الجمهـورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أبي بكر بلقايد-تلمسان-

كلية العلوم الإقتصادية، التجارية و علوم التسيير

مواضيع إمتحانات في الإحصاء 1

- مع الحل التفصيلي-

هذه المطبوعة البيداغوجية:

- موجهة لفائدة طلبة السنة الأولى جذع مشترك ميدان العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير؛
- تغطي البرنامج الرسمي المعتمد من طرف اللجنة البيداغوجية الوطنية لميدان التكوين في مادة الإحصاء 1.

إعداد الدكتور:
جمعـــــة زكرياء

-2018-

المحتويات:

مقدّمة:

الحمد لله رب العالمين و الصلاة و السلام على خاتم النبيين و على آله وصحبه أجمعين، و بعد:

يُسعدني أن أضع بين يدي إخواني الطلبة هذه المطبوعة التي تتضمن مجموعة من مواضيع إمتحانات في مادة الإحصاء 1، مع الحل التفصيلي لها ، و هي موجهة أساساً لطلبة السنة الأولى جذع مشترك ميدان العلوم الإقتصادية، التجارية و علوم التسيير؛ كما يُمكن أن تكون معيناً لكل مهتم بمبادئ الإحصاء. هذا و قد قمت بجمع هذه المواضيع على مدار السنوات السابقة من أجل وضعها و إفرادها في مطبوع شامل يُمكن طلبتنا الأعزاء من المراجعة و التحضير للإمتحانات الخاصة بهذه المادة.

في الأخير نرجو من الله العلي القدير أن يجعل عملنا هذا خالصاً لوجهه الكريم و أن يجعله سنداً للطلبة الكرماء في مسارهم الدراسي.

د. جمعـــــة زكرياء.

الموضوع الأول

التمرين الأوّل:

أوجد مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي؛ الوسيط و المنوال) للسلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

1) 80 ; 80 ; 100 ; 120 ; 150 ; 200 ; 250.

2) 18 ; 15 ; 12 ; 11 ; 9 ; 7 ; 5 ; 4.

التمرين الثاني:

الجدول التالي هو لعينة من ستين (60) طالباً في إحدى الكليات بجامعة معينة موزَّعين حسب أوزانهم:

التكرار (عدد الطلبة)	فئات الأوزان (بالكيلوغرام)
5	[60-62[
8	[62-64[
25	[64-66[
14	[66-68[
8	[68-70[
60	المجموع

1- مثّل هذه البيانات في مدرج تكراري و ارسم على نفس المعلم المضلع و المنحنى التكراريين.

2- أوجد الوسط الحسابي لأوزان هؤلاء الطلبة.

3- ماهو الوزن الوسيط؟

4- حدِّد قيمة المنوال.

5- باستعمال مقاييس الإلتواء المطلق، إستنتج شكل التوزيع (نوع إلتواء المنحنى).

حل الموضوع الأول

التمرين الأوّل:

السلسلة الإحصائية الأولى:

.250 ; 200 ; 150 ; 120 ; 100 ; 80 ; 80

- الوسط الحسابي:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{7}\chi_i}{n}=\frac{80+80+100+120+150+200+250}{7}=\frac{980}{7}=140$$

- الوسيط: عدد المشاهدات هو عدد فردي n=7 ؛ إذن الوسيط يأخذ قيمة المشاهدة ذات الرتبة $\frac{n+1}{2}\rightarrow\frac{7+1}{2}\rightarrow 4$ و منه قيمة الوسيط هي $M_e=120$.

- المنوال: هو القيمة الأكثر مشاهدة في السلسلة (الأكثر تكراراً)؛ إذن $M_o=80$.

السلسلة الإحصائية الثانية:

.4 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 ; 18

- الوسط الحسابي:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{8}\chi_i}{n}=\frac{4+5+7+9+11+12+15+18}{8}=\frac{81}{8}=10{,}125$$

- الوسيط: عدد المشاهدات هو عدد زوجي n=8 ؛ إذن الوسيط هو عبارة عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدتين ذوات الرتبتين $[\frac{n}{2} et \frac{n}{2}+1]$ على التوالي ؛ و منه قيمة الوسيط هي $Me=\frac{9+11}{2}=\frac{20}{2}=10$.

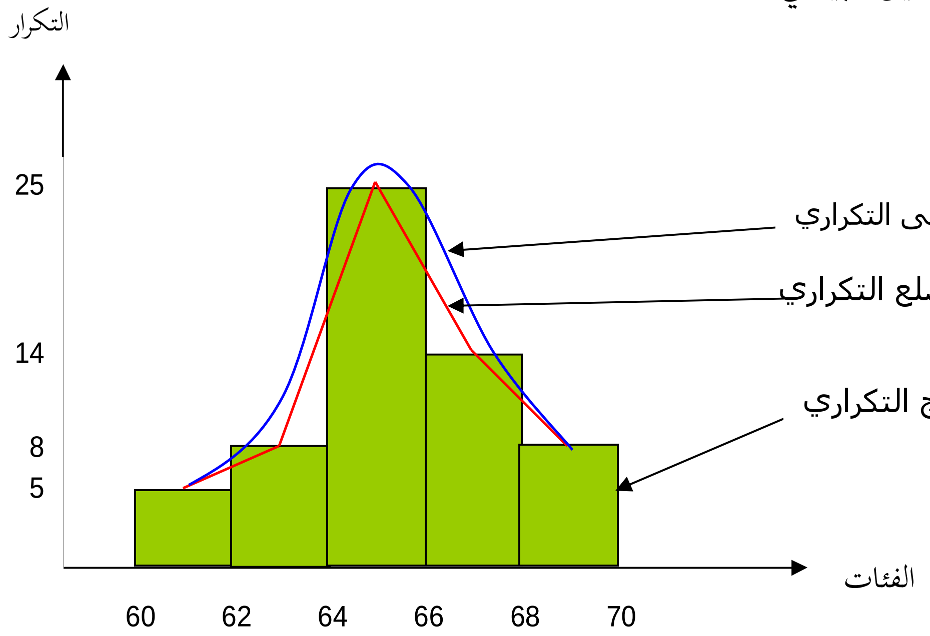
المنوال: ليس هناك قيمة شائعة في هذه السلسلة الإحصائية وبالتالي هي عديمة المنوال.

التمرين الثاني:

جدول(1): التوزيع التكراري للطلبة حسب الوزن

فئات الأوزان (بالكيلوغرام)	التكرار n_i (عدد الطلبة)	مراكز الفئات x_i	$n_i x_i$	التكرار المتجمع الصاعد
[60-62[	5	61	305	5
[62-64[	8	63	504	13
[64-66[	25	65	1625	38
[66-68[	14	67	938	52
[68-70[	8	69	552	60
المجموع	60	-	3924	-

1- التمثيل البياني:



الشكل'1': المدرج، المضلع و المنحنى للتوزيع التكراري للطلبة

2- الوسط الحسابي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \chi_i}{\sum_{i}^{n} n_i} = \frac{3924}{60} = 65,4$$

3- الوزن الوسيط:

رتبة الوسيط هي $\frac{n}{2} \rightarrow \frac{60}{2} \rightarrow 30$ ؛

إذن الفئة الوسيطية هي :]64-66] ومنه:

$$Me = 64 + \left(\frac{30-13}{25}\right) \times 2 = 65,36$$

حيث:

64 : الحد الأدنى للفئة الوسيطية؛

30: رتبة الوسيط؛

13: التكرار المتجمع الصاعد حتى الفئة التي قبل الفئة الوسيطية؛

25: تكرار الفئة الوسيطية؛

2: طول الفئة الوسيطية.

4- المنوال:

الفئة المنوالية هي:]64-66] و هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار. إذن:

$$Mo = 64 + \left(\frac{17}{17+11}\right) 2 = 65,21$$

حيث:

64 : الحد الأدنى للفئة المنوالية؛

17 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة السابقة لها؛

11 : الفرق بين تكرار الفئة المنوالية و تكرار الفئة اللاحقة لها؛

2 : طول الفئة المنوالية.

5- إستنتاج شكل التوزيع:

لدينا : $65,4 < 65,36 < 65,21 \Leftrightarrow \bar{X} < Me < Mo$

ومنه التوزيع ملتوي نوعاً ما إلى اليمين (إلتواء موجب).

الموضوع الثاني

التمرين 01:

لتكن a قيمة ثابتة ، أحسب التباين $V(ax)$.

التمرين 02:

إن المتوسط العام لأجور العمال هو 7000 دج في العام، أما متوسط أجور العمال الذكور 8000 دج و متوسط أجور العمال الإناث هو 6500 دج؛ ماهي نسبة العمال الذكور و ماهي نسبة العمال الإناث؟

التمرين 03:

لتكن ni عدد العائلات التي تملك سكناً ثانوياً تم إستبيانها من طرف معهد متخصص في سبر الآراء، و ليكن xi المبلغ السنوي (بألف دج) الذي تم إنفاقه في صيانة هذه السكنات (بعض المعطيات غير واردة)

مبلغ الصيانة(10^3دج)	4-0	8-4	12-8	E-12	22-E	30-22	42-30	المجموع
ni	6	n_2	n_3	17	14	11	3	100

1- علماً أن العُشير الرابع يساوي 9.5 أحسب n2 و n3؛
2- أحسب E علماً أن $\bar{x} = 13$؛
3- أرسم المدرج التكراري؛
4- أحسب الرُبيع الثالث و المنوال؛
5- ماهي جهة إلتواء المنحنى البياني؟ علّل ذلك.

التمرين 04:

البيانات التالية تمثل الرواتب في 1979 و 1983:

1- أحسب الرواتب الوسيطية لسنة 1979 و لسنة 1983؛
2- أحسب المدى العُشيري لسنة 1979 و لسنة 1983.
(معطيات سنوية بـ دج)

	1979	1983
العُشير1	24920	40490
العُشير2	29290	47410
العُشير3	32620	53220
العُشير4	36150	58630
العُشير5	39560	64370
العُشير6	44100	71520
العُشير7	49770	80660
العُشير8	58270	94120
العُشير9	75740	122900

حل الموضوع الثاني

التمرين الأول:

لنفرض السلسلة الإحصائية y_i حيث: $\forall i = 1, \dots, n : y_i = ax_i$ ؛ فالمطلوب إذن هو علينا أن نجد تباين هذه السلسلة بمعنى: $V(y) = V(ax) = ?$.

نعلم من جهة أن تباين x_i هو: $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \bar{x}^2$

و منه فإن تباين المتغير y_i يُمكن الحصول عليه كذلك كما يلي:

و نعلم من جهة أخرى من خصائص المتوسط الحسابي أنه إذا كان: $y_i = ax_i$ فإن: $\bar{y} = a\bar{x}$. حيث:

إذن:

$$V(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (ax_i)^2}{n} - (a\bar{x})^2$$

$$= \frac{a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - a^2\bar{x}^2$$

$$= a^2 \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right]$$

$$= a^2 V(x)$$

و بالتالي نتوصل إلى أن:

$$V(ax) = a^2 V(x).$$

التمرين الثاني:

دعنا نُلخص معطيات التمرين في الجدول التالي:

	$\overline{x}_i$	f_i	$\overline{x}_i f_i$
ذكور	8000	f1	8000 f1
إناث	6500	f2	6500 f2
$\sum$	/	1	7000

و من أجل الحل و إيجاد النسب المطلوبة نستعين بالقانون التالي:

$$\text{المتوسط العام}\ \overline{X} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2} = f_1\overline{x}_1 + f_2\overline{x}_2$$

حيث يُمثل كل من n_1 و n_2 عدد الذكور و الإناث على التوالي، f_1 و f_2 التكرارات النسبية، في حين أن $\overline{x}_1$ هو متوسط أجور العمال الذكور، و $\overline{x}_2$ هو متوسط أجور العمال الإناث.

و نظراً لأن العدد الإجمالي للعمال $(n_1 + n_2)$ غير معلوم ، فإننا سوف نستعمل المساواة الثانية من القانون السابق لنحصل على:

$$7.000 = 8.000 f_1 + 6.500 f_2 \dots (I)$$

تلك هي المعادلة الأولى التي نحتاج إليها، و نعلم من جهة أخرى أن مجموع التكرارات النسبية هو دائماً الواحد، أي:

$$f_1 + f_2 = 1 \dots (II)$$

و بهذا نكون قد تحصلنا على جملة معادلتين، لنقوم بعدها بإستخراج أحد المجهولين بدلالة الآخر من المعادلة (II) و تعويضه في المعادلة (I)كما يلي:

$$(II) \Rightarrow f_2 = 1 - f_1$$

$$(I) \Leftrightarrow 7.000 = 8.000f_1 + 6.500(1 - f_1)$$

$$\Leftrightarrow 7.000 = 8.000f_1 + 6.500 - 6.500f_1$$

$$\Leftrightarrow 500 = 1.500f_1$$

$$\Leftrightarrow f_1 = \frac{500}{1.500} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

و بالتالي:

$$f_2 = 1 - f_1 = 1 - 0.3333 = 0.6666 = 66.66\%$$

فتكون إذن نسبة العمال الذكور33.33٪ و الإناث66.66٪ في ذلك العام.

