	0		

الحلّ الأمثل:

$$X_1 = 3 \quad , X_2 = 0 \quad , \quad S_1 = 0 \quad , S_2 = 5 \quad , Z = 12$$

استنتاج الحلّ الأمثل للنّموذج المرافق من خلال الحلّ الأمثل للنّموذج الأوّلي

$$Y_1 = 1 \quad , Y_2 = 0 \quad ,$$

$$S'_1 = 0 \quad , S'_2 = 1 \quad , F = 12$$

	$C_j \rightarrow$	12	8	0	0	**B rayon**	**R_i**
	$\downarrow C_j$	Y_1	Y_2	S'_1	S'_2		
S'_2	0	0	-1/2	-3/2	1	1	
Y_1	12	1	1/4	-1/4	0	1	
F_j		12	3	-3	0	F = 12	
$C_j - F_j$		0	5	3	0		

الحلّ الأمثل:

$$Y_1 = 1 \quad , Y_2 = 0 \quad , \quad S'_1 = 0 \quad , S'_2 = 1 \quad , F = 12$$

استنتاج الحلّ الأمثل للنّموذج المرافق من خلال الحلّ الأمثل للنّموذج الأوّلي

$$X_1 = 3 \quad , X_2 = 0 \quad , \quad S_1 = 0 \quad , S_2 = 5 \quad , Z = 12$$

7- تحليل الحساسيّة:

- يسعى متخذ القرار عادة إلى التوسع في مجال التحليل قصد الحصول على نتائج مختلفة، فينصب اهتمامه على معرفة الحدود التي يمكن فيها إجراء التغيير في قيمة العوامل المكونة للنموذج الرياضي دون تغيير هدفه.
- فمن المعلوم أن الإدارات عموما ترغب دائما في إجراء بعض التغييرات على المعاملات المختلفة لأي مشكلة ما (نموذج البرمجة الخطية)، ويمكن معرفة أثر هذه التغييرات في المعاملات على الحل الأمثل عن طريق حل المسألة مرة أخرى، إلا أن هذا يتطلب إجراء حسابات كثيرة تتناسب طرديا مع عدد القيود والمتغيرات، وتحليل الحساسية هو الاسم المشتق من تحليل تغير الحل الأمثل وفقا لتغير المعاملات المختلفة، سواء كانت هذه المعاملات: مواد أولية، أيدي عاملة، تكاليف، أرباح ... إلخ.
- يقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى تأثر الحل الأمثل بالتغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها. وهذه التغيرات يمكن أن تكون: أوّلا **تأثير التغيّر في معاملات متغيّرات القرار في دالّة الهدف (مدى الأمثليّة)، ثانيا تأثير التغيّر في قيم الطّرف الأيمن لقيود المشكلة (الموارد المتاحة: مدى الامكانيّة)، ثالثا تأثير إضافة متغير قرار جديد ، رابعا تأثير إضافة قيد جديد ، خامسا تأثير التغيّر في احتياجات متغيّرات القرار في القيود**

إنّ التعرّف إلى هذه التّأثيرات سيؤدّي إلى واحد من الحالات التّالية:

- يبقى الحلّ الأمثل للمشكلة كما هو دون أن يتأثّر بالتغيّرات الجديدة.
- تبقى المتغيّرات الأساسيّة كما هي ولكنّ ربّما تتغيّر قيمتها نتيجة التغيّرات الجديدة
- يتغيّر الحلّ الأساسي بأكمله بسبب التغيّرات الجديدة.

تتمّ معالجة هذا الموضوع باستخدام ما يسمّى تحليل الحساسيّة Sensitivity Analysis أو تحليل ما بعد الأمثليّة Post Optimality Analysis ولتوضيح هذه المحاور سيتمّ الاعتماد على طريقة الحلّ المبسّطة.

7-1- تأثير التغيّر في معاملات متغيّرات القرار في دالّة الهدف (مدى الأمثليّة)

يهدف مدى الأمثليّة Range of Optimality إلى تحديد الحدّ الأعلى Upper bound والحدّ الأدنى Lower bound لمعاملات متغيّرات القرار في دالّة الهدف والتّي ضمن حدودها يبقى الحلّ الأمثل ولتحديد مدى الأمثليّة نتبع الخطوات التّالية:

- في جدول الحلّ الأمثل نستبدل معامل التغيّر الذّي نبحث له عن مدى الأمثليّة بمعامل مجهول القيمة ونرمز له بالرّمز **(Cj : j=1, 2, ...m)**
- نعيد حساب صفّ **(Z)** وصفّ **(C –Z)**
- من صفّ **(C –Z)** نختبر أمثليّة الحلّ حيث يجب أن تكون جميع قيم صفّ **(C –Z)** أقلّ من أو تساوي صفر
- **($C - Z \leq 0$)** في حال كانت طبيعة دالّة الهدف تعظيم **(Maximization)** أو تكون جميع قيم صفّ **(C – Z)** أكبر من أو تساوي صفر **($C - Z \geq 0$)** في حال كانت طبيعة دالّة الهدف تقليل **(Minimization)** وهذا

يتطلّب تكوين متراجحة جانبها الأيسر أيّة قيمة في صفّ (**C –Z**) تحتوي على (**Cj**) وجانبها الأيمن صفر وإشارتها حسب طبيعة دالّة الهدف

- يتمّ حلّ المتراجحات التّي تكوّنت في الخطوة السّابقة ومن نتيجة الحلّ نحدّد حدود المعامل (**Cj**)

مثال: تنتج مجموعة الابراهيم لصناعة الحواسيب الشّخصيّة ثلاثة أنواع من الحواسيب هي: **الأستاذ، الصّديق والمدير**. الجدول التّالي يبيّن الرّبح ومتطلّبات إنتاج كلّ حاسوب شخصي.

المتطلّبات	الأستاذ	الصديق	المدير	الكميّة المتوفّرة
الصّناديق	1	1	1	100
الرقائق	3	3	2	240
العمل	5	4	3	360
الرّبح	40	30	25	

إنّ نموذج البرمجة الخطيّة الذّي يمثّل هذه المشكلة هو على النّحو الآتي:

$$\mathbf{Max\ Z = 40X_1 + 30X_2 + 25X_3}$$

S.C

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 100$$

$$3X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 240$$

$$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 360$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

حيث أنّ:

X_1 تمثّل عدد الحواسيب من نوع الأستاذ التّي يجب انتاجها

X_2 تمثّل عدد الحواسيب من نوع الصديق التّي يجب انتاجها

X_3 تمثّل عدد الحواسيب من نوع المدير التّي يجب انتاجها

الجدول التّالي يبيّن الحلّ الأمثل لهذه المشكلة

		40	30	25	0	0	0	**B rayon**	**R_i**
	C_j	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
X_3	25	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70	
S_2	0	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10	
X_1	40	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30	
$Z_j = \sum C_j x_j$		40	32.5	25	2.5	0	7.5	Z = 2950	
$Z = C_j - Z_j$		0	-2.5	0	-2.5	0	-7.5		

أوّلا: مدى الأمثليّة لمعامل X_1

لإيجاد مدى الأمثليّة لمعامل X_1 نتبع الخطوات التالية التي أشرنا إليها على النّحو الآتي:

في جدول الحلّ الأمثل نستبدل معامل المتغيّر X_1 بمعامل مجهول القيمة ونرمز له بالرّمز (Cj)

نعيد حساب صفّ (Z) وصفّ (C –Z) كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

		C_1	30	25	0	0	0	**B rayon**	**R_i**
	C_j	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
X_3	25	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70	
S_2	0	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10	
X_1	C_1	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30	
$Z_j = \sum C_j x_j$		C_1	12.5 $+0.5C_1$	25	62.5 $-1.5C_1$	0	-12.5 $+0.5C_1$	Z = 2950	
$Z = C_j - Z_j$		0	17.5 $-0.5C_1$	0	-62.5 $+1.5C_1$	0	12.5 $-0.5C_1$		