التمرين الثالث:

لدينا الجدول التالي المساعد في عملية الحل:

الفئات	ni	ni ↗	ni	ni ↗	مراكز الفئات x_i	$n_i \times x_i$	ai	$\hat{n}_i = n_i/a_i$
[0-4 [	6	6	6	6	4/2	24/2	4	3/2
[4-8[	n_2	6+ n_2	25	31	12/2	300/2	4	**25/4**
[8-12[	n_3	6+ n_2+ n_3	24	55	20/2	480/2	4	6
[12-E[	17	23+ n_2+ n_3	17	72	(12 + E)/2	(204 + 17E)/2	4	17/4
[E-22[	14	37+ n_2+ n_3	14	86	(E + 22)/2	(14E + 308)/2	6	7/3
[22-30[	11	48+ n_2+ n_3	11	97	52/2	572/2	8	11/8
[30-42[	3	51+ n_2+ n_3	3	100	72/2	216/2	12	1/4
$\sum$	100	-	100	-	-	$\frac{2104 + 31E}{2}$	-	-

1- إيجاد التكرارين n_2 و n_3 علماً أن العشير الرابع يساوي $D_4 = 9.5$:

لاحظ أن هذه القيمة 9.5 تقع داخل الفئة الثالثة ($9.5 \in [8 - 12[$)، و بالتالي فإن هذه الفئة $[8-12[$ هي فئة العُشير الرابع؛ و من خلال تطبيق قانون هذا العُشير:

$$D_4 = L_{i1} + \frac{Rg_{D_4} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

حيث:

- D_4 : العُشير الرابع؛
- L_{i1} : الحد الأدنى لفئة العُشير الرابع وهي الفئة الثالثة (i=3)؛
- Rg_{D_4}: رُتبة العُشير الرابع و هي تساوي $Rg_{D_4} = \frac{4}{10}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{4}{10} \times 100 = 40$؛
- $n_{(i-1)}^{\nearrow}$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق فئة هذا العُشير؛
- n_i: التكرار المطلق لفئة العُشير؛
- a_i : طول فئة هذا العُشير.

سوف نحصل على المعادلة الأولى كما يلي:

$$D_4 = L_{31} + \frac{Rg_{D_4} - n_2^{\nearrow}}{n_3} \times a_3$$

$$\Leftrightarrow 9.5 = 8 + \frac{40 - (6 + n_2)}{n_3} \times 4$$

$$\Leftrightarrow (9.5 - 8) \times n_3 = 160 - 24 - 4n_2$$

$$\Leftrightarrow 1.5n_3 + 4n_2 = 136 \ldots\ldots.(I)$$

أما المعادلة الثانية فنحصل عليها بمعرفتنا أن مجموع التكرارات هو مائة، أي:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = 100 \Leftrightarrow 6 + n_2 + n_3 + 17 + 14 + 11 + 3 = 100$$

$$\Leftrightarrow 51 + n_2 + n_3 = 100$$

$$\Leftrightarrow n_2 + n_3 = 100 - 51$$

$$\Leftrightarrow n_2 + n_3 = 49 \dots\dots\dots (II)$$

من هذه المعادلة (II) نستخرج أحد المجهولين بدلالة الآخر، و ليكن: $n_3 = 49 - n_2$ و

نعوضه في المعادلة (I) نجد:

$$(I) \Leftrightarrow 1.5(49 - n_2) + 4n_2 = 136$$

$$\Leftrightarrow 73.5 - 1.5n_2 + 4n_2 = 136$$

$$\Leftrightarrow 2.5n_2 = 62.5$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n_2} = \frac{62.5}{2.5} = \mathbf{25}$$

و منه:

$$\boldsymbol{n_3} = 49 - 25 = \mathbf{24}$$

العمودان الرابع و الخامس من الجدول يمثلان كل من التكرارات المطلقة ni و التكرارات الصاعدة ni↗ على التوالي بعد إيجاد التكرارات المجهولة.

2- إيجاد الحد E علماً أن المتوسط الحسابي يساوي $\bar{X} = 13$:

من أجل ذلك أضفنا للجدول كل من مراكز الفئات xi (العمود السادس) [1]، على أن يبقى مركز الفئتين الرابعة و الخامسة متعلقاً بالحد المجهول E، ثم بعد ذلك التكرارات niمضروبة في هذه المراكز (العمود السابع) على أن تبقى القيم الرابعة و الخامسةمن هذا العمود متعلقة بدورها بهذا الحد E ؛ و ذلك تطبيقاً لقانون المتوسط الحسابي.

فبتطبيق قانون المتوسط الحسابي، الذي يساوي 13 هنا ، نحصل على:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = 13 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n_i x_i} = \bar{X} \times \sum_{i=1}^{n} n_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{n_i x_i} = 13 \times 100 = \mathbf{1300}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2104+31E}{2} = 1300$$

(لاحظ في العمود السابع من جدول الحل أن $\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \frac{2104+31E}{2}$)

$$\Leftrightarrow 2104 + 31E = 2 \times 1300 = 2600$$

$$\Leftrightarrow 31E = 2600 - 2104 = 496$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E} = \frac{496}{31} = \mathbf{16}$$

و منه فإن الفئتين الرابعة و الخامسة هما على التوالي:]12-16] و]16-22].

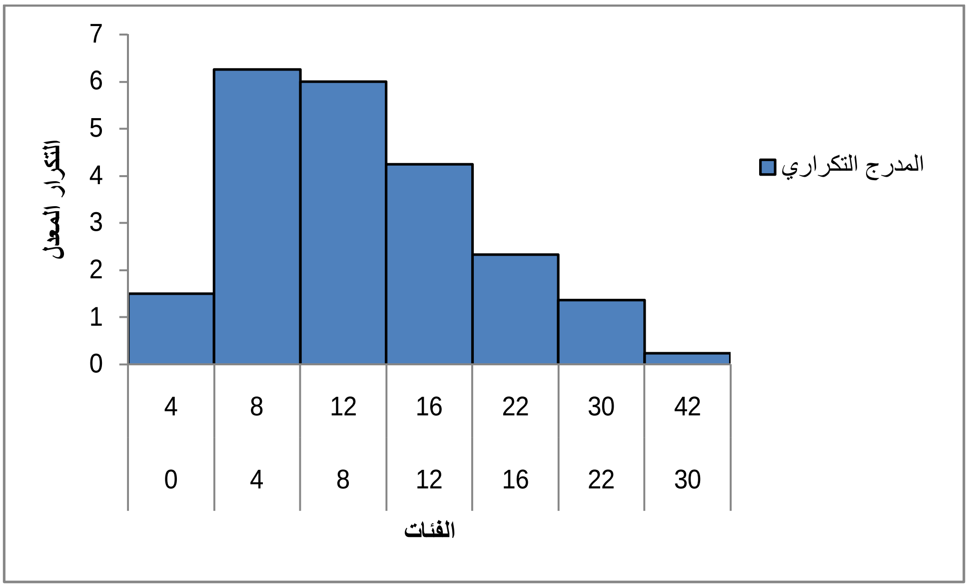
3- رسم المدرج التكراري:

إن أول ما نلاحظه من معطيات هذا التمرين هو أن الفئات غير متساوية في الطول، لذلك يتوجب علينا تعديل التكرارات سواء عند رسم المدرج التكراري أو عند حساب المنوال.

[1] ☜ تذكر أن مركز كل فئة هو حدها الأدنى زائد حدها الأعلى مقسوماً على "2". كما أننا لم نرغب في الإختزال هنا حتى تكون المقامات موحدة من أول.

العمود الأخير من جدول الحل يعكس هذه التكرارات المعدلة بعد حساب طول كل فئة في العمود الذي قبله.

الشكل التالي يبين رسماً للمدرج التكراري لهذا التوزيع:



4- حساب كل من الرُبيع الثالث و المنوال:

- الربيع الثالث: Q_3

رُتبة الربيع الثالث هي: $Rg_{Q_3} = \frac{3}{4}\sum_{i=1}^{n} n_i = \frac{3}{4} \times 100 = 75$

إعتماداً على هذه الرتبة و بالنظر في عمود التكرار المتجمع الصاعد ni↗ نستنتج أن فئة هذا الربيع هي الفئة الخامسة (i=5):[16-22[، ثم نستخرج قيمة الربيع بتطبيق القانون التالي:

$$Q_3 = L_{i1} + \frac{Rg_{Q_3} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

حيث:

- Q_3 : الربيع الثالث؛
- L_{i1} أو L بإختصار: الحد الأدنى لفئة الربيع؛
- Rg_{Q_3} : رتبةالربيع الثالث ؛
- $n_{(i-1)}^{\nearrow}$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق فئة هذا الربيع؛
- n_i : التكرار المطلق لفئة الربيع؛
- a_i : طول فئة الربيع.

$$\boldsymbol{Q_3} = 16 + \frac{75 - 72}{14} \times 6 = \mathbf{17.285}$$

☜ تذكر أن 25٪ من المشاهدات (هنا 25 عائلة) تزيد قيمتها عن قيمة الربيع الثالث، و 75٪ منها لا تزيد عن ذلك.

- المنوال:

فئة المنوال هي الفئة التي يقابلها أكبر تكرار معدل (25/4) و هي الفئة الثانية: [4-8[و بتطبيق القانون التالي نحصل على المنوال إعتماداً دائماً على التكرارات المعدلة و ليس المطلقة:

$$M_o = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

حيث:

- M_o : قيمة المنوال؛
- L_{i1} : الحد الأدنى لفئة المنوال؛

- d_1 : الفرق بين تكرار فئة المنوال المعدل و التكرار المعدل للفئة التي تسبقها؛
- d_2 : الفرق بين تكرار فئة المنوال المعدل و التكرار المعدل للفئة التي تليها؛
- a_i : طول فئة المنوال.

$$\boldsymbol{M_o} = 4 + \left[\frac{(25/4)-(3/2)}{((25/4)-(3/2))+((25/4)-(6))}\right] \times 4$$

$$= 4 + \frac{4.75}{4.75+0.25} \times 4$$

$$= \mathbf{7.8}$$

5- جهة إلتواء المنحنى البياني:

المطلوب هو إستنتاج جهة إلتواء المنحنى و ليس حساب شدة الإلتواء بدقة، و بالتالي يمكننا إستنتاج ذلك عن طريق المقارنة بين مقاييس النزعة المركزية الثلاثة: المتوسط الحسابي، الوسيط و المنوال حيث نعلم الآن قيمة كل من المتوسط الحسابي و المنوال و بقي لنا أن نحسب قيمة الوسيط كما يلي:

$$M_e = L_{i1} + \frac{Rg_{M_e} - n^{\nearrow}_{(i-1)}}{n_i} \times a_i$$

حيث:

- M_e : الوسيط؛
- Rg_{M_e} : رُتبة الوسيط و هي تساوي 50 = $\mathrm{Rg}_{M_e} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{2} = \frac{100}{2}$ ؛
- L_{i1} : الحد الأدنى لفئة الوسيط وهي الفئة الثالثة (i=3):[8-12[إعتماداً على كل من الرتبة و عمود التكرار الصاعد كما هو معروف؛

- $n_{(i-1)}^{\nearrow}$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق فئة الوسيط؛

- n_i : التكرار المطلق لفئة الوسيط؛

- a_i : طول فئة الوسيط.

و بالتطبيق على القانون السابق نحصل على:

$$\boldsymbol{M_e} = 8 + \frac{50 - 31}{24} \times 4$$

$$= 8 + \frac{19}{24} \times 4$$

$$= \mathbf{11.166}$$

فبالمقارنة في الأخير يكون لدينا :

$$M_o < M_e < \bar{x} \Leftrightarrow 7.8 < 11.166 < 13$$

و هو ما يدل على أن المنحنى مائل إلى ناحية اليمين (إلتواء موجب)، كما يؤكده كذلك الشكل البياني السابق.

التمرين الرابع:

1- الرواتب الوسيطية لسنة 1979 و لسنة 1983:

نعلم أن الوسيط هو نفسه الرُبيع الثاني و هو نفسه كذلك العُشير الخامس و المُئين الخمسون، فبحسب المعطيات يكون لدينا مباشرة:

- لسنة 1979: $M_e = D_5 = 39560$

- لسنة 1983: $M_e = D_5 = 64370$

2- المدى العُشيري لسنة 1979 و لسنة 1983:

مدى أي مجموعة من القيم و المشاهدات هو دائماً أكبر قيمة مطروحاً منها أصغر قيمة، و عليه فإن المدى العُشيري هو أكبر عُشير (العُشير التاسع) ناقص أصغر عُشير (العُشير الأول)، أي: $ID = D_9 - D_1$ و بالتالي يكون لدينا:

- لسنة 1979: $ID = 75740 - 24920 = 50820$
- لسنة 1983: $ID = 122900 - 40490 = 82410.$

الموضوع الثالث

أسئلة نظرية:

ليكن x كمتغير متقطع. نعرف المتغير الإحصائي y بحيث: y=ax+b، بحيث a و b عددان حقيقيان.

بين أن: - $\bar{y} = a\bar{x} + b$

- $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

تمرين رقم 01:

تحصل طالب على النقطة 15.5 في مادة الإحصاء الوصفي، في الوقت بلغ معدل الدفعة 12.83 بانحراف معياري 3.9. ثم تحصل نفس الطالب على النقطة 13 في مادة الرياضيات، أين كان معدل الدفعة في هذه المادة 10.55 بانحراف معياري هو 2.8.

المطلوب: في أي من المادتين كانت نقطة هذا الطالب هي الأحسن؟

تمرين رقم 02:

إذا علمت أن نسبة النمو السكاني في مدينة معينة خلال السنة الأولى هي 3٪، و الثانية هي 2.4٪، و السنة الثالثة هي 2٪؛ فما هو معدل النمو السكاني لهذه المدينة خلال الثلاث سنوات؟

تمرين رقم 03:

في مؤسسة معينة قدر متوسط الأجر الشهري بـ 27200 دج بانحراف معياري بلغ 2340 دج. طالب عمال هذه المؤسسة برفع الأجور، فقرر صاحب العمل تقديم مساعدة مالية لكل عامل قدرت بـ 7000 دج بمناسبة عيد الفطر على أن يتم رفع الأجر مع بداية السنة الجديدة بنسبة 15٪.

المطلوب: إيجاد متوسط الأجر الشهري و إنحرافه المعياري: 1- بعد منح المساعدة؛

2- بعد رفع الأجور.

تمرين رقم 04:

أراد مدير التسويق لمركز تجاري معرفة عدد الأيام التي بيع فيها أصناف معينة من المنتجات، و للقيام بذلك سحبت عينة عشوائية متكونة من 200 منتوج، ثم قام بتدوين البيانات التي تحصل عليها في الجدول التالي:

عدد الأيام Ci	]1-0]	]5-1]	]8-5]	]12-8]	]18-12]	]23-18]	]30-23]	المجموع
عدد المنتجات ni	5	10	25	40	65	38	17	200

1- حدد شكل منحنى هذا التوزيع بإستعمال مقاييس النزعة المركزية.

2- أدرس تشتت عدد الأيام التي تم فيها بيع أصناف المنتجات حول المتوسط الحسابي بإستعمال معامل الإختلاف.

حل الموضوع الثالث

السؤال النظري:

بحسب المعطيات لدينا المتغيرين x_i و y_i حيث $y_i = ax_i + b$ و a و b عددان حقيقيان ثابتان.

- برهان أن $\bar{y} = a\bar{x} + b$:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[ax_i + b]}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b}{N}$$

$$= \frac{a\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{Nb}{N}$$

$$= a\bar{x} + b$$

و هو المطلوب.

- $\mathbf{V(x)} = \frac{\sum \mathbf{x_i^2}}{\mathbf{N}} - \bar{\mathbf{x}}^2$:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \frac{2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - 2\overline{xx} + \frac{N\bar{x}^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

و هو المطلوب.

التمرين 01:

لحل التمرين نقوم بتحويل العلامتين اللتين تحصل عليهما هذا الطالب إلى درجات

معيارية Z_i كي نستطيع المقارنة ، مع $Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$:

- الدرجة المعيارية في الإحصاء هي:

$$Z_{Stat} = \frac{x_{Stat} - \bar{x}_{Stat}}{\sigma_{Stat}} = \frac{15.5 - 12.83}{3.9} = 0.6846$$

- الدرجة المعيارية في الرياضيات هي:

$$Z_{Math} = \frac{x_{Math} - \bar{x}_{Math}}{\sigma_{Math}} = \frac{13 - 10.55}{2.8} = 0.875$$

من خلال المقارنة نجد أن الدرجة المعيارية الخاصة بهذا الطالب في مادة الرياضيات أكبر من علامته المعيارية في الإحصاء($Z_{Math} > Z_{Stat}$) و بالتالي فإن تحصيل هذا الطالب في مادة الرياضيات كان أفضل ضمن دفعته.

التمرين 02:

لإيجاد معدل النمو السكاني لهذه المدينة خلال الثلاث سنوات المذكورة فإننا نستعمل المتوسط الهندسي "G" فهو الأنسب في مثل هذه الحالات طالما أننا نبحث عن إيجاد متوسط مجموعة من القيم معبر عنها بنسب مئوية؛ و يتم ذلك كما يلي:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} - 1 = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} - 1$$

$$= \sqrt[3]{(1+0.03)\times(1+0.024)\times(1+0.02)} - 1$$

$$= \sqrt[3]{(1.03)\times(1.024)\times(1.02)} - 1$$

$$= \sqrt[3]{1.0758144} - 1$$

$$= 1.024658 - 1$$

$$= 0.024658 = 2.4658\%$$

و هو معدل النمو السكاني خلال هذه السنوات الثلاثة.

التمرين 03:

لنفرض أن: x_i: الأجر الأولي (قبل المساعدة أوالزيادة)؛

y_i: الأجر بعد منح المساعدة بـ 7000 دج.

z_i: الأجر بعد الزيادة بنسبة 15٪.

من المعطيات لدينا: $\bar{x} = 27200$ و $\sigma(x) = 2340$. $b = 7000$

1- حساب كل من متوسط الأجر و الإنحراف المعياري بعد منح المساعدة الثابتة:

$\bar{y} = ?\ \sigma(y) = ?$

في هذه الحالة لدينا معادلة السعر الجديد y_i كاتالي: $y_i = x_i + 7000$ ؛ و نعلم من خصائص المتوسط الحسابي أنه إذا كان: $y_i = x_i + b$ فإن $\bar{y} = \bar{x} + b$، و بتطبيق هذه الخاصية نحصل على:

$$y_i = x_i + 7000 \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + 7000$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 27200 + 7000$$

$$= 34200\ DA$$

و هذا يعني أن متوسط الأجر إرتفع هو الآخر بنفس مقدار المساعدة الممنوحة 7000 دج.

الآن من خصائص التباين نعلم أنه إذا $y_i = x_i + b$ فإن $v(y) = v(x)$ ، و عليه:

$$v(y) = v(x_i + 7000) = v(x) \Rightarrow \sigma(y) = \sigma(x) = 2340\ DA$$

و هذا يشير إلى أن الإنحراف المعياري لم يتغير بعد الزيادة بمقدار ثابت و بقي كما هو.

2- حساب كل من المتوسط الأجر و الإنحراف المعياري بعد الزيادة في الأجور بنسبة 15٪: $\bar{z} = ?\ \sigma(z) = ?$

في هذه الحالة لدينا الأجر الجديد يساوي الأجر الأولي زائد 15٪ من قيمة هذا الأجر و بالتالي فإن معادلة الأجر الجديد الذي رمزنا له بـ z_i هي: $z_i = x_i + 0.15x_i = 1.15x_i$؛

و بالإعتماد دائماً على خصائص كل من المتوسط الحسابي و التباين نحصل على:

$$\bar{z} = 1.15\bar{x} = 1.15 \times 27200$$

$$= 31280\ DA$$

و هذا يعني أن المتوسط الجديد للأجر هو الآخر إرتفع بنفس النسبة 15٪.

$$\sigma(z) = a \times \sigma(x)$$

$$= 1.15 \times 2340$$

$$= 2691\ DA$$

و هذا يشير إلى أن الإنحراف المعياري إرتفع كذلك بنفس النسبة 15٪.

التمرين 04:

لدينا جدول الحسابات التالي:

الفئات	ni	ni ↗	Xi	ni xi	ai	ni*=ni/ai	$(\mathrm{Xi}-\bar{\mathrm{X}})$	$(\mathrm{Xi}-\bar{\mathrm{X}})^2$	$ni(\mathrm{Xi}-\bar{\mathrm{X}})^2$
[0-1[	5	5	0,5	2,5	1	5	-13,50	182,18	910,91
[1-5[	10	15	3	30	4	2,5	-11,00	120,95	1209,45
[5-8[	25	40	6,5	162,5	3	8,33	-7,50	56,21	1405,31
[8-12[	40	80	10	400	4	10	-4,00	15,98	639,20
[12-18[	65	145	15	975	6	10,83	1,00	1,01	65,33
[18-23[	38	183	20,5	779	5	7,6	6,50	42,28	1606,74
[23-30[	17	200	26,5	450,5	7	2,43	12,50	156,31	2657,31
∑	**200**	-	-	**2799,5**	-	-	-	-	**8494,24875**

1- شكل منحنى هذا التوزيع بإستعمال مقاييس النزعة المركزية.

علينا أن نجد قيم كل مقياس من مقاييس النزعة المركزية و هي المتوسط الحسابي، الوسيط و المنوال.

- المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{2799.5}{200} = 13.9975$$

- الوسيط:

رتبة الوسيط هي: $Rg_{Me} = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{200}{2} = 100$؛

إعتماداً على التكرار الصاعد فإن فئة الوسيط هي الفئة الخامسة $(i = 5)$ و هي[12-18[؛

وبتطبيق القانون نحصل على قيمة الوسيط كما يلي:

$$Me = L_{i1} + \frac{Rg_{Me} - n^{\nearrow}_{(i-1)}}{n_i} \times a_i$$

$$= L_{51} + \frac{Rg_{Me} - n^{\nearrow}_{(4)}}{n_5} \times a_5$$

$$= 12 + \frac{100 - 80}{65} \times 6$$

$$= 13.84$$

- المنوال:

نلاحظ أن الفئات غير متساوية في الطول و هو ما يستدعي إجراء تعديل على التكرارات المطلقة عند حسابنا للمنوال. و بملاحظتنا لقيم عمود التكرارات المعدلة نرى أن أكبر تكرار معدل هو "10.83" الذي يقابل الفئة الخامسة (i = 5)]12-18[و عليه فإن هذه الأخيرة هي فئة المنوال، وبتطبيق قانون المنوال معتمدين على التكرارات المعدلة بدل المطلقة نحصل على قيمته كالتالي:

$$Mo = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 12 + \frac{(10.83-10)}{(10.83-10)+(10.83-7.6)} \times 6$$

$$= 13.22$$

بترتيب قيم هذه المقاييس يكون لدينا $Mo < Me < \bar{X}$ و بالتالي نستنتج أن التوزيع مائل قليلاً إلى ناحية اليمين (إلتواء موجب).

2- دراسة تشتت عدد الأيام التي تم فيها بيع المنتجات حول المتوسط الحسابي بإستعمال معامل الإختلاف.

لحساب معامل الإختلاف علينا أن نجد أولاً قيمة الإنحراف المعياري: $\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)}$:

☚ من أجل حساب التباين و منه الإنحراف المعياري يمكننا إستعمال سواءاً صيغة القانون الأصلي للتباين $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$ أو الصيغة الثانية $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(n_i x_i^2)}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \overline{x}^2$ التي يمكن برهنتها كما فعلنا في السؤال النظري السابق مع الأخذ بعين الإعتبار وجود التكرارات هنا.

سوف نستعمل الصيغة الأولى (صيغة القانون) للحساب:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{8494{,}24875}{200}}$$

$$= \sqrt{42.471243}$$

$$= 6.51$$

و بالتالي فإن معامل الإختلاف سوف يساوي:

$$C.V = \frac{\sigma_{(x)}}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{6.51}{13.9975} \times 100$$

$$= 0.4655 \times 100$$

$$= 46.55\%$$

و بما أن قيمة هذا المعامل أكبر من 35% فإنه يمكن القول أن بيانات هذا التوزيع مشتتة.