من صفّ (C –Z) نختبر أمثليّة الحلّ ونقوم بتكوين متراجحة جانبها الأيسر أيّة قيمة في صفّ (C –Z) تحتوي على (Cj) وجانبها الأيمن صفر وإشارتها أقلّ من أو تساوي على النّحو الآتي:

$$17.5 - 0.5C_1 \leq 0 \dots\dots\dots\dots (1)$$
$$-62.5 + 1.5C_1 \leq 0 \dots\dots\dots\dots (2)$$
$$12.5 - 0.5C_1 \leq 0 \dots\dots\dots\dots (3)$$

يتمّ حلّ المتراجحات الّتي تكوّنت في الخطوة السّابقة ومن نتيجة الحلّ نحدّد حدود المعامل C_1 على النّحو الآتي:

$17.5 - 0.5C_1 \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$
$C_1 \geq 35$

$-62.5 + 1.5C_1 \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$
$C_1 \leq 41.67$

$12.5 - 0.5C_1 \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$C_1 \geq 25$

بناءا على هذه النّتائج نستطيع تحديد مدى الأمثليّة لمعامل $\mathbf{X_1}$ **على النّحو الآتي:**

$$\mathbf{35 \leq C_1 \leq 41.67}$$

تفسير هذه النّتيجة يبقى الحلّ أمثل ما دامت قيمة معامل $\mathbf{X_1}$ **بين 41.67 و35**

ثانيا: مدى الأمثليّة لمعامل $\mathbf{X_2}$

لإيجاد مدى الأمثليّة لمعامل $\mathbf{X_2}$ نتبع الخطوات التالية التي أشرنا إليها على النّحو الآتي:

في جدول الحلّ الأمثل نستبدل معامل المتغيّر $\mathbf{X_2}$ بمعامل مجهول القيمة ونرمز له بالرّمز **(Cj)**

نعيد حساب صفّ **(Z)** وصفّ **(C –Z)** كما هو مبيّن في الجدول الآتي:

C_j → / ↓		**40**	$\mathbf{C_2}$	25	0	0	0	***B* rayon**	R_i
		X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3		
$\mathbf{X_3}$	**25**	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70	
$\mathbf{S_2}$	***0***	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10	
$\mathbf{X_1}$	**40**	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30	
$\mathbf{Z_j = \sum C_j\, x_j}$		**40**	32.5	25	2.5	0	7.5	Z = 2950	
$\mathbf{Z = C_j - Z_j}$		0	$\mathbf{C_2 - 32.5}$	0	-2.5	0	-7.5		

من صفّ **(C –Z)** نختبر أمثليّة الحلّ ونقوم بتكوين متراجحة جانبها الأيسر أيّة قيمة في صفّ **(C –Z)** تحتوي على **(Cj)** وجانبها الأيمن صفر وإشارتها أقلّ من أو تساوي على النّحو الآتي:

$C_2 - 32.5 \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

يتمّ حلّ المتراجحة التّي تكوّنت في الخطوة السّابقة ومن نتيجة الحلّ نحدّد حدود المعامل C_2 على النّحو الآتي:

$C_2 - 32.5 \leq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$C_2 \leq 32.5$

بناء على هذه النّتيجة نستطيع تحديد مدى الأمثليّة لمعامل X_2 على النّحو الآتي:

$$\text{غير محدّد} \leq \boldsymbol{C_2} \leq \mathbf{32.5}$$

كقاعدة عامّة عندما يكون (X_i: i = 1 ,2 ,..... n) متغيّر غير أساسي عند الحلّ الأمثل (غير داخل في الحل) يتمّ تحديد مدى الأمثليّة لمعامله في دالّة الهدف بموجب القاعدة التّالية :

$$\text{قيمة } \boldsymbol{Z} \text{ المقابلة له} \leq \boldsymbol{C_i} \leq \text{غير محدّد}$$

2-7- التغيّرات في قيم الطّرف الأيمن للقيود Changes in Right Hand Side

سعر الظلّ هو عبارة عن مقدار الزّيادة أو النّقص في قيمة دالّة الهدف Z النّاتج عن زيادة أو نقص الموارد المتاحة أيضا هو عبارة عن الرّبح الإجمالي النّاجم عن إضافة وحدة واحدة جديدة من الموارد النادرة ويمكن التّعبير عن سعر الظلّ بأنّه المبلغ الذّي ترغب المنظّمة في دفعه للحصول على الموارد الإضافيّة حيث أنّها لا يمكن أن تحقّق ربحا أكثر من هذا المبلغ إذا زادت أيّا من الموارد بمقدار وحدة واحدة.

يمكن الحصول على المعلومات المتعلّقة بأسعار الظلّ من قيم صفّ Z المقابلة للمتغيّرات الرّاكدة (الزّائدة أو الفائضة) في جدول الحلّ الأمثل ولتوضيح هذه النّقطة نعود إلى مثال مجموعة الإبراهيم حيث كان جدول الحلّ الأمثل الذّي تمّ التوصّل إليه على النّحو الآتي:

	$C_j \rightarrow$	40	30	25	0	0	0	**B rayon**	**R_i**
		X_1	***X_2***	***X_3***	***S_1***	***S_2***	***S_3***		
X_3	**25**	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	70	
S_2	***0***	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	10	
X_1	***40***	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	30	
$Z_j = \sum C_j x_j$		40	32.5	25	2.5	0	7.5	Z = 2950	
$Z = C_j - Z_j$		0	-2.5	0	-2.5	0	-7.5		

بناءا على قيم صفّ Z المقابلة للمتغيّرات الرّاكدة (الزّائدة) في جدول الحلّ الأمثل فإنّ سعر ظلّ المورد الأوّل هو 2.5 دينار وسعر ظلّ المورد الثاني هو 0 وسعر ظلّ المورد الثّالث هو 7.5 دينار. إنّ هذه النّتائج تعني أنّ زيادة وحدة واحدة من أي مورد ستؤدّي إلى زيادة قيمة دالّة الهدف بمقدار سعر الظلّ. وستؤثّر هذه الزيادة على نتيجة الحلّ الأساسي (عمود الطرف الأيمن) في جدول الحلّ الأمثل، حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديدة باستخدام العلاقة التّالية:

الكميات الجديدة = القيم الأصليّة + ([مقدار التغيّر في كميّة المورد i] * [القيم المقابلة في عمود Si الممثّل للمورد i])

New RHS (quantity) = Original RHS + ($\Delta\, bi * Si\ column$)

New RHS (quantity) : قيم الطرف الأيمن (الكميات) الجديدة.