الموضوع الرابع

أسئلة نظرية:

ليكن x كمتغير متقطع. نعرف المتغير الإحصائي y بحيث: y=ax+b، و a و b عددان حقيقيان.

بين أن: - $\bar{y} = a\bar{x} + b$ و أن التباين لـ x يساوي $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

تمرين رقم 01:

إذا علمت أن نسبة النمو السكاني في مدينة معينة خلال السنة الأولى هي 3٪، و الثانية هي 2.4٪، و السنة الثالثة هي 2٪؛ فماهو معدل النمو السكاني لهذه المدينة خلال الثلاث سنوات؟

تمرين رقم 02:

في مؤسسة معينة قدر متوسط الأجر الشهري بـ 27200 دج بانحراف معياري بلغ 2340 دج. طالب عمال هذه المؤسسة برفع الأجور، فقرر صاحب العمل تقديم مساعدة مالية لكل عامل قدرت بـ 7000 دج بمناسبة عيد الفطر على أن يتم رفع الأجر مع بداية السنة الجديدة بنسبة 15٪.

المطلوب: إيجاد متوسط الأجر الشهري و إنحرافه المعياري: 1- بعد منح المساعدة؛

2- بعد رفع الأجور.

تمرين رقم 03:

أراد مدير التسويق لمركز تجاري معرفة عدد الأيام التي بيع فيها أصناف معينة من المنتجات، و للقيام بذلك سحبت عينة عشوائية متكونة من 200منتوج، ثم قام بتدوين البيانات التي تحصل عليها في الجدول التالي:

عدد الأيام Ci	]1-0]	]5-1]	]8-5]	]12-8]	]18-12]	]23-18]	]30-23]	المجموع
عدد المنتجات ni	5	10	25	40	65	38	17	200

1- أحسب متوسط عدد الأيام التي بيع فيها المنتجات.

2- ماهو عدد الأيام التي بيع فيها أكبر عدد من المنتجات؟.

3- حدد شكل منحنى هذا التوزيع بإستعمال مقاييس النزعة المركزية.

4- أدرس تشتت عدد الأيام التي تم فيها بيع المنتجات حول المتوسط الحسابي بإستعمال معامل الإختلاف.

حل الموضوع الرابع

السؤال النظري:

بحسب المعطيات لدينا المتغيرين x_i و y_i حيث $y_i = ax_i + b$ و a و b عددان حقيقيان ثابتان.

- برهان أن $\bar{y} = a\bar{x} + b$:.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[ax_i + b]}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b}{N}$$

$$= \frac{a\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{Nb}{N}$$

$$= a\bar{x} + b$$

و هو المطلوب.

- تباين x: $\mathbf{V(x)} = \frac{\sum \mathbf{x_i^2}}{\mathbf{N}} - \mathbf{\bar{x}^2}$:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \frac{2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - 2\overline{x x} + \frac{N\bar{x}^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

و هو المطلوب.

التمرين 01:

لإيجاد معدل النمو السكاني لهذه المدينة خلال الثلاث سنوات المذكورة فإننا نستعمل المتوسط الهندسي "G" حيث يُعد أنسب متوسط يُستعمل في مثل هذه الحالات طالما أننا نبحث عن إيجاد متوسط مجموعة من القيم معبر عنها بنسب مئوية؛ و يتم ذلك كما يلي:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} - 1 = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n} - 1$$

$$= \sqrt[3]{(1 + 0.03) \times (1 + 0.024) \times (1 + 0.02)} - 1$$

$$= \sqrt[3]{(1.03) \times (1.024) \times (1.02)} - 1$$

$$= \sqrt[3]{1.0758144} - 1$$

$$= 1.024658 - 1$$

$$= 0.024658 = 2.4658\%$$

و هو معدل النمو السكاني خلال هذه السنوات الثلاثة.

التمرين 02:

لنفرض أن: x_i: الأجر الأولي (قبل المساعدة أوالزيادة)؛

y_i: الأجر بعد منح المساعدة بـ 7000 دج.

z_i: الأجر بعد الزيادة بنسبة 15٪.

من المعطيات لدينا: $\bar{x} = 27200$ و $\sigma(x) = 2340$. $b = 7000$

1- حساب كل من متوسط الأجر و الإنحراف المعياري بعد منح المساعدة الثابتة:

$\bar{y} = ? \quad \sigma(y) = ?$

في هذه الحالة لدينا معادلة السعر الجديد y_i كاتالي: $y_i = x_i + 7000$ ؛ و نعلم من خصائص المتوسط الحسابي أنه إذا كان: $y_i = x_i + b$ فإن $\bar{y} = \bar{x} + b$، و بتطبيق هذه الخاصية نحصل على:

$$y_i = x_i + 7000 \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + 7000$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 27200 + 7000$$

$$= 34200\ DA$$

و هذا يعني أن متوسط الأجر إرتفع هو الآخر بنفس مقدار المساعدة الممنوحة 7000 دج.

الآن من خصائص التباين نعلم أنه إذا $y_i = x_i + b$ فإن $v(y) = v(x)$ ، و عليه:

$$v(y) = v(x_i + 7000) = v(x) \Rightarrow \sigma(y) = \sigma(x) = 2340\ DA$$

و هذا يشير إلى أن الإنحراف المعياري لم يتغير بعد الزيادة بمقدار ثابت و بقي كما هو.

2- حساب كل من المتوسط الأجر و الإنحراف المعياري بعد الزيادة في الأجور بنسبة 15٪: $\bar{z} = ? \quad \sigma(z) = ?$

في هذه الحالة لدينا الأجر الجديد يساوي الأجر الأوليزائد15٪ من قيمة هذا الأجر و بالتالي فإن معادلة الأجر الجديد الذي رمزنا له بـ z_i هي: $z_i = x_i + 0.15x_i = 1.15x_i$؛

و بالإعتماد دائماً على خصائص كل من المتوسط الحسابي و التباين نحصل على:

$$\bar{z} = 1.15\bar{x} = 1.15 \times 27200$$

$$= 31280\ DA$$

و هذا يعني أن المتوسط الجديد للأجر هو الآخر إرتفع بنفس النسبة 15٪.

$$\sigma(z) = a \times \sigma(x)$$

$$= 1.15 \times 2340$$

$$= 2691\ DA$$

و هذا يشير إلى أن الإنحراف المعياري إرتفع كذلك بنفس النسبة 15٪.

<u>التمرين 03:</u>

لدينا جدول الحسابات التالي:

الفئات	ni	ni ↗	Xi	ni xi	ai	ni*=ni/ai	$(\mathbf{Xi}-\bar{\mathbf{X}})$	$(\mathbf{Xi}-\bar{\mathbf{X}})^2$	$\boldsymbol{ni}(\mathbf{Xi}-\bar{\mathbf{X}})^2$
[0-1[	5	5	0,5	2,5	1	5	-13,50	182,18	910,91
[1-5[	10	15	3	30	4	2,5	-11,00	120,95	1209,45
[5-8[	25	40	6,5	162,5	3	8,33	-7,50	56,21	1405,31
[8-12[	40	80	10	400	4	10	-4,00	15,98	639,20
[12-18[	65	145	15	975	6	10,83	1,00	1,01	65,33
[18-23[	38	183	20,5	779	5	7,6	6,50	42,28	1606,74
[23-30[	17	200	26,5	450,5	7	2,43	12,50	156,31	2657,31
∑	200	-	-	2799,5	-	-	-	-	8494,24875

1- متوسط عدد الأيام التي بيع فيها المنتجات.

من خلال قانون المتوسط الحسابي نحصل على:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{2799.5}{200}$$

$$= 13.9975$$

2- عدد الأيام التي بيع فيها أكبر عدد من المنتجات.

يقصد بذلك المنوال غير أن ما نلاحظه هو أن الفئات غير متساوية في الطول و هو ما يستدعي إجراء تعديل على التكرارات المطلقة عند حسابنا للمنوال. و بملاحظتنا لقيم عمود التكرارات المعدلة نرى أن أكبر تكرار معدل هو "10.83" الذي يقابل الفئة الخامسة (i = 5)]12-18[و عليه فإن هذه الأخيرة هي فئة المنوال؛ وبتطبيق قانون المنوال معتمدين على التكرارات المعدلة بدل المطلقة نحصل على قيمته كالتالي:

$$Mo = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 12 + \frac{(10.83-10)}{(10.83-10)+(10.83-7.6)} \times 6$$

$$= 13.22$$

3- شكل منحنى هذا التوزيع بإستعمال مقاييس النزعة المركزية.

لدينا كل من المتوسط الحسابي و المنوال، فبقي لنا ان نحسب قيمة الوسيط كي نستطيع ان نستنتج شكل التوزيع من خلال المقارنة بين هذه المقاييس.

- الوسيط:

رتبة الوسيط هي: $Rg_{Me} = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{200}{2} = 100$؛

إعتماداً على التكرار الصاعد فإن فئة الوسيط هي الفئة الخامسة (i = 5) و هي]12-18[؛ وبتطبيق القانون نحصل على قيمة الوسيط كما يلي:

$$Me = L_{i1} + \frac{Rg_{Me} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

$$= L_{51} + \frac{Rg_{Me} - n_{(4)}^{\nearrow}}{n_5} \times a_5$$

$$= 12 + \frac{100 - 80}{65} \times 6$$

$$= 13.84$$

بترتيب قيم هذه المقاييس يكون لدينا $Mo < Me < \bar{X}$ و بالتالي نستنتج أن التوزيع مائل قليلاً إلى ناحية اليمين (إلتواء موجب).

4- دراسة تشتت عدد الأيام التي تم فيها بيع المنتجات حول المتوسط الحسابي بإستعمال معامل الإختلاف.

لحساب معامل الإختلاف علينا أن نجد أولاً قيمة الإنحراف المعياري: $\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)}$:

☚ من أجل حساب التباين و منه الإنحراف المعياري يمكننا إستعمال سواءاً صيغة القانون الأصلي للتباين $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$ أو الصيغة الثانية $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (n_i x_i^2)}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \overline{x}^2$ التي يمكن برهنتها كما فعلنا في السؤال النظري السابق مع الأخذ بعين الإعتبار وجود التكرارات هنا.

سوف نستعمل الصيغة الأولى (صيغة القانون) للحساب:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{8494,24875}{200}}$$

$$= \sqrt{42.471243}$$

$$= 6.51$$

و بالتالي فإن معامل الإختلاف سوف يساوي:

$$C.V = \frac{\sigma_{(x)}}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{6.51}{13.9975} \times 100$$

$$= 0.4655 \times 100$$

$$= 46.55\%$$

و بما أن قيمة هذا المعامل أكبر من 35% فإنه يمكن القول أن بيانات هذا التوزيع مشتتة.

الموضوع الخامس

أسئلة نظرية:

ليكن x و y متغيرين بحيث أن العلاقة بينهما هي: y=ax+b، و أن a و b عددان حقيقيان.

- بين أن: أ- $\bar{y} = a\bar{x} + b$ و أن ب- $V(x) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2$

التمرين الأول:

يتألف فندق من 40 غرفة مربعة الشكل طول ضلع 5 غرف منها هو 9 أمتار ، 9 غرف طول ضلعها 8 أمتار، 12 غرفة طول ضلعها هو 7 أمتار، أما الغرف المتبقية فطول ضلع كل واحدة منها هو 6 أمتار.

1- ماهو متوسط طول ضلع غرف هذا الفندق؟

2- أحسب المساحة المتوسطة لغرف هذا الفندق.

التمرين الثاني:

أراد مدير وكالة من وكالات شركة "سونلغاز" معرفة الكمية المستهلكة من الغاز الطبيعي من طرف الزبائن المتواجدين بمنطقة معينة، و للقيام بذلك أخذ عينة من 200زبون متواجدين بتلك المنطقة و بعد إحصائهم لخص البيانات التي تحصل عليها في الجدول التالي:

كمية الغاز	]1-0]	]5-1]	]8-5]	]12-8]	]18-12]	]23-18]	]30-23]
عدد الزبائن	5	10	25	40	65	38	17

من الجدول المبين أعلاه أحسب:

1- متوسط كمية الغاز المستهلك من طرف الزبائن.

2- كمية الغاز الوسيطية المستهلكة من طرف الزبائن.

3- كمية الغاز المستهلكة من طرف أكبر عدد من الزبائن.