Original RHS : قيم الطرف الأيمن الأصليّة عند الحلّ الأمثل

$\Delta\, bi$: مقدار التغيّر في الكمية الأصليّة للمورد i

$Si\ column$: قيم عمود المتغيّر الرّاكد i (زائد أو فائض) في جدول الحلّ الأمثل

فعلى سبيل المثال إنّ زيادة الكميّة المتوفّرة من صناديق الحواسيب بوحدة واحدة ستؤدّي إلى زيادة الأرباح بمقدار 2.5 دينار وتصبح قيمة Z 2952.5 دينار وستؤثّر هذه الزّيادة على نتيجة الحلّ الأساسي (عمود الطّرف الأيمن) في جدول الحلّ الأمثل حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديدة باستخدام العلاقة المشار إليها أعلاه وعلى النّحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 2.5 \\ -0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72.5 \\ 9.5 \\ 28.5 \end{pmatrix}$$

وبناءا على القيم الجديدة للطّرف الأيمن يتمّ إعادة احتساب قيمة Z الجديدة وعى النّحو الآتي:

$$Z = (25) \times (72.5) + (0) \times (9.5) + (40) \times (28.5) = 2952.5$$

3-7- إضافة متغيّر جديد Adding a new variable

إنّ إضافة أي متغيّر قرار جديد لمشكلة البرمجة الخطيّة لأي سبب كان تتطلّب إعادة حلّ المشكلة بالكامل أو يتمّ الاعتماد على نتيجة الحلّ الأمثل إن توفّرت ويتمّ احتساب قيم عمود المتغيّر الجديد الذّي تمّت إضافته باستخدام الصّيغة التّالية:

القيم الجديدة لعمود المتغيّر الجديد في جدول الحلّ الأمثل =

مصفوفة المتغيّرات الرّاكدة في الحلّ الأمثل × عمود القيم الأساسيّة للمتغيّر الجديد

نفترض أنّ مجلس إدارة مجموعة الابراهيم قرّر إضافة منتوج جديد باسم الحاسوب السّريع X_4 وبربح مقداره 20 دينار وبمعاملات في القيود الثّلاثة **(1، 2، 4)** على التّوالي فإنّ عمليّة حساب قيم عمود X_4 تتمّ كمايلي:

S_1	S_2	S_3		X_4		New X_4 column
2.5	0	-0.5		1		0.5
-0.5	1	-0.5	×	2		-0.5
-1.5	0	0.5		4		0.5

يصبح الحلّ كمايلي:

	C_j →	40	30	25	20	0	0	0	B rayon	R_i
	↓	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
X_3	25	0	0.5	1	0.5	2.5	0	-0.5	70	
S_2	0	0	0.5	0	-0.5	-0.5	1	-0.5	10	
X_1	40	1	0.5	0	0.5	-1.5	0	0.5	30	
$Z_j = \sum C_j x_j$		40	32.5	25	32.5	2.5	0	7.5	Z = 2950	
$Z = C_j - Z_j$		0	-2.5	0	-12.5	-2.5	0	-7.5		

نلاحظ من جدول الحلّ الأمثل الجديد أنّ جميع قيم صفّ $C - Z$ أقلّ من أو تساوي صفر وهذا يعني أنّ الحلّ أمثل

4-7- تأثير إضافة قيد جديد Impact of adding new constraint

انسجاما مع ما يفرزه الواقع المتغيّر الذّي تعمل فيه منظّمات الأعمال، تجد المنظمة نفسها أمام حالة معيّنة تتطلّب منها إضافة قيد جديد يعبّر عن التغيّر الحاصل وهذا يحتاج إلى إعادة صياغة نموذج البرمجة الخطيّة الخاصّ بأحد المشاكل التّي تبحث لها المنظمة عن حلّ وبالتّأكيد فإنّ إضافة قيد جديد لمشكلة البرمجة الخطيّة سيؤثّر على مزيج الحلّ الأساسي وعلى قيمة دالّة الهدف. لتوضيح ذلك نفترض أنّ مجموعة الابراهيم ولأسباب خاصّة بتطوير المنتجات أدخلت القيد التّالي الذّي يتعلّق باحتياجات الحواسيب من الأقراص الصّلبة Hard Disk

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$$

ترغب المجموعة في معرفة تأثير القيد الجديد على الحلّ الأمثل

لمعرفة تأثير دخول القيد الجديد على الحلّ الأمثل نتّبع الخطوات التّالية:

أ. نحوّل القيد الجديد إلى الصّيغة القياسيّة على النّحو الآتي:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_4 = 300$$

ب. إنّ المتغيّر الرّاكد S_4 يكون عند الحلّ الاوّلي متغيّر أساسي داخل في الحلّ وتكون قيم صفّه المقابلة للمتغيّرات الأخرى هي على النّحو الآتي:

3,2,2,0,0,0,1,300

يبيّن جدول الحلّ الأمثل لمثال مجموعة الابراهيم أنّ المتغيّرين X_1 و X_3 دخلا الحلّ لذلك نطبّق على صفّ المتغيّر الرّاكد S_4 القاعدة المتعلّقة بكيفيّة إيجاد قيم صفّ المتغيّرات الأخرى عند دخول أحدها في الحلّ، فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيّرين X_1 و X_3 على صفّ المتغيّر S_4 **الجديد معتمدين على نتائج الحلّ النّهائي قبل إضافة القيد على النّحو الآتي:**

$3 - [\,(2)(0) + (3)(1)\,] = 0$

$2 - [\,(2)(0.5) + (3)(0.5)\,] = -0.5$

$2 - [\,(2)(1) + (3)(0)\,] = 0$

$0 - [\,(2)(2.5) + (3)(-1.5)\,] = -0.5$

$0 - [\,(2)(0) + (3)(0)\,] = 0$

$0 - [\,(2)(-0.5) + (3)(0.5)\,] = -0.5$

$1 - [\,(2)(0) + (3)(0)\,] = 1$

$300 - [\,(2)(70) + (3)(30)\,] = 70$

يصبح الحلّ كمايلي:

	C_j →	40	30	25	0	0	0	0	**B rayon**	**R_i**
	↓	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4		
X_3	**25**	0	0.5	1	2.5	0	-0.5	0	70	
S_2	***0***	0	0.5	0	-0.5	1	-0.5	0	10	
X_1	***40***	1	0.5	0	-1.5	0	0.5	0	30	
S_4	***0***	0	-0.5	0	-0.5	0	-0.5	1	70	
$Z_j = \sum C_j x_j$		40	32.5	25	2.5	0	7.5	7.5	Z = 2950	
$Z = C_j - Z_j$		0	-2.5	0	-2.5	0	-7.5	-7.5		

نلاحظ من خلال جدول الحلّ الأمثل الجديد أنّ جميع قيم صفّ $\mathbf{C - Z}$ أقلّ من أو تساوي صفر وهذا يعني أنّ الحلّ أمثل

5-7- التغيّر في معاملات (احتياجات) متغيّرات القرار في القيود :

يعكس هذا التغيّر التطوّر في التّكنولوجيا المستخدمة، بحيث يتمّ ادخال تكنولوجيا جديدة أو تحسين مهارات العمّال أو احداث تطوير وتغيير في طرق وأساليب الإنتاج أو في مواصفات المنتج. إنّ مثل هذه التغيّرات تؤثّر دون شكّ في احتياجات المنتجات في مرافق العمل المختلفة، فالتغيّر في احتياجات المنتجات من الموارد المتاحة اللاّزمة للإنتاج يؤدّي إلى تغيّر عوامل متغيّرات القرار في القيود وبالتّالي لا بدّ من التّعرّف على أثر هذا التغيّر في الحلّ الأمثل الذّي تمّ التوصّل إليه بافتراضات معيّنة. ما يجب قوله هو أنّ احداث أيّ تغيير في معاملات متغيّرات القرار في القيود يتطلّب إعادة الحلّ.