4- أدرس تشتت كمية الغاز المستهلك من طرف الزبائن حول المتوسط الحسابي. ماذا تستنتج؟

5- أحسب معامل الإلتواء باستعمال قانون فيشر.

حل الموضوع الخامس

السؤال النظري:

لدينا هنا متغيرتين إحصائيتين هما x_i و y_i مع $i = 1,...,n.$. و العلاقة بينهما هي أنه $\forall i : y_i = ax_i + b$ بحيث a و b عدادان حقيقيان ثابتان، و نحن مطالبين بالبرهان على أن:

أ- $\overline{y} = a\overline{x} + b$. يكون ذلك كما يلي:

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[ax_i + b]}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b}{N}$$

$$= \frac{a\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{Nb}{N} \quad [\text{تذكر أن:} \ \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}]$$

$$= a\overline{x} + b$$

و هو المطلوب.

ب- $\mathbf{V(x)} = \frac{\sum \mathbf{x_i^2}}{\mathbf{N}} - \overline{\mathbf{x}}^2$ و يتم ذلك على نحو موال:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - \frac{2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - 2\overline{x}\overline{x} + \frac{N\overline{x}^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{N} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\mathrm{N}} - \overline{x}^2$$

و هو المطلوب.

التمرين الأول:

للإجابة على كل من السؤال الأول و الثاني الخاصين بهذا التمرين فإننا نستعمل المتوسط التربيعي بدل الحسابي، فإذا ما رمزنا لطول ضلع الغرفة بالرمز x_i و بالتطبيق المباشر لقانون المتوسط التربيعي فإن:

$$Q = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{n_i}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathrm{n_1}{x_1}^2+\mathrm{n_2}{x_2}^2+n_3{x_3}^2+\mathrm{n_4}{x_4}^2}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{n_i}}}$$

$$= \sqrt{\frac{5\times9^2+9\times5^2+12\times7^2+14\times6^2}{40}}$$

$$= \sqrt{\frac{2073}{40}}$$

$$= \sqrt{51.825\ m^2}$$

$$= 7.198\ m$$

حيثQ (7.198م) هو متوسط طول الضلع و Q^2 (51.825 $م^2$) هو متوسط مساحة الغرف.

التمرين الثاني:

من أجل حل التمرين الثاني الذي يستدعي إجراء عدة حسابات نستعين بالجدول التالي:

الفئات	ni	ni ↗	Xi	ni xi	ai	ni*=ni/ai	Xi^2	$nixi^2$	$(Xi-\bar{X})$	$(Xi-\bar{X})^3$	$ni(Xi-\bar{X})^3$
[0-1[	5	5	0,5	2,5	1	5	0,25	1,25	-13,50	-2460,38	-12301,88

[1-5[	10	15	3	30	4	2,5	9	90	-11,00	-1331,00	-13310,00
[5-8[	25	40	6,5	162,5	3	8,33	42,25	1056,25	-7,50	-421,88	-10546,88
[8-12[	40	80	10	400	4	10	100	4000	-4,00	-64,00	-2560,00
[12-18[	65	145	15	975	6	10,83	225	14625	1,00	1,00	65,00
[18-23[	38	183	20,5	779	5	7,6	420,25	15969,5	6,50	274,63	10435,75
[23-30[	17	200	26,5	450,5	7	2,43	702,25	11938,25	12,50	1953,13	33203,13
∑	**200**	-	-	**2799,5**	-	-	-	**47680,25**	-	-	**4985,125**

1- متوسط كمية الغاز المستهلك من طرف الزبائن.:

بتطبيق قانون المتوسط الحسابي مباشرة نحصل على:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{2799.5}{200} = 13.99 \approx 14$$

2- كمية الغاز الوسيطية المستهلكة من طرف الزبائن (الوسيط):

رتبة الوسيط هي: $Rg_{Me} = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{200}{2} = 100$؛

إعتماداً على التكرار الصاعد فإن فئة الوسيط هي الفئة الخامسة ($i = 5$) و هي[12-18[؛

وبتطبيق القانون نحصل على قيمة الوسيط كما يلي:

$$Me = L_{i1} + \frac{Rg_{Me} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

$$= L_{51} + \frac{Rg_{Me} - n_{(4)}^{\nearrow}}{n_5} \times a_5$$

$$= 12 + \frac{100-80}{65} \times 6$$

$$= 13.84$$

3- كمية الغاز المستهلكة من طرف أكبر عدد من الزبائن (المنوال):

إن أول ما نلاحظه في هذا التمرين هو أن الفئات غير متساوية في الطول بمعنى أننا بصدد توزيع غير منتظم و هو ما يستدعي إجراء تعديل على التكرارات المطلقة عند حسابنا للمنوال. العمود السابع من الجدول أعلاه يعكس التكرارات المعدلة التي نتعامل معها في هذه الحال؛ و بملاحظتنا لقيم هذا العمود نرى أن أكبر تكرار معدل هو "10.83" الذي يقابل الفئة الخامسة (i = 5) [12-18[و عليه فإن هذه الأخيرة هي فئة المنوال، وبتطبيق قانون المنوال معتمدين على التكرارات المعدلة بدل المطلقة نحصل على قيمته كالتالي:

$$Mo = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 12 + \frac{(10.83-10)}{(10.83-10)+(10.83-7.6)} \times 6$$

$$= 13.22$$

☚ لاحظ أنه بترتيب قيم مقاييس النزعة المركزية المحصل عليها يكون لدينا:

$$Mo < Me < \bar{X}$$

و بالتالي نستنتج أن التوزيع مائل قليلاً إلى ناحية اليمين (إلتواء موجب).

4- دراسة تشتت كمية الغاز المستهلك من طرف الزبائن حول المتوسط الحسابي (معامل الإختلاف):

لحساب معامل الإختلاف و بالتالي الإجابة على السؤال الرابع علينا أن نجد أولاً قيمة الإنحراف المعياري الذي ما هو إلا الجذر التربيعي للتباين، أي $\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)}$:

☚ من أجل حساب التباين و منه الإنحراف المعياري يمكننا إستعمال سواءاً صيغة القانون الأصلي للتباين $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$ أو الصيغة الثانية $V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(n_i x_i^2)}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \bar{x}^2$ التي يمكن برهنتها كما فعلنا في السؤال النظري السابق مع الأخذ بعين الإعتبار وجود التكرارات هنا.

سوف نستعمل الصيغة الثانية لأنها، في نظرنا، مختصرة و تساعد أحسن في عملية الحساب:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{47680.25}{200} - (14)^2}$$

$$= \sqrt{42.40125}$$

$$= 6.51$$

و بالتالي فإن معامل الإختلاف سوف يساوي:

$$C.V = \frac{\sigma_{(x)}}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{6.51}{14} \times 100$$

$$= 0.4651 \times 100$$

$$= 46.51\%$$

و حيث أن قيمة هذا المعامل أكبر من 35% فإنه يمكن القول أن بيانات هذا التوزيع مشتتة.

5- حساب معامل إلتواء فيشر:

$$\gamma_F = \frac{m_3}{\sigma^3_{(x)}}$$

حيث: - m_3 : العزم الثالث حول المتوسط الحسابي؛

- σ: الإنحراف المعياري.

علينا إذن أن نجد أولاً العزم الثالث حول المتوسط الحسابي و هو:

$$m_3(\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^3}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{4985.125}{200} = 24.9256$$

إذن: $\gamma_F = \frac{\mathrm{m}_3}{\sigma^3_{(x)}} = \frac{24.9256}{(6.51)^3} = 0.0902 > 0$

و بما أن إشارة هذا المعامل موجبة فإننا نستنتج أن إلتواء التوزيع موجب بمعنى مائل قليلاً إلى ناحية اليمين و هو ما يؤكد الإستنتاج السابق عند مقارنتنا لمقاييس النزعة المركزية.

الموضوع السادس

التمرين الأول:

- نعتبر المتغيرين الإحصائيين x و y حيث: y=ax+b .
  - برهن أن: أ- $\bar{y} = a\bar{x} + b$ و $V(y) = a^2V(x)$
- إذا فرضنا أن $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ، $\bar{y} = 13$ و $V(y) = 18$
  - أحسب كل من العددين الحقيقيين a و b.

التمرين الثاني:

بلد مقسم إلى عدة مناطق تحتوي على: 40٪، 25٪، و 35٪ من مجموع السكان الإجمالي.

الكثافة السكانية للكم2 و لكل منطقة على التوالي: 450، 160 و 300.

- ماهي الكثافة السكانية المتوسطة لهذا البلد؟

التمرين الثالث:

يمثل الجدول التالي حجم المبيعات لـ 25 شركة بملايين الدولارات خلال سنة كاملة:

حجم المبيعات ($\$10^6$)	]100-50]	]125-100]	]150-125]	]175-150]	175 و أكثر
عدد الشركات	3	5	n_3	n_4	7

1. أوجد قيمة المجهولين n_3 و n_4 علما أن حجم المبيعات الوسيطي هو Me = 152.08.
2. أحسب عدد الشركات التي كان حجم المبيعات لديها على الأكثر 120. $\$10^6$
3. حدد شكل هذا التوزيع باستعمال مقاييس النزعة المركزية.
4. أحسب تشتتحجم المبيعات حول المتوسط الحسابي ثم علل إجابتك.
5. تأكد من نتيجة السؤال الثالث باستعمال مقياس فيشر للإلتواء.
6. ماهو المقياس الذي يؤكد نتيجة السؤال الرابع و لماذا (بدون حساب).

حل الموضوع السادس

التمرين الأول:

- البراهين:

  - $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[ax_i+b]}{N}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} ax_i+\sum_{i=1}^{n} b}{N}$$

$$= \frac{a\sum_{i=1}^{n} x_i}{N} + \frac{Nb}{N}$$ [تذكر أن: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}$]

$$= a\overline{x} + b$$

و هو المطلوب.

  - $V(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}{n}$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}[(ax_i \pm b)-(a\overline{x} \pm b)]^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}[ax_i \pm b - a\overline{x} \mp b]^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}[ax_i - a\overline{x}]^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}[a(x_i-\overline{x})]^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} a^2(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

$$= \frac{a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

$$= a^2V(x)$$

و هو المطلوب.

- حساب كل من العددين الحقيقيين a و b علماً أن $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ، $\bar{y} = 13$ و $V(y) = 18$

لنقوم بحساب متوسط و تباين المتغير Xi:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{0+1+2+3+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$v(x) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{(0)^2+(1)^2+(2)^2+(3)^2+(4)^2}{5} - (2)^2$$

$$= 2$$

من البرهانين السابقين لدينا من جهة:

$$v(y) = a^2 v(x) \Leftrightarrow 18 = a^2 2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{18}{2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \pm\sqrt{9} = \pm\mathbf{3}$$

و من جهة أخرى:

$$\bar{y} = a\bar{x} + b \Leftrightarrow 13 = a2 + b$$

$$\Leftrightarrow 13 = (\pm 3 \times 2) + b$$

$$\Leftrightarrow 13 = \pm 6 + b$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{b} = \begin{cases} \mathbf{7} & (a = 3) \\ \mathbf{19} & (a = -3) \end{cases}$$

التمرين الثاني:

بما أن الكثافة السكانية للمناطق الأربعة مختلفة فإننا سوف نستعمل المتوسط التوافقي في حساب متوسط الكثافة السكانية:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n_i}{x_i}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i}{x_i}\right)}$$

$$= \frac{0.4+0.25+0.35}{\frac{0.4}{450}+\frac{0.25}{160}+\frac{0.35}{300}}$$

$$= 276.39$$

التمرين الثالث:

الجدول التالي يتضمن نتائج مختلف العليات الحسابية التي نحتاج إليها في عملية الحل بما فيها قيم المجاهيل و طريقة إيجاد هذه المجاهيل مبينة في الحل تحت الجدول حسب السؤال.

الفئات	ni	ni ↗	Xi	ni xi	ai	ni*=ni/ai	Xi^2	$nixi^2$	$(Xi-\bar{X})$	$(Xi-\bar{X})^3$	$ni(Xi-\bar{X})^3$
[50-100[	3	3	75	225	50	0,06	5625	16875	-70,00	-343000,00	-1029000,00
[100-125[	5	8	112,5	562,5	25	0,2	12656,25	63281,25	-32,50	-34328,13	-171640,63
[125-150[	4	12	137,5	550	25	0,16	18906,25	75625	-7,50	-421,88	-1687,50
[150-175[	6	18	162,5	975	25	0,24	26406,25	158437,5	17,50	5359,38	32156,25
[175-200[	7	25	187,5	1312,5	25	0,28	35156,25	246093,75	42,50	76765,63	537359,38
$\sum$	**25**	-	-	**3625**	-	-	-	**560312,5**	-	-	**-632812,50**

1- إيجاد التكرارين المجهولين n_3 و n_4 علما أن حجم المبيعات الوسيطي هو Me = 152.08:

هذه القيمة 152.08 تقع داخل الفئة الرابعة ($152.08 \in [150 - 175[$)، و بالتالي

فإن هذه الفئة [150-175[هي فئة الوسيط.