تمارين محلولة:

التّمرين الأوّل:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10\ X_1 + 12\ X_2 + 14\ X_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2X_1+3X_2+5X_3 \leq 20 \\ X_1+2X_2+X_3 \leq 25 \\ 7X_1+9X_2+6X_3 \leq 30 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: تحويل نموذج البرمجة الخطيّة الأوّلي إلى النّموذج المرافق (الثّنائي)

التّحويل إلى النّموذج المرافق

$$Min\ W = 20\ Y_1 + 25\ Y_2 + 30\ Y_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2Y_1+Y_2+7Y_3 \geq 10 \\ 3Y_1+2Y_2+9Y_3 \geq 12 \\ 5Y_1+Y_2+6Y_3 \geq 14 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

التّمرين الثّاني:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 5\ X_1 + 4\ X_2$$

$$\begin{cases} \text{Soumise aux contraintes} \\ 2X_1+6X_2 \leq 15 \\ X_1+3X_2 \geq 30 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: تحويل نموذج البرمجة الخطيّة الأوّلي إلى النّموذج المرافق (الثّنائي)

الحلّ:

النّموذج الأوّلي من الشّكل المختلط لذلك يجب تحويل النّموذج الأوّلي إلى الشّكل القانوني

$$\begin{cases} Max\ Z = 5X_1 + 4X_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ 2X_1+6X_2 \leq 15 \\ -X_1-3X_2 \leq -30 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

التّحويل إلى النّموذج المرافق

$$\begin{cases} Max\ Z = 15Y_1 - 30Y_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ 2Y_1 - Y_2 \leq 5 \\ 6Y_1 - 3Y_2 \leq 4 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

التّمرين الثّالث

نفرض أنّه لدينا النّموذج الأوّلي التّالي:

$$\begin{cases} Max\ Z = 3X_1 + 5X_2 \\ \text{Soumise aux contraintes} \\ X_2 \leq 6 \\ 3X_1+2X_2 \leq 18 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد حلّ النموذج الأصلي

2- اشتقّ النموذج المرافق وأوجد الحلّ الأمثل له انطلاقا من الحلّ الأمثل للنّموذج الأصلي

3- تأكّد من الحلّ بحلّ النموذج المرافق باستخدام طريقة **Simplex (Big M)**

الحلّ:

$\downarrow Cj \rightarrow$		3	5	0	0	**B rayon**	**R_i**
		X_1	**X_2**	**S_1**	**S_2**		
S_1	**0**	0	1	1	0	6	6/1 = 6
S_2	**0**	3	2	0	1	18	18/2 = 9
$Z_j = \sum C_j X_j$		0	0	0	0	**Z = 0**	
$Z = C_j - Z_j$		3	5	0	0		

Cj →		3	5	0	0	B rayon	R_i
		X_1	X_2	S_1	S_2		
X_2	5	0	1	1	0	6	-
S_2	0	3	0	-2	1	6	6/3 = 2
$Z_j = \sum C_j X_j$		0	5	5	0	Z = 30	
$Z = C_j - Z_j$		3	0	-5	0		

Cj →		3	5	0	0	B rayon	R_i
		X_1	X_2	S_1	S_2		
X_2	5	0	1	1	0	6	
X_1	3	1	0	-2/3	1/3	2	
$Z_j = \sum C_j X_j$		3	5	3	1	Z = 36	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	-3	-1		

الحلّ الأمثل $X_1 = 2$, $X_2 = 6$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $Z = 36$

القرار الإداري:

انتاج وحدتين (2) من X_1 وانتاج 6 وحدات من X_2 من أجل تحقيق أعلى ربح ممكن مقداره $Z = 36$

2- التّحويل إلى النّموذج المرافق

$$\begin{cases} Min\ W = 6\,Y_1 + 18\,Y_2 \\ Soumise\ aux\ contraintes \\ 3Y_2 \leq 3 \\ Y_1 + 2Y_2 \leq 5 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0 \end{cases}$$

انطلاقا من حلّ النّموذج الأصلي نستنتج أنّ:

$$Y_1 = 3\ ,\ Y_2 = 1\ ,\ W = 36$$

		6	18	0	0	M	M	**B**	
Cj →		Y_1	Y_2	S_1	S_2	A_1	A_2	**rayon**	R_i
A_1	M	0	3	-1	0	1	0	3	3/3 = 1
A_2	M	1	2	0	-1	0	1	5	5/2 = 2.5
$Z_j = \sum C_j X_j$		M	5M	-M	-M	M	M	**W = 8M**	
$Z = C_j - Z_j$		6-M	18-5M	M	M	0	0		

		6	18	0	0	M	M	**B**	
Cj →		Y_1	Y_2	S_1	S_2	A_1	A_2	**rayon**	R_i
Y_2	18	0	1	-1/3	0	1/3	0	1	-
A_2	M	1	0	2/3	-1	-2/3	1	3	3/1 = 3
$Z_j = \sum C_j X_j$		M	18	-6+2/3M	-M	6-2/3M	M	**W = 18+3M**	
$Z = C_j - Z_j$		6-M	0	6-2/3M	M	-6+5/3M	0		

		6	18	0	0	M	M	**B**	
Cj →		Y_1	Y_2	S_1	S_2	A_1	A_2	**rayon**	R_i
Y_2	18	0	1	-1/3	0	1/3	0	1	
Y_1	6	1	0	2/3	-1	-2/3	1	3	
$Z_j = \sum C_j X_j$		6	18	-2	-6	2	6	**W = 36**	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	2	6	M-2	M-6		

الحلّ الأمثل:

$$Y_1 = 3 \ , \ Y_2 = 1 \ , \ W = 36$$

التمرين الرّابع: ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 600X_1 + 800X_2 + 500X_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4X_1+2X_2+4X_3 \leq 500 \\ 2X_1+2X_2+X_3 \leq 400 \\ X_1+3X_2+2X_3 \leq 200 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

أثناء عملية تطبيق طريقة السمبلكس تم التوصل إلى الجدول أدناه:

$C_j \longrightarrow$		600	800	500	00	00	00	$\longrightarrow$
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B
X_1	600	1	0	4/5	3/10	0	-1/5	110
S_2	00	0	0	-7/5	-2/5	1	-2/5	120
X_2	800	0	1	2/5	-1/10	0	2/5	30
Z_j		600	800	800	100	0	200	$Z = 90000$
$Z = C_j - Z_j$		00	00	-300	-100	0	-200	

المطلوب:

هل الحل المتوصل إليه هو حل أمثل؟ ولماذا؟ قدم الحل الأمثل للنموذج أعلاه؛

بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار ΔC_2، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا.

حلّ التّمرين:

الحل المتوصل إليه هو **حل أمثل**، حيث:

$$X_1 = 110,\ X_2 = 30,\ X_3 = 0$$
$$S_1 = 0,\ S_2 = 120,\ S_3 = 0$$

2- بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار ΔC_2 :

$C_j \longrightarrow$		600	$800+\Delta C_2$	500	00	00	00	$\longrightarrow$
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B
X_1	600	01	00	4/5	3/10	00	-1/5	110
S_2	00	00	00	-7/5	-2/5	01	-2/5	120
X_2	$800+\Delta C_2$	00	01	2/5	-1/10	00	2/5	30
Z_j		600	$800+\Delta C_2$	$800+2/5\Delta C_2$	$100-1/10\Delta C_2$	00	$200+2/5\Delta C_2$	$Z = 90000$
$Z = C_j - Z_j$		00	00	$-300-2/5\Delta C_2$	$-100+1/10\Delta C_2$	00	$-200-2/5\Delta C_2$	

تحديد مجال تغير ΔC_2 لكي يبقى الحل أمثلا:

لكي يبقى الحل أمثلا يجب تحقق معيار الأمثلية لنموذج التعظيم: $C_j - Z_j \leq 0$ وعليه:

$-300-2/5\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow -2/5\Delta C_2 \leq 300 \Rightarrow 2/5\Delta C_2 \geq -300 \Rightarrow \Delta C_2 \geq -750$

$-100+1/10\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow 1/10\Delta C_2 \leq 100 \Rightarrow \Delta C_2 \leq 1000$

$-200-2/5\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow -2/5\Delta C_2 \leq 200 \Rightarrow 2/5\Delta C_2 \geq -200 \Rightarrow \Delta C_2 \geq -500$

إذن :

$$\mathbf{-500 \leq \Delta C_2 \leq 1000}$$

الفصل الخامس:

مسائل النّقل

الفصل الخامس: مسائل النّقل

تمهيد:

اتّسع استخدام أسس ومفاهيم البرمجة الخطيّة ليشمل نواحي متعدّدة في سبيل اتخاذ القرارات ومن بين الطّرق التّي تمّ تطويرها بناءا على هذا الأسلوب هما نموذجي النّقل والتخصيص (التّعيين)

1- تعريف نموذج النّقل:

- يعتبر نموذج النّقل أحد النّماذج الشبكية مثله في ذلك مثل نموذج PERT وشبكات المياه وشبكة التّلفونات وشبكات الطرق وغيرها. تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة، حيث أنها تهتم بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت.
- يتعلّق نموذج النّقل بتوزيع السّلع من أماكن توفّرها إلى أماكن طلبها فالمورّد على سبيل المثال يقوم بنقل الموادّ من مخازنه إلى مخازن الموادّ الأوليّة في الشّركة التّي تستخدم تلك الموادّ في الإنتاج وبعد أن تنتهي الشركة من عمليّة تصنيعها، تقوم بتوزيع الموادّ تامّة الصّنع من مخازنها إلى مخازن العملاء من تجّار الجملة وتجّار التّجزئة. يركّز كلّ طرف من تلك الأطراف المكلّفة بنقل البضاعة على إيصالها إلى وجهتها بأقلّ تكلفة ممكنة، لما لذلك من إسهام في تخفيض التّكلفة الكليّة للعمليّات ولما يتحقّق من قدرة تنافسيّة في مجال الأسعار. كما أنّ الشركات والمؤسّسات تحتاج لنموذج نقل عندما تقدم على إنشاء مستودع جديد أو مصنع أو دائرة خدماتيّة، حيث يساعدها نموذج النّقل على اختيار أفضل موقع من بين البدائل المتاحة بحيث تكون تكلفة النّقل الإجماليّة من هذا الموقع إلى مواقع العملاء أقلّ ما يمكن.

2- متطلّبات بناء نموذج البرمجة الخطيّة لمشكلة النّقل :

- وجود مجموعة من مراكز أو مصادر الإنتاج وتمثّل جانب العرض Supply
- وجود مجموعة من مراكز الاستلام أو الاستهلاك وتمثّل جانب الطّلب Demand
- توفّر مجموعة من بدائل النّقل الممكنة لكلّ بديل منها تكلفة معيّنة وقابلية استيعابيّة معيّنة.
- وجود هدف معيّن تسعى المنظّمة أو صانع القرار إلى تحقيقه وغالبا ما يتعلّق الهدف بتخفيض تكاليف النّقل.

3- عرض مسألة النقل:

تعرض مسائل النّقل في حالة التّقليل وهي الحالة الشّائعة بشكل مشابه للافتراض التّالي:

نفترض أنّ مؤسّسة اقتصاديّة لها ثلاثة وحدات انتاجيّة متواجدة في أماكن مختلفة كلّ وحدة تتيح إمكانيّة العرض التّالية:

الوحدة 1 تعرض الكميّة a_1

الوحدة 2 تعرض الكميّة a_2

الوحدة 3 تعرض الكميّة a_3

وهذا من السّلعة التّي تنتجها ويفترض أنّها متشابهة.

تكلّف هذه المؤسّسة من خلال وحداتها الثّلاث بتموين 4 مناطق مختلفة من تلك السّلعة بحيث أنّ كميّات الطّلب لكلّ منطقة هي على الشّكل التّالي:

المنطقة 1 الكميّات التّي تطلبها هي: b_1

المنطقة 2 الكميّات التّي تطلبها هي: b_2

المنطقة 3 الكميّات التّي تطلبها هي: b_3

المنطقة 4 الكميّات التّي تطلبها هي: b_4

تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتوج من وحدة الإنتاج i إلى المنطقة المراد تموينها jمحدّدة محاسبيّا وهي C_{ij} وهي معروضة في الجدول التّالي:

	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
الوحدة 2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}
الوحدة 3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات $\boldsymbol{X_{ij}}$ الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

فإذا كانت الكميّات التّي يمكن أن تموّن بها الوحدة i المنطقة j هي $\boldsymbol{X_{ij}}$ فإنّ الكميّات المحتمل توجيهها من كلّ وحدة إلى كلّ منطقة هي حسب الجدول التّالي:

	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4
الوحدة 1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
الوحدة 2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}
الوحدة 3	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}

هذا الجدول هو جدول مشابه لجدول التّكاليف، غير أنّ الفرق هو أنّ قيم التّكاليف من كلّ وحدة إلى كلّ منطقة معلومة غير أنّ في هذا الجدول الكميّات عبارة عن متغيّرات مجهولة تبحث عنها إشكاليّة المسألة

4- تشكيل جدول مسائل النقل:

إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال أعلاه، يمكن تلخيصه في جدول شامل يسمى **جدول مسألة النقل**، يكون كالتالي:

	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4	a_i
الوحدة 1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	C_{14} X_{14}	a_1
الوحدة 2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	C_{24} X_{24}	a_2
الوحدة 3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	C_{34} X_{34}	a_3
b_i	b_1	b_2	b_3	b_4	المجموع

يلخص جدول مسائل النقل كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل منطقة في أعلى كل خانة، وتظهر متغيرات المسألة وهي القيم X_{ij} المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، وكذا كمية الطلب لكل منطقة. تسمّى الوحدات الإنتاجيّة **بالمنبع**، كما تسمّى المناطق المراد تموينها **بالمصبّ**

5- الصياغة الرياضية لمسائل النقل:

يمكن صياغة مشكل النقل في شكل نموذج رياضي كما يلي:

أ- تحديد متغيرات القرار: تمثل القيم X_{ij} متغيرات القرار في مسائل النقل، وعددها في مثالنا السابق 12 متغيرة قرار، حيث:

X_{11}: تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O_1 إلى مركز التوزيع D_1.

X_{43}: تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O_4 إلى مركز التوزيع D_3.

ب- صياغة دالة الهدف: دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تقليل التكاليف المترتبة عن عملية النقل. وتكون من الشكل التالي:

$$Min\ Z \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} C_{ij}\ X_{ij}$$

$$Min\ Z = C_{11}\ X_{11}+C_{12}\ X_{12}+C_{13}\ X_{13}+C_{14}\ X_{14}+C_{21}\ X_{21}+C_{22}\ X_{22}+C_{23}\ X_{23}+C_{24}\ X_{24} +C_{31}\ X_{31}+C_{32}\ X_{32}+C_{33}\ X_{33}+C_{34}\ X_{34}$$

جـ- صياغة القيود: لدينا نوعين من القيود: قيود العرض وقيود الطلب.

قيود العرض :

$$Min\ Z \sum_{j=1}^{4} X_{ij} = a_i$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = a_1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = a_2$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = a_3$$

قيود الطلب:

$$Min\ Z \sum_{j=1}^{3} X_{ij} = b_i$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = b_1$$
$$X_{12} + X_{22} + X_{23} = b_2$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = b_3$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = b_4$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $X_{ij} \geq 0$

6- حل مسائل النقل

يقصد بحل مسائل النقل إيجاد قيم متغيرات القرار X_{ij} المجهولة، لذلك فإن الأسلوب الرياضي لحل هذه المسائل يمر بمرحلتين أساسيتين هما: **إيجاد الحل الابتدائي الممكن** والتي تتضمن ثلاث طرق وهي: **طريقة الزاوية الشمالية الغربية، طريقة التكاليف الدنيا، طريقة فوجل التقريبية**، ثم تحسين الحل الابتدائي في المرحلة الثانية وتتضمن هذه المرحلة هي الأخرى طريقتين هما: **طريقة المسار المتعرج** وطريقة **عوامل الضرب**.