رتبة الوسيط هي :

$$Rg_{M_e} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

و من خلال تطبيق قانون الوسيط:

$$M_e = L_{i1} + \frac{Rg_{M_e} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

حيث:

- M_e : الوسيط ؛
- L_{i1} : الحد الأدنى لفئة الوسيط؛
- Rg_{M_e} : رُتبةالوسيط 12.5 ؛
- $n_{(i-1)}^{\nearrow}$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق فئة الوسيط؛
- n_i : التكرار المطلق لفئة الوسيط؛
- a_i : طول فئة الوسيط.

سوف نحصل على المعادلة الأولى كما يلي:

$$M_e = L_{41} + \frac{Rg_{M_e} - n_3^{\nearrow}}{4} \times 4$$

$$\Leftrightarrow 152.08 = 150 + \frac{12.5 - (8 + n_3)}{n_4} \times 25$$

$$\Leftrightarrow (152.08 - 150) \times n_4 = 112.5 - 25n_3$$

$$\Leftrightarrow 2.08n_4 + 25n_3 = 112.5 \ldots\ldots..(I)$$

أما المعادلة الثانية فنحصل عليها بمعرفتنا أن مجموع التكرارات هو 25، أي:

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = 25 \Leftrightarrow 15 + n_3 + n_4 = 25$$

$$\Leftrightarrow n_3 + n_4 = 25 - 15$$

$$\Leftrightarrow n_3 + n_4 = 10 \ldots\ldots\ldots (II)$$

من هذه المعادلة (II) نستخرج أحد المجهولين بدلالة الآخر، و ليكن: $n_3 = 10 - n_4$ ، و

نعوضه في المعادلة (I) نجد:

$$(I) \Leftrightarrow 2.08n_4 + 25n_3 = 112.5$$

$$\Leftrightarrow 2.08n_4 + 25(10 - n_4) = 112.5$$

$$\Leftrightarrow 2.08n_4 + 250 - 25n_4 = 112.5$$

$$\Leftrightarrow 137.5 = 22.92\, n_4$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{n_4} = \frac{137.5}{22.92} = \mathbf{5.9999} \approx \mathbf{6}$$

و منه $\boldsymbol{n_3} = 10 - 6 = \mathbf{4}$

2- عدد الشركات التي كان حجم المبيعات لديها على الأكثر 120. $\$10^6$:

- فئة 120 هي الفئة الثانية (i=2) $120 \in [100 - 125[$ و نجد العدد كما يلي:

$$\left.\begin{array}{l} [100 - 125[:\ a_i = 25 \rightarrow n_i = 5 \\ [100 - 120[:\ a_i = 20 \rightarrow n_i = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{20 \times 5}{25} = 4$$

و بالتالي فإن العدد المطلوب سوف يساوي هذه القيمة مضافاً إليها ما يسبقها من تكرارات، أي:

$$Rg_{120} = 3 + 4 = 7$$

و هذا يعني أن هناك سبعة شركات كان حجم المبيعات لديها لا يزيد عن 120. $10^6$$.

3- شكل منحنى هذا التوزيع بإستعمال مقاييس النزعة المركزية.

لتحديد شكل التوزيع بقي لنا حساب قيم كل من المتوسط الحسابي و المنوال لأن قيمة الوسيط معطاة في المعطيات.

- المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{3625}{25} = 145 \times 10^6 \$$$

- المنوال:

نلاحظ أن الفئات غير متساوية في الطول و هو ما يستدعي إجراء تعديل على التكرارات المطلقة عند حسابنا للمنوال. و بملاحظتنا لقيم عمود التكرارات المعدلة نرى أن أكبر تكرار معدل هو "0.28" الذي يقابل آخر فئة]175-200] و عليه فإن هذه الأخيرة هي فئة المنوال، وبتطبيق قانون المنوال معتمدين على التكرارات المعدلة بدل المطلقة نحصل على قيمته كالتالي:

$$Mo = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 175 + \frac{(0.28-0.24)}{(0.28-0.24)+(0.28-0)} \times 25$$

$$= 178.125 \times 10^6\$$$

بترتيب قيم هذه المقاييس يكون لدينا $\bar{X} < Me < Mo$ و بالتالي نستنتج أن التوزيع مائل إلى ناحية اليسار (إلتواء سالب).

4- حساب تشتت حجم المبيعات حول المتوسط الحسابي و التعليل:

لحساب معامل الإختلاف و بالتالي الإجابة على السؤال الرابع علينا أن نجد أولاً قيمة الإنحراف المعياري الذي ما هو إلا الجذر التربيعي للتباين، أي $\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)}$:

☚ من أجل حساب التباين و منه الإنحراف المعياري يمكننا إستعمال سواءاً صيغة القانون الأصلي للتباين $\boldsymbol{V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}}$ أو الصيغة الثانية $\boldsymbol{V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(n_i x_i^2)}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \bar{x}^2}$.

سوف نستعمل كالعادة الصيغة الثانية لأنها، في نظرنا، مختصرة و تساعد أحسن في عملية الحساب:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{560312.5}{25} - (145)^2}$$

$$= \sqrt{1387.5}$$

$$= 37.249$$

و بالتالي فإن معامل الإختلاف سوف يساوي:

$$C.V = \frac{\sigma_{(x)}}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{37.249}{145} \times 100$$

$$= 0.4651 \times 100$$

$$= 25.68\%$$

و حيث أن قيمة هذا المعامل أصغر من 35% فإنه يمكن القول أن بيانات هذا التوزيع قليلة التشتت.

5- التأكد من نتيجة السؤال الثالث باستعمال مقياس فيشر للإلتواء.

معامل فيشر للإلتواء هو :

$$\gamma_F = \frac{m_3}{\sigma^3_{(x)}}$$

حيث: - m_3 : العزم الثالث حول المتوسط الحسابي؛

- σ: الإنحراف المعياري.

علينا إذن أن نجد أولاً العزم الثالث حول المتوسط الحسابي و هو:

$$m_3(\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x})^3}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{-632812.5}{25} = -25312.5$$

إذن: $\gamma_F = \frac{m_3}{\sigma^3_{(x)}} = \frac{-25312.5}{(37.249)^3} = -0.4897 < 0$

و بما أن إشارة هذا المعامل سالبة (طالما أن إشارة العزم الثالث هي سالبة) فإننا نستنتج أن إلتواء التوزيع سالب بمعنى مائل إلى ناحية اليسار مما يؤكد الإستنتاج السابق عند مقارنتنا لمقاييس النزعة المركزية.

6- المقياس الذي يؤكد نتيجة السؤال الرابع و لماذا (بدون حساب).

المقياس الذي يؤكد نتيجة السؤال الرابع هو أحد مقاييس التفرطح سواءاً لفيشر أو لبيرسون حيث نجده، بعد حسابنا له، يُشير إلى أن التوزيع متطاول في هذا التمرين مما يدل في الأخير على أن البيانات قليلة التشتت و بالتالي يؤكد نتيجة السؤال الرابع.

الموضوع السابع

التمرين الأول:

إن المتوسط العام لأجور العمال في مؤسسة معينة هو 7000 دج، فإذا علمت أن متوسط أجور العمال الذكور هو 8000 دج و متوسط أجور العمال الإناث هو 6500 دج و أن مجموع عمال هذه المؤسسة هو 270 عاملاً.

- فما هو عدد العمال الذكور و عدد العمال الإناث؟

التمرين الثاني:

قطعت سيارة مسافة 145كم مابين مدينة ① و مدينة ② بسرعة متوسطة قدرها 90كم/سا؛ ثم قطعت مسافة 100كم مابين المدينة ② و مدينة ③ بسرعة قدرها 70كم/سا.

- أحسب متوسط السرعة المقطوعة ما بين المسافتين.

التمرين الثالث:

أراد مدير مصلحة الضرائب معرفة مقدار المبالغ الضريبية المفروضة على التجار و للقيام بذلك سحب عينة عشوائية مكونة من 70 تاجر متواجدين بمنطقة معينة ثم قام بتدوين الضرائب السنوية المدفوعة من طرفهم في الجدول التالي:

مبلغ الضرائب (10^2دج)	[5-10[	[10-14[	[14-16[	[16-20[	[20-25[
عدد التجار	12	5	10	8	35

1- حدد شكل منحنى هذا التوزيع باستعمال مقاييس النزعة.

2- أدرس تشتت مبالغ الضرائب التي تحملها التجار حول المتوسط الحسابي بحساب معامل الإختلاف ثم علل(ي) إجابتك(ي).

3- تحقق من شكل هذا التوزيع بحساب مقياس فيشر للإلتواء.

4- أحسب عدد التجار الذين بلغ المبلغ الضريبي المدفوع من طرفهم على الأكثر 1500دج.

حل الموضوع السابع

التمرين الأول:

نُلخص معطيات التمرين في الجدول التالي:

	عدد العمال nj	المتوسط $\bar{x}_j$	المتوسط العام
الذكور	n1=?	8000	7000
الإناث	n2=?	6500	
المجموع	270	/	/

- $n_1= ?$ $n_2= ?$

لدينا من المعطيات:

- $n_1 + n_2 = 270 \Rightarrow n_2 = 270 - n_1$ 1

- $\bar{X}$ (المعدل العام) $= \frac{\sum_{j=1}^{2} n_j \bar{x}_j}{\sum_{j=1}^{2} n_j} = \frac{(n_1 \times \bar{x}_1)+(n_2 \times \bar{x}_2)}{n_1 + n_2} = 7000$

$$\Leftrightarrow \frac{8000\, n_1 + 6500 n_2}{270} = 7000$$

$$\Leftrightarrow 8000\, n_1 + 6500 n_2 = (270) \times (7000)$$

$$\Leftrightarrow 8000\, n_1 + 6500 n_2 = 1890000 \quad ....2$$

و بتعويض المعادلة 1 في 2 يصبح لدينا مجهول واحد في المعادلة كما يلي:

$$8000\, n_1 + 6500(270 - n_1) = 1890000$$

$$\Leftrightarrow 8000\, n_1 + 1755000 - 6500 n_1 = 1890000$$

$$\Leftrightarrow 1500 n_1 = 1890000 - 1755000$$

$$\Leftrightarrow 1500 n_1 = 135000$$

$$\Leftrightarrow n_1 = \frac{135000}{1500} = \mathbf{90}$$

و منه فإن:

$$n_2 = 270 - 90 = \mathbf{180}$$

و بالتالي فإن عدد العمال الذكور هو 90، وعدد العمال الإناث هو 180.

التمرين الثاني:

لحساب متوسط السرعة المقطوعة نستعمل المتوسط التوافقي:

التمرين الثالث:

الفئات	ni	ni ↗	Xi	ni xi	ai	ni*=ni/ai	Xi2	nixi2	$(Xi - \bar{X})$	$(Xi - \bar{X})^3$	$ni(Xi - \bar{X})^3$
[5-10[	12	12	7,5	90	5	2,4	56,25	675	-10,09	-1027,24	-12326,92
[10-14[	5	17	12	60	4	1,25	144	720	-5,59	-174,68	-873,38
[14-16[	10	27	15	150	2	5,00	225	2250	-2,59	-17,37	-173,74
[16-20[	8	35	18	144	4	2	324	2592	0,41	0,07	0,55
[20-25[	35	70	22,5	787,5	5	7,00	506,25	17718,75	4,91	118,37	4142,98
$\sum$	**70**	-	-	**1231,5**	-	-	-	**23955,75**	-	-	**-9230,52**

1- شكل منحنى التوزيع باستعمال مقاييس النزعة المركزية:

علينا أولاً أن نجد قيمة هذه المقاييس حتى نتمكن من المقارنة بينها و تحديد شكل المنحنى.

- المتوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{1231.5}{70} = 17.59$$

- الوسيط:

رتبة الوسيط هي: $Rg_{Me} = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{70}{2} = 35$؛

إعتماداً على التكرار الصاعد فإن فئة الوسيط هي الفئة الرابعة (i = 4) و هي]16-20]؛

وبتطبيق القانون نحصل على قيمة الوسيط كما يلي:

$$Me = L_{i1} + \frac{Rg_{Me} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

$$= L_{41} + \frac{Rg_{Me} - n_{(3)}^{\nearrow}}{n_4} \times a_4$$

$$= 16 + \frac{35-27}{8} \times 4$$

$$= 20$$

☚ بما أن رتبة الوسيط 35 موجودة في عمود التكرار الصاعد فبمقدورنا أن نأخذ الوسيط مباشرة على أنه الحد الأعلى للفئة المقابلة و هو 20 مثلما تؤكده النتيجة المحصل عليها حسابياً.

- المنوال

الفئات غير متساوية في الطول بمعنى أننا بصدد توزيع غير منتظم و هو ما يستدعي إجراء تعديل على التكرارات المطلقة عند حسابنا للمنوال. العمود السابع من الجدول أعلاه يعكس التكرارات المعدلة التي نتعامل معها في هذه الحال؛ و بملاحظتنا لقيم هذا العمود نرى أن أكبر تكرار معدل هو "7" الذي يقابل الفئة الخامسة (i = 5)]20-25]، و عليه

فإن هذه الأخيرة هي فئة المنوال، وبتطبيق قانون المنوال معتمدين على التكرارات المعدلة بدل المطلقة نحصل على قيمته كالتالي:

$$Mo = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 20 + \frac{(7-2)}{(7-2)+(7-0)} \times 5$$

$$= 22.08$$

فبترتيب قيم هذه المقاييس يكون لدينا $\bar{X} < Me < Mo$ و بالتالي نستنتج أن التوزيع مائل إلى ناحية اليسار (إلتواءسالب).

2- دراسة تشتت مبالغ الضرائب التي تحملها التجار حول المتوسط الحسابي بحساب معامل الإختلاف و تعليل الإجابة:

نجد أولاً قيمة الإنحراف المعياري الذي ماهو إلا الجذر التربيعي للتباين، أي $\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)}$:

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \bar{x}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{23955.75}{70} - (17.59)^2}$$

$$= \sqrt{3271.63}$$

$$= 5.71$$

و بالتالي فإن معامل الإختلاف سوف يساوي:

$$C.V = \frac{\sigma_{(x)}}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{5.71}{17.59} \times 100$$

$$= 0.3251 \times 100$$

$$= 32.51\%$$

و حيث أن قيمة هذا المعامل أقل بقليل من 35% فإنه يمكن القول أن بيانات هذا التوزيع معتدلة نوعا ما.

3- التحقق من شكل هذا التوزيع بحساب مقياس فيشر للإلتواء.

$$\gamma_F = \frac{m_3}{\sigma^3_{(x)}}$$

حيث: - m_3 : العزم الثالث حول المتوسط الحسابي؛

- σ: الإنحراف المعياري.

علينا إذن أن نجد أولاً العزم الثالث حول المتوسط الحسابي و هو:

$$m_3(\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x})^3}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{-9230.52}{70} = -131.86$$

إذن: $\gamma_F = \frac{m_3}{\sigma^3_{(x)}} = \frac{-131.86}{(5.71)^3} = -0.70 > 0$

و بما أن إشارة هذا المعامل سالبة فإننا نستنتج أن إلتواء التوزيع سالبكما سبق إستنتاج ذلك عند مقارنتنا لمقاييس النزعة المركزية.

4- عدد التجار الذين بلغ المبلغ الضريبي المدفوع من طرفهم على الأكثر 1500دج.

- فئة15 هي الفئة الثالثة (i=3) $15 \in [14-16[$ و نجد العدد كما يلي:

$$\left.\begin{array}{r} [14-16[:\ a_i = 2 \rightarrow n_i = 10 \\ [14-15[:\ a_i = 1 \rightarrow n_i = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1 \times 10}{2} = 5$$

و بالتالي فإن العدد المطلوب سوف يساوي هذه القيمة مضافاً إليها ما يسبقها من تكرارات، أي:

$$Rg_{1500} = 12 + 5 + 5 = 22$$

و هذا يعني أن هناك 22 تاجراً بلغ المبلغ الضريبي المدفوع من طرفهم 1500دج على الأكثر.

☚ لاحظ هنا أنه مادام القيمة 15 تقع في منتصف الفئة (مركز الفئة) فإنه يمكن أخذ مباشرة نصف التكرارات المقابلة لهذه الفئة (10 مقسوما على 2) مباشرة مضافاً إلى ذلك ما سبقها من تكرارات.

الموضوع الثامن

التمرين الأول:

لتكن المعلومات التالية عن توزيع تكراري متماثل (متناظر) لأجور 100 عائلة حيث:

$$\sigma_{(x)} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 = 2500$$

- أحسب كل من المنوال و الوسيط.

التمرين الثاني:

لدينا مجموعة من الأفراد ذوي دخل سنوي متوسط قدره 150000 دج بانحراف معياري قدره 4000 دج.

1- أرادت مصلحة مختصة إقتطاع ضريبة متساوية سنوياً مقدارها 20000 دج و هذا لكل فرد؛ فما هو الدخل السنوي المتوسط و الإنحراف المعياري الناتج سنوياً بعد إقتطاع الضريبة؟

2- نظراً لإختلاف الدخل بالنسبة لهؤلاء الأفراد قررت المصلحة المختصة إقتطاع نسبة معينة بدلاً من ضريبة متساوية من الدخل السنوي تقدر بـ 2٪ لكل فرد.

- فما هو الدخل السنوي المتوسط و الإنحراف المعياري الناتج سنوياً في هذه الحالة؟

التمرين الثالث:

في مؤسسة إنتاجية نهتم بعدد القطع المصنوعة من طرف كل عامل و لهذا الغرض نختار عينة مكونة من 100 عامل، النتائج المحصل عليها ملخصة في الجدول المقابل:

القطع المصنوعة	]14-10]	]18-14]	]22-18]	]26-22]	]30-26]	]34-30]
عدد العمال	20	35	28	05	07	05

1- حدد شكل التوزيع باستعمال مقاييس النزعة.

2- نعتبر الصيغة الرياضية للعزم كما يلي:

$$m_r = \sum f_i(x_i - \overline{x})^r$$

- أحسب هذه الصيغة عندما : (r = 0 ,1)،

- ماذا تمثل هذه الصيغة عندما : r =2 ، وقم بحسابها.

3- أدرس تشتت التوزيع من خلال حساب معامل الإختلاف (CV) ثم فسر النتيجة.

4- تأكد من شكل التوزيع المحصل عليه في السؤال الأول باستعمال معامل Fisher للإلتواء.

حل الموضوع الثامن

تمرين 01:

حسب معطيات التمرين: منحنى متماثل يعني [$\bar{X}$ =Me=M$_o$] ،

$N=100$ ،$\Sigma nixi^2 = 2500$ ،$\sigma(x)= \sqrt{V(x)} = 3$

لدينا:

$V(x)=\frac{\sum_{i=1}^{5}(ni.xi^2)}{\sum_{i=1}^{5} ni} - \bar{X}^2 = 9$ يعني أن :

$$\frac{\sum_{i=1}^{5}(ni.xi^2)}{\sum_{i=1}^{5} ni} - V(x) = \bar{X}^2 \Leftrightarrow \frac{2500}{100} - 9 = \bar{X}^2$$

$$\Leftrightarrow 16 = \bar{X}^2$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} = 4$$

إذن: $\bar{X} = Me = M_o = 4$

تمرين 02:

$\bar{X}$= 150000 DA, $\sigma_{(x)}$ = 4000 DA,

1. حساب الدخل السنوي المتوسط و الإنحراف المعياري السنوي بعد اقتطاع الضريبة متساوية قدرها 20000.

1.1 الدخل السنوي المتوسط [$\bar{Y}$]

$Y_i = x_i \pm a \leftrightarrow \bar{Y} = \bar{X} \pm a$ خاصية

فإذا كان xi هو الأجر الفرد، a هو الضريبة المقتطعة من كل أجر، و yi هو أجر كل فرد بعد اقتطاع الضريبة فإن:

$$\bar{Y} = \bar{X} - a = (150000) - (20000) = 130000DA$$

2.1 الإنحراف المعياري الناتج سنوياً $[\sigma_{(y)}]$ خاصية: $V(\boldsymbol{x_i} \pm \boldsymbol{a}) = V(\boldsymbol{x_i})$

فإذا كان $V(y)$ هو التباين بعد الاقتطاع، فإن:

$$V(y) = V(x_i - a) = V(x)$$

إذن: $\sigma_{(y)} = \sigma(x) = 4000$

2. حساب الدخل السنوي المتوسط و الإنحراف المعياري السنوي بعد اقتطاع نسبة من الضريبة قدرها 2٪.

1.2 الدخل السنوي المتوسط $[\bar{S}]$ خاصية $\boldsymbol{\bar{S} = \alpha.\bar{X}} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{S_i = \alpha.X_i}$

فإذا كان $0.02x_i$ هو الاقتطاع فإن:

$$Si = X_i - 0.02x_i = (1- 0.02)\, xi = 0.98\, x_i$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\bar{S} = \alpha.\bar{X}} = 0.98.\ 150000 = 147000\ DA.$$

2.2 الإنحراف المعياري الناتج سنوياً $[\sigma_{(y)}]$ خاصية:

$$V(\boldsymbol{a.x_i}) = a^2.\ V(\boldsymbol{x_i}) \ ,\ \sigma(\boldsymbol{a.x_i}) = a.\ \sigma(\boldsymbol{x_i})$$

$$V(S) = V(a.x) = V(0.98.x) = (0.98)^2.V(x)$$

$$\sigma(\boldsymbol{S_i}) = \sqrt{(0.98)^2\ .\ V(x)} = (0.98).\ \sigma(x) = (0.98).4000 = 3920DA$$

تمرين 03:

$ni(x_i-\bar{X})^3$	$(x_i-\bar{X})^3$									
-5145	-257.25	-6.36	2880	144	20	240	0.2	12	20	14-10
-460	-13.14	-2.36	8960	256	55	560	0.15	16	35	18-14
123.48	4.41	1.64	11200	400	83	560	0.35	20	28	22-18
897	179.40	5.64	2880	576	88	120	0.18	24	05	26-22
6270.88	895.84	9.64	5488	784	95	196	0.07	28	07	30-26
12688.55	2537.71	13.64	5120	1024	100	160	0.05	32	05	34-30
14374.91	/	/	**36528**	/	/	**1836**	**1**	/	**100**	**مجموع**

1. تحديد شكل إلتواء هذا التوزيع باستعمال مقاييس النزعة المركزية:

1.1 حساب عدد القطع المصنوعة المتوسطة:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(ni.xi)}{\sum_{i=1}^{6} ni} = \frac{1836}{100} = 18.36$$

2.1 حساب عدد القطع المصنوعة الوسيطية:

حساب الوسيط: رتبة الوسيط هي $Rg_{Me}=\frac{100}{2}=50$ ؛ إذن الفئة الوسيطية هي [14-18[،

$$Me = L + \frac{Rg_{Me} - N_{i-1}}{n_i}.a_i$$

$$= 14 + \frac{50-20}{35}.4 = 17.42$$

3.1حساب عدد القطع المصنوعة من طرف أكبر عدد من العمال إذن المطلوب هو المنوال:

الفئة التي يقابلها أكبر تكرار هي [14- 18[

$$M_o = L + \frac{d1}{d1+d2}.a_i$$

$$= 14 + \frac{(35-20)}{(35-20)+(35-28)} \cdot 4$$

$$=16.72$$

باستعمال مقاييس النزعة المركزية: $[\bar{X}>Me>M_0]$ إذا إلتواء موجب للمنحنى ناحية اليمين

2. حساب الصيغة الرياضية للعــزم عندما (r = 0,1,2)

عند r=0:
$$m_r = \sum fi(x_i - \bar{x})^0 = 1$$

عند r=1
$$m_r = \sum fi(x_i - \bar{x})^1 = 0$$

لأن :
$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

عند r=2
$$m_r = \sum fi(x_i - \bar{x})^2 = V(x)$$

-حساب التباين:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{6}(ni.xi^2)}{\sum_{i=1}^{6} ni} - \bar{X}^2$$

$$= \frac{36528}{100} - (18.36)^2$$

$$= 28.19$$

3. دراسة تشتت التوزيع حول المتوسط الحسابي

1.3 حسابالإنحراف المعياري:
$$\sigma(x)= \sqrt{\boldsymbol{V(x)}} = \sqrt{28.19} = 5.309$$

2.3 حساب معامل الإختلاف:
$$CV = \frac{\boldsymbol{\sigma(x)}}{\bar{\boldsymbol{X}}} = \frac{5.309}{18.36} = 0.2891\ (28.91\%)$$

الإستنتاج: بما أن نتيجة معامل الاختلاف أصغر من 35 ٪ إذن البيانات قليلة التشتت.