6-1- المرحلة الأولى: تحديد الحل الابتدائي

6-1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية *(Méthode du coin nord ouest)*: تتميز هذه الطريقة بعدم اعتمادها على المنطق العلمي، كما أنها سهلة التطبيق وبسيطة كما تبدأ عملية إيجاد الحل الأساسي الأولي من الزاوية الشمالية الغربية التي سميت وفقها هذه الطريقة ونلخص مراحل إيجاد الحل الأولي فيما يلي:

- التحقق من توازن جدول النقل
- نأخذ الخلية العليا اليسرى أي الزاوية الشمالية الغربية لجدول النقل ثم نخصص أكبر عدد من الوحدات لتلك الخلية ويكون بهذا العدد المخصص الأقل في صف الكمية المعروضة المتوفرة أو الأقل في عمود متطلبات الطلب

- ننقص كمية العرض في الصف وكمية الطلب في العمود بنفس كمية الوحدات المخصصة للخلية؛
- بعد العمليات السابقة إذا أصبح العرض في الصف مساويا للقيمة صفر نتحرك إلى الأسفل في العمود إلى الخلية التالية، أما إذا أصبح الطلب في العمود مساويا للقيمة صفر فنتحرك إلى اليمين في الصف إلى الخلية التالية، أما إذا أصبح كل من الكميات المعروضة في الصف والكميات المطلوبة في العمود مساوية للصفر فإنو نتحرك إلى الأسفل خلية واحدة ثم إلى اليمين خلية أخرى
- نخصص للخلية الموالية المحددة في المرحلة الثّالثة أكبر عدد ممكن من الوحدات ثم نعود حتى نصل إلى حل أولي مقبول.

6-1-2- طريقة التكاليف الدنيا *(Méthode du moindre coût)*:

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي $(m+n-1)$.

تعتبر هذه الطريقة أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية بحيث يتم توزيع الكميات المعروضة حسب أقل تكلفة نقل في الجدول أي يتم تحديد أصغر تكلفة نقل ونخصص كمية لهذه الخلية المقابلة لأقل تكلفة وفق الكميات المعروضة في الصف والكميات المطلوبة في العمود بحيث الصف والعمود هما اللذان يحدّدان موقع الخلية .بعد ذلك نحدد أصغر تكلفة نقل أخرى ونخصص كمية لهذه الخلية وهكذا نستمر إلى أن يتم توزيع كافة الوحدات المعروضة .كل المراحل السابقة تكون بعد التحقق من توازن جدول النقل.

6-1-3- طريقة فوجل *(Méthode de Vogel)*:

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، ونادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين. وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود
- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)
- اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود
- في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل
- نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف وذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، وتكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.

مثال: لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية O_1، O_2، O_3 متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 3 مراكز توزيع D_1، D_2، D_3، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع. نلخص تكاليف نقل الوحدة الواحدة والكميات المعروضة والكميات المطلوبة في الجدول التالي:

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	14	12	10	1400
O_2	15	17	13	1500
O_3	11	13	12	1550
b_i	1200	1600	1650	4450

المطلوب :أوجد الحل الأولي لمشكلة النقل بطريقة:

-الزاوية الشمالية الغربية.

-أقل تكلفة في الجدول.

-طريقة فوجل.

الزاوية الشمالية الغربية.

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	14 **1200**	12 **200**	10	1400 200 0
O_2	15	17 **1400**	13 **100**	1500 100 0
O_3	11	13	12 **1550**	1550 0
b_i	1200 0	1600 1400 0	1650 1550 0	4450

وبذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، والذي نجد فيه:

$X_{11}=1200$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 1200 وحدة بتكلفة تقدر بـ 14

$X_{12}=200$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_2 بمقدار 200 وحدة بتكلفة تقدر بـ 12

$X_{22}=1400$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 1400 وحدات بتكلفة تقدر بـ 17

$X_{23}=100$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_3 بمقدار 100 وحدة بتكلفة تقدر بـ 13

$X_{33}=1550$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_3 بمقدار 1550 وحدات بتكلفة تقدر بـ 12

يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج والتوزيع، أي:

$$Z = (1200 \times 14) + (200 \times 12) + (1400 \times 17) + (100 \times 13) + (1550 \times 12) = \mathbf{62900}$$

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) **1 –**

أقل تكلفة في الجدول.

	D_1	D_2	D_3	a_i
O_1	*14*	12	*10* **1400**	1400 0
O_2	*15*	*17* **1500**	*13*	1500 0
O_3	11 **1200**	*13* **100**	*12* **250**	1550 350 100 0
b_i	1200 0	1600 1500 0	1650 250 0	4450

وبذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، والذي نجد فيه:

$X_{13}=1400$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 1400 وحدة بتكلفة تقدر بـ 10

$X_{22}=1500$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 1500 وحدة بتكلفة تقدر بـ 17

$X_{31}=1200$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_1 بمقدار 1200 وحدات بتكلفة تقدر بـ 11

$X_{32}=100$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_2 بمقدار 100 وحدة بتكلفة تقدر بـ 13

$X_{33}=250$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_3 بمقدار 250 وحدات بتكلفة تقدر بـ 12

يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج والتوزيع، أي:

$$Z = (1400\times10) + (1500\times17) + (1200\times11) + (100\times13) + (250\times12) = \mathbf{57000}$$

عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) **1 –**

طريقة فوجل

O_1	*14*	12 **1250**	*10* **150**	1400 1250 0
O_2	*15*	*17*	*13* **1500**	1500 0
O_3	11 **1200**	*13* **350**	*12*	1550
b_i	1200 0	1600 350 0	1650 150 0	4450

يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج والتوزيع، أي:

$$Z = (1250 \times 12) + (150 \times 10) + (1500 \times 13) + (1200 \times 11) + (350 \times 13) = \mathbf{53750}$$

2-6- المرحلة الثانية: تحسين الحل الابتدائي

بعد الحصول على الحلّ الأوّلي من إحدى الطرق السّابقة يجب التحقّق من مدى أمثليّة الحلّ الأوّلي الذّي تمّ التوصّل إليه وذلك باختبار الحلّ الأوّلي بإحدى الطريقتين: **طريقة المسار المتعرج The Taiping Stone Method وطريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method**

6-2-1- طريقة المسار المتعرج The Stepping Stone Method

مبدأ هذه الطّريقة ينطلق من عمل تقييم لجميع الخلايا التّي لم تستخدم في الحلّ الأوّلي في نموذج النّقل واختبار فعاليّة استخدام هذه الخلايا في الحلّ وذلك عن طريق عمل مسار مغلق لكلّ خليّة غير مستخدمة في الحلّ الأوّلي وإذا كان استخدامها يحسن الحلّ بتقليل تكاليف النقل، يتمّ تعديل جدول النقل باستخدام هذه الخليّة:

يجب التحقّق من أنّ **عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصّفوف + عدد الأعمدة - 1**

يقصد بالمسار المغلق: عمل مسار يبدأ بالخليّة غير المستخدمة في الحلّ الأوّلي والانتهاء بها.

6-2-1-1- خطوات عمل المسار المغلق وطريقة المسار المتعرج:

1- أن يبدأ المسار المغلق بالخلية غير المستخدمة وينتهي بها.

2- أن يسير المسار المغلق بين الخلايا باتّجاه:

أ - أفقي ثمّ رأسي ثمّ أفقي ثمّ رأسي ثمّ أفقي ثمّ .....وهكذا

ب- رأسي ثمّ أفقي ثمّ رأسي ثمّ أفقي ثمّ رأسي ثمّ .....وهكذا

3- أن تكون نقطة التحوّل من المسار الرّأسي إلى الأفقي أو العكس خلية مستخدمة.

4- تكتب الخلايا التّي سيمر بها المسار المغلق وتكتب تحتها تكلفة النّقل لكلّ خليّة وذلك بوضع إشارة (+) لنقطة البداية (تكلفة الخلية الأولى في المسار) ثمّ إشارة (-) للتّي تليها ثمّ (+) ثمّ (-) .....وهكذا

5- نجمع التكاليف بعد وضع الإشارات:

أ- **إذا كان النّاتج موجبا:** أي أنّ فتح هذا المسار غير مجدي وسيزيد من التّكاليف.

ب- **إذا كان النّاتج سالبا:** أي أنّ فتح هذا المسار مجدي وسيخفّض أو يقلّل من التّكاليف.

6- يتمّ اختيار أكبر قيمة مطلقة للأعداد السّالبة لأنّها الأكثر جدوى.

7- نعدّل عمليّات النقل باستخدام الخليّة ذات أكبر قيمة مطلقة للأعداد السّالبة وذلك باختيار أقلّ كميّة نقل موجودة في الخلايا السّالبة في المسار المغلق وذلك بإضافة كميّة النّقل هذه إلى أوّل خليّة في المسار المغلق ثمّ طرحها من الكميّة الموجودة في الخليّة التّي تليها في المسار المغلق ثمّ إضافتها للتي تليها.....وهكذا.

8- نكرّر الخطوات السّابقة لجدول النّقل الجديد ولا نتوقّف حتّى يصبح أثر استخدام (إشغال) الخلايا الغير مستخدمة جميعه إمّا صفرا أو عددا موجبا. فنكون قد وصلنا إلى الحلّ الأمثل الذّي يحقّق أقلّ تكلفة ممكنة لمشكلة النّقل.

6-2-2- طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method

تستخدم هذه الطّريقة أيضا لاختبار أمثليّة الحلّ الأوّلي وتعطي نتيجة مطابقة لطريقة المسار المتعرج السّابقة

6-2-2-1- خطوات طريقة التوزيع المعدلة:

1- التحقّق من أنّ **عدد الخلايا المستخدمة = عدد الصّفوف + عدد الأعمدة - 1**

2- تكوين معادلة لكلّ خليّة مستخدمة حسب المعادلة: $U_i + V_j = C_{ij}$

حيث U_i: الصفّ الذّي تقع به الخليّة

V_j : العمود الذّي تقع به الخليّة

C_{ij} : كلفة النّقل للخليّة المستخدمة (الموجودة في المربّعات الصّغيرة)

3- حلّ المعادلات بطريقة التّعويض بحيث نفرض أحد المجاهيل يساوي صفر ويفضّل المجهول الأكثر استخداما في المعادلات.

4- اختبار جدوى استخدام الخلايا الغير مستخدمة في جدول النّقل باستخدام المعادلة الآتية : $e_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$

5- إيجاد المسار المغلق للخليّة التّي استخدامها هو الأكثر جدوى (أقلّ عدد سالب ل e_{ij})

6- تعديل جدول النّقل كما تمّ تعلّمه سابقا في طريقة المسار المتعرج

7- إعادة الخطوات السّابقة حتّى نصل إلى أنّ جميع قيم (e_{ij}) إمّا موجبة أو صفر.

8- تحسب قيمة تكلفة النّقل لآخر جدول نقل معدّل.

الفصل السّادس:

البرمجة غير الخطيّة

الفصل السّادس: البرمجة غير الخطيّة

تمهيد:

جميع البرامج التّي تمّ تناولها هي من النّوع الخطّي بمعنى أنّ المتغيّرات أسّها مرفوع إلى الدّرجة واحد إلاّ أنّ الواقع الاقتصادي يشير إلى أنّ العديد من العلاقات الاقتصاديّة تتمثّل في معادلات غير خطيّة وبالتّالي تتطلب معالجات خاصّة.

1- مفهوم البرنامج غير الخطّي

يتمّ اعتبار البرنامج بانّه برنامج غير خطّي إذا تمّ صياغة علاقة أو أكثر من علاقة في صورة غير خطيّة وبمعنى آخر فإنّه في العلاقات غير الخطيّة تحمل جميع أو بعض متغيّرات العلاقة الاقتصاديّة أسّا أعلى من الدّرجة الأولى. والعلاقات غير الخطيّة لا تشكّل خطّا مستقيما.

البرمجة غير الخطيّة هي عمليّة حلّ مشاكل الأمثليّة التّي تتعلّق ببعض القيود غير الخطيّة أو دالّة الهدف غير خطيّة. تتميّز مسائل البرمجة غير الخطيّة بوجود مجموعة من المصطلحات التّي تستدعي ضمنيّا استخدام توابع لا خطيّة مثل: **اللوغاريتم، الأسيّة، دالّة جب أو تجب .....إلخ.** كما تهدف إلى تدنية أو تعظيم دالة الهدف غير الخطيّة التّي تخضع لقيود منظمة، قيود خطيّة أو غير خطيّة. يمكن أن تكون هذه القيود متراجحات أو معادلات (مساواة). بالإضافة إلى ذلك تساعد البرمجة غير الخطيّة في تحليل واختيار الصياغات المناسبة مع تحديد الصياغة المثلى وحسابات المسارات المثلى وتحسين أداء المحفظة.

تتنوّع صيغ الدوال غير الخطيّة ونذكر منها:

الدالّة التّربيعيّة Quadratic Function: يعبّر عنها بالصّيغة التّالية: $F(x) = aX^2 + bX + c$

الدّالة التكعيبيّة Cubic Function: يعبّر عنها بالصّيغة التّالية: $F(x) = aX^3 + bX^2 + cX + d$

الدالّة اللوغاريتميّة Logarithmic Function: يعبّر عنها بالصّيغة التّالية: $F(x) = log_b x$

الدالّة الأسية Exponential Function: يعبّر عنها بالصّيغة التّالية: $F(x) = b^x$

تنقسم البرامج غير الخطيّة إلى ثلاثة أنواع أساسيّة: **البرامج غير المقيّدة (Unconstrained NLP)** وهي البرامج التّي تتبدل فيها المتغيّرات في دالّة الهدف دون أيّ شروط أو محدّدات، البرامج المقيّدة **(Constrained NLP)** وهي البرامج التّي تتضمّن محدّدات على التّغيّرات التّي تحدث في المتغيرات الواردة فيها، إضافة إلى البرامج التّربيعيّة **(Quadratic Programming)** وهي البرامج التي تكون فيها دالّة الهدف من الدرجة الثّانية ومثقلة بمحدّدات متباينة خطيّة.

2- طرق حلّ نماذج البرمجة غير الخطيّة:

إنّ دراسة أساليب الحلّ المختلفة لمسائل البرمجة غير الخطيّة أدّت إلى إيجاد صياغة خاصّة تستخدم لإيجاد هذه الحلول. عند حلّ مسائل البرمجة غير الخطيّة قد يبدو الحلّ غير ممكن لوجود عدد لا نهائي من الحلول وإمكانيّات الحصول على

حلول مثلى متعدّدة، لكن بدراسة خصائص التحدب والتقعر يصبح البحث عن الحلّ الأمثل ممكن. عند البحث عن حلّ لمسائل البرمجة غير الخطيّة يجب اختيار الحالات التّالية:

جميع النقاط التّي تكون عندها المشتقّات المستمرّة من الدّرجة الأولى تساوي الصّفر.

جميع النّقاط داخل المنطقة التّي تكون عندها المشتقّات من الدّجة الأولى غير مستمرّة.

النّقاط واقعة على حدود مجال الحلّ.

3- تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحلّ الأمثل:

3-1- حدّ أعظم أو حدّ أدنى غير مقيّد:

في حالة نموذج البرمجة غير الخطيّة يتكوّن من دالة هدف فقط **F (x)** وكانت الدالة محدبة أو مقعرة فإنّه يوجد حلّ أمثل وحيد عند نقطة تقع إمّا داخل منطقة الحلول أين تنعدم جميع المشتقّات أو عند نقطة حديّة.

3-2- قيمة عظمى – مقيّد:

في حالة نموذج البرمجة غير الخطيّة يتكوّن من دالة هدف وقيود فإنّ احتمال الحلّ الأمثل الوحيد يعتمد على طبيعة دالّة الهدف ومجموعة القيود، فإذا كانت دالّة الهدف مقعرة وكانت مجموعة القيود تشكّل منطقة محدبة عندها يوجد حلّ أعظم وحيد للمسألة

3-3- قيمة دنيا – مقيّد:

في حالة نموذج البرمجة غير الخطيّة يتكوّن من دالة هدف وقيود وكانت دالّة الهدف محدّبة ومجموعة القيود تشكّل منطقة محدبة فإنّ أي نقطة مستقرة ستكون حلاّ أدنى.

3-4- الدالّة الخطيّة:

في حالة الدالّة الخطيّة محدّبة ومقعّرة وكانت منطقة الحلّ محدّبة يمكن إيجاد الحلّ عند الحدود.

4- طرق الحلّ:

يوجد طرق كثيرة لحلّ البرامج غير الخطيّة تعتمد على نوع البرنامج غير الخطّي المراد حلّه ومنها :

- **طريقة الحلّ المباشر:** تقوم على إيجاد جميع الحلول المحتملة (النقاط السّاكنة) ومن ثمّ اختيار الأمثل منها. تشترط أن تكون الدالّة متّصلة وقابلة للاشتقاق .

- **طريقة الإلغاء Elimination:** تقوم على تجزئة منطقة الحلّ ثمّ إبقاء جزء واحد الذّي يحتوي على الحلّ الأمثل وحذف البقيّة. يمكن استخدامها للدوال غير المتصلة والدوال غير القابلة للاشتقاق.

- **طريقة التنصيف Bisection**

- **طريقة المقطع الذّهبي Golden Section،**

- **طريقة فيبوناتشي Fibonacci**

- **طريقة البحث ثنائي التفرّع Dichotomous Search**

- **طريقة الاستنباط Interpolation (الاستقراء أو الاستكمال):** هي طريقة أو عمليّة رياضيّة لإنشاء نقاط بيانات جديدة اعتمادا على مجموعة من النقاط المنفصلة والمعلومة مسبقا.

- **طريقة نيوتن – رافسون Newton - Raphson**

- **طريقة شبه – نيوتن Quasi - Newton**

- **طريقة قاطع القوس Secant**

- **طريقة الانحدار الحادّ Steepest descent**

- **طريقة الاستنباط التربيعي Quadratic Interpolati**

الخاتمة العامّة

الخاتمة العامّة

خاتمة عامّة:

بعد عرضنا لمختلف فصول مقياس رياضيات المؤسّسة اتّضح لنا بأنّ نماذج البرمجة الخطيّة هي من بين أهمّ النّماذج الرّياضيّة وأكثرها استخداما وشيوعا في بحوث العمليّات وهذا لسهولة استخدامها وبساطة عرض نتائجها وقدرتها على حلّ العديد من المشاكل الاداريّة التّي تواجه معظم المؤسّسات وبالتّالي يمكن القول بأنّ البرمجة الخطية هي عبارة عن أداة أو وسيلة رياضية تساهم في عملية اتخاد القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المتاحة (البشرية و المادية) بين الاستخدامات المختلفة بغية تحقيق هدف محدّد (أقصى عائد أو أدنى تكلفة) ضمن مجموعة من القيود أو المحدّدات . كما تأكّدت لنا الأهمية البالغة لهذه الطّرق والأساليب في حلّ النّماذج الرّياضيّة التّي تعجز الطّرق التّقليديّة عن حلّها.

كما تبيّن لنا أنّ نموذج النّقل باعتباره أسلوب من أساليب رياضيات المؤسّسة هو أحد النّماذج الرّياضيّة التّي تساعد في اتّخاذ القرار المناسب لتوزيع (نقل أو شحن) سلعة أو مادّة ما من مناطق إنتاجها أو عرضها أو تخزينها إلى مراكز الطّلب أو الاستهلاك لسدّ حاجيات هذه المواقع وبأقلّ تكلفة ممكنة كما يعتبر هذا النّموذج (نموذج النّقل) من بين أهمّ الطّرق التّي يعتمد عليها بشكل كبير في حلّ الكثير من المشاكل الاقتصادية في الفترة الأخيرة وذلك لسهولة استخدامه في تنظيم الإنتاج بشكل مثالي.

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

1. إبراهيم نائب، أنعام باقية، بحوث العمليّات خوارزميات وبرامج حاسوبية، دار وائل للنّشر، عمان، الأردن، 1999
2. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، بحوث العمليات والأساليب الكميّة نظرية وتطبيق، الطبعة الأولى، دار جليس الزمان، عمان، الأردن، 2014
3. رفافة عبد العزيز، مطبوعة بعنوان :محاضرات وتمارين محلولة في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة أحمد زبانة، غليزان، الجزائر ،2021 - 2022
4. ريغي هشام، مطبوعة بعنوان :محاضرات وتطبيقات في مادّة رياضيات المؤسسة، المركز الجامعي عبد الحفيظ بوصوف، ميلة، الجزائر، 2020 - 2021
5. زدون جمال، مطبوعة بعنوان :رياضيات المؤسسة، المركز الجامعي بلحاج بوشعيب، عين تموشنت، الجزائر، 2018 - 2019
6. سالم إلياس مطبوعة بعنوان :محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، جامعة محمد بوضياف، المسيلة، الجزائر 2016. - 2017.
7. سهيلة عبد الله سعيد، الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007.
8. صوار يوسف، طاوش قندوسي، محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B- كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، دون سنة نشر،
9. عفاف علي حسن الدش، بحوث العمليّات واتّخاذ القرارات، مكتبة عين شمس، القاهرة، مصر، 2012
10. علي حازم الياسمور، استخدام نموذج البرمجة الخطية في تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل الذي يعظم الأرباح في ظل تطبيق نظرية القيود، ورقة بحثية مقدمة للمؤتمر العلمي الثاني للرياضيات، الإحصاء والمعلوماتية، 6-7 ديسمبر 2009، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل، العراق
11. عيد أحمد أبوبكر، وليد إسماعيل السيفو، مبادئ التحليل الكمي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009

12. فتيحة بلجيلالي، مطبوعة بعنوان: رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، جامعة تيارت، الجزائر،2018

13. محمد خليل بوحلايس، مطبوعة بعنوان: رياضيات المؤسسة، جامعة عبد الحميد مهري، قسنطينة، الجزائر، 2018 2019-

14. محمّد راتول، بحوث العمليات، الطبعة الثّانية، ديوان المطبوعات الجامعيّة، الجزائر، 2006

15. محمد عبد العال النعيمي وآخرون، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، دار وائل للنشر عمان، الأردن، 2011.

16. محمود الفياض، عيسى قدادة، بحوث العمليّات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007

17. مراد كمال عوض، الأساليب الكمية في اتّخاذ القرارات الإداريّة: بحوث العمليّات، دار البداية ناشرون وموزّعون، عمان، الأردن، 2010

18. مكّيد علي، بحوث العمليّات وتطبيقاتها الاقتصاديّة: الجزء الأوّل البرمجة الخطيّة دروس ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعيّة، الجزائر، 2015.

19. https://fr.wikipedia.org/

20. **https://mashmediaco.com**