4. معامل الالتواءFisher:

$$\alpha F = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{143.7491}{149.6367} = 0.960$$

حساب العزم الثالث: $m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{6}(ni.(xi-\bar{X})^3)}{\sum_{i=1}^{6} ni} = \frac{14374.91}{100} = 143.7491$

(هو الذي يحدد إشارة الإلتواء)

الإستنتاج: بما أن قيمة الإلتواء أكبر من 0 إذا الإلتواء موجب و التوزيع مائل إلى ناحية اليمين و هو ما يؤكد النتيجة المحصل عليها في السؤال الأول.

الموضوع التاسع

التمرين الأول:

1- برهن أن: $\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{N}=\frac{\sum(x_i)^2}{N}-(\bar{x})^2$

2- نعتبر المتغير $y_i=\frac{x_i-\bar{x}}{\delta_x}$ ، حيث $\bar{x}$ يمثل المتوسط الحسابي ، و $\delta(x)$ يمثل الانحراف المعياري.

المطلوب: برهن أن $\overline{y_i}=0$

$V(y)=(\delta^2)_y=1$

التمرين الثاني:

أراد مدير مصلحة الضرائب معرفة مقدار المبالغ الضريبية المفروضة على التجار وللقيام بذلك سحب عينة عشوائية مكونة من 70 تاجر متواجدين بمنطقة معينة ثم قام بتدوين الضرائب السنوية المدفوعة من طرفهم في الجدول التالي:

مبلغ الضرائب (10^2 دج)	]10,5]	]14,10]	]16,14]	]20,16]	]25,20]
عدد التجار	12	5	10	8	35

1. حدد شكل منحنى هذا التوزيع باستعمال مقاييس النزعة المركزية.
2. أدرس تشتت مبالغ الضرائب التي تحملها التجار حول المتوسط الحسابي $\bar{x}$ بحساب معامل الاختلاف (CV) ثم علل(ي) إجابتك(ي).
3. تحقق من شكل هذا التوزيع بحساب مقياس فيشر للإلتواء.
4. أحسب عدد التجار الذين بلغ المبلغ الضريبي المدفوع من طرفهم على الأكثر 1500دج.

حل الموضوع التاسع

التمرين الأول:

-1

$$\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{N}=\frac{\sum\left(x^2+\overline{x}^2-2xi\bar{x}\right)}{N}$$

$$=\frac{\sum x_i^{\ 2}+\sum\overline{X}^2-2\overline{X}\sum xi}{N}$$

$$=\frac{\sum x_i^{\ 2}}{N}+\overline{X}^2-2\overline{X}^2$$

$$=\frac{\sum(x_i)^2}{N}-(\bar{x})^2$$

-2

$$\overline{Y}=\frac{\sum y_i}{N}=\frac{1}{N}\frac{\sum(x_i-\bar{x})}{\delta(x)}=0$$

لأن: $\sum(x_i-\bar{x})=0$

$$v(y)=\frac{\sum\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{N}=\frac{\sum(y_i)^2}{N}-(\bar{y})^2$$

$$=\frac{\sum(y_i)^2}{N}$$

$$=\frac{1}{N}\sum\left(\frac{\left(x_i-\bar{x}\right)}{\delta(x)}\right)^2$$

$$=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{\delta^2(x)}.\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{v(x)}.\frac{\sum\left(xi-\bar{x}\right)^2}{N}$$

$$=\frac{v(x)}{v(x)}=1$$

التمرين الثاني:

$n_i(x_i-\bar{X})^3$	$(x_i-\bar{X})^3$				ai	N_i↗	$n_i.x_i$	x_i	n_i	ci
-12326.916	-1027.243	675	56.25	2.4	05	12	90	7.5	12	10 -5
-873.38	-174.676	720	144	1.25	04	17	60	12	05	14 -10
-173.73	-17.373	2250	225	05	02	27	150	15	10	16 -14
0.551368	0.068921	2592	324	02	04	35	144	18	08	20 -16
4142.95	118.370	17718.75	506.25	07	05	70	787.5	22.5	35	25 -20
-9230.5246	**-1100.8530**	**23955.75**	**1255.5**	/	/	/	**1231.5**	/	**70**	المجموع

1. تحديد شكل إلتواء هذا التوزيع باستعمال مقاييس النزعة المركزية:

1.1 حساب المبالغ الضريبية المتوسطة:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(ni.xi)}{\sum_{i=1}^{5} ni} = \frac{1231.5}{70} = 17,59.10^2 \text{ DA}$$

2.1 حساب المبالغ الضريبية الوسيطية: (حساب الوسيط)

رتبة الوسيط هي $Rg_{Me}=\frac{70}{2}=35$ إذن الفئة الوسيطية هي [16-20] وبالتالي:

$$Me = L + \frac{Rg_{Me} - N_{i-1}↗}{n_i}.a_i$$

$$= 16 + \frac{35-27}{08}.4 = 20.10^2 \text{ DA}$$

3.1 حساب المبالغ الضريبية المفروضة على أكبر عدد من التجار (المنوال):

- الفئة التي يقابلها أكبر تكرار معدل هي [20- 25[إذن:

$$M_o = L + \frac{d1}{d1+d2}.a_i$$

$$= 20 + \frac{(7-2)}{(7-2)+(7-0)} . 5$$

$$= 22,08.10^2 \text{ DA}$$

باستعمال مقاييس النزعة المركزية [$\bar{X}$<Me<M_o] إذن إلتواء سالب للمنحنى ناحية اليسار.

2. دراسة تشتت مبالغ الضرائب التي تحملها التجار حول المتوسط الحسابي

1.2 حساب التباين:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{5}(ni.xi^2)}{\sum_{i=1}^{5} ni} - \bar{X}^2$$

$$= \frac{23955.75}{70} - (17.59)^2$$

$$= 32.8169.10^2 \text{ DA}$$

2.2 حساب الإنحراف المعياري:

$$= 5,728 \quad .10^2 \text{ DA}$$

3.2 حساب معامل الإختلاف:

$$CV = \frac{\sigma(x)}{\bar{X}} = \frac{5.728}{17.59} = 0.3256 \ (32.56\%)$$

الإستنتاج: بما أنها أصغر من 35 ٪ إذا البيانات قليلة التشتت.

3. معامل إلتواءFisher:

$$\alpha F = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{-131.8646}{187.93558} = -0.7016$$

حساب العزم الثالث:

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(ni.(xi-\bar{X})^3)}{\sum_{i=1}^{5} ni} = \frac{-9230.5246}{70} = -131.8646$$

(هو الذي يحدد إشارة الإلتواء)

الإستنتاج: بما أن قيمة الإلتواء أصغر من 0 إذن الإلتواء سالب ناحية اليسار و هو ما يؤكد النتيجة المحصل عليها في السؤال الأول.

4. حساب عدد التجار الذين بلغ المبلغ الضريبي المدفوع من طرفهم على الأكثر 1500دج:

لتكن x عدد التجار الذي بلغ المبلغ الضريبي المدفوع من طرفهم على الأكثر 1500دج

$$X=17+\alpha$$

$$\alpha \in]16 \quad -14]$$

$$\begin{cases} 16-14 \rightarrow ai=2 \rightarrow ni=10 \\ 15-14 \rightarrow ai=1 \rightarrow ni=\alpha \end{cases}$$

$$\alpha=5$$

و بالتالي فإن عدد التجار الذين بلغ المبلغ الضريبي المدفوع من طرفهم على الأكثر 1500دج هو17+ 5 = 22 تاجر.

الموضوع العاشر

التمرين 01:

الجدول التالي يبيّن توزيع 180 عامل حسب أجورهم الشهرية في إحدى المؤسسات- الوحدة 1000 دج- .

الأجور	عدد العمال
[15-20[	15
[20-30[	55
[30-45[	40
[45-55[	35
[55-60[	20
[60-80[	15
$\sum$	180

1- أحسب متوسط أجر هؤلاء العمال.

2- أوجد قيمة الأجر الذي يتقاضاه أكبر عدد من العمال، و استنتج جهة إلتواء التوزيع (شكل الإلتواء).

3- أوجد عدد العمال الذين يفوق أجرهم 32 ألف دج.

4- ما هو عدد العمال الذين يتراوح أجرهم بين 24 ألف و 58 ألف دج.

5- أحسب التباين ثم إستنتج الإنحراف المعياري.

6- قرّرت المؤسسة زيادة في أجور العمال بنسبة 5%. أحسب كل من المتوسط و التباين الجديدين بعد رفع الأجور.

التمرين 02:

في مطار معين هناك رحلتين في اليوم. الجدول التالي يُوضح توزيع عدد الأمتعة حسب وزنها- بالكغ- :

فئات الوزن	رحلة A	رحلة B
[18-24[	8	4
[24-30[	10	9
[30-36[	6	4
[36-40[	4	8
[40-44[	2	5
∑	30	30

1- حدّد متوسط وزن الأمتعة في كل رحلة.

2- ماهو الوزن المتوسط للأمتعة في اليوم لهذا المطار.

التمرين 03:

نعتبر السلسلة الإحصائية $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ، ni هو تكرار المشاهدة xi و متوسطها الحسابي $\overline{X}$

- برهن أن: $\sum_{i=1}^{n} n_i(X_i - \overline{X}) = 0$.

حل الموضوع العاشر

التمرين الأول :

الفئات	التكرار ni	مراكز الفئات Xi	ni ↗	ai	ni/ai	ni xi	$(Xi-\overline{X})$	$(Xi-\overline{X})^2$	$ni(Xi-\overline{X})^2$	Xi^2	$ni\ Xi^2$
[15-20[	15	17,5	15	5	3	262,5	-21,875	478,52	7177,73	306,25	4593,75
[20-30[	55	25	70	10	5,5	1375	-14,375	206,64	11365,23	625,00	34375,00
[30-45[	40	37,5	110	15	2,67	1500	-1,875	3,52	140,63	1406,25	56250,00
[45-55[	35	50	145	10	3,5	1750	10,625	112,89	3951,17	2500,00	87500,00
[55-60[	20	57,5	165	5	4	1150	18,125	328,52	6570,31	3306,25	66125,00
[60-80[	15	70	180	20	0,75	1050	30,625	937,89	14068,36	4900,00	73500,00
∑	**180**	-	-	-	-	**7087,5**	-	-	**43273,44**	-	**322343,75**

1- المتوسط الحسابي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i n_i)}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{7475}{200} = 39.375$$

إذن متوسط أجور العمال في هذه المؤسسة هو 39.375 دج

2- المنوال: فئة المنوال هي الفئة المقابلة لأكبر تكرار معدل وهي: [20-30]

إذن المنوال هو:

$$Mo = L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 20 + \frac{(5.5-3)}{(5.5-3)+(5.5-2.67)} \times 10$$

$$= 24.687$$

و بالتالي الأجر الذي يتقاضاه أكبر عدد من العمال هو 24.687 دج

لإستنتاج جهة إلتواء التوزيع نحسب كذلك قيمة الوسيط:

رتبة الوسيط هي: $Rg_{Me} = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{180}{2} = 90$

إذن إعتماداً على عمود التكرار الصاعد $ni \nearrow$ فئة الوسيط هي:]30-45[

بتطبيق قانون الوسيط نحصل على:

$$Me = L + \frac{Rg_{Me} - n^{\nearrow}_{(i-1)}}{n_i} \times a_i$$

$$= 30 + \frac{90 - 70}{40} \times 15$$

$$= 37.5$$

فيكون الأجر الوسيطي هو 37.500 دج.

بترتيب مقاييس النزعة المركزية المحصل عليها نحصل على $Mo < Me < \bar{X}$ و بالتالي

نستنتج أن التوزيع مائل إلى ناحية اليمين (إلتواء موجب).

3- حساب عدد العمال الذين يفوق أجرهم 32000دج:

لتكن x عدد العمال الدين يفوق أجرهم 32000دج: $X=\alpha+70$

$\alpha \in [30-45[$

$$\begin{cases} 45-30 \rightarrow ai=15 \rightarrow ni=40 \\ 45-32 \rightarrow ai=13 \rightarrow ni=\alpha \end{cases}$$

$\alpha \cong 35$

و بالتالي فإن عدد العمال الذين يفوق أجرهم 32000دج هو 105 عامل.

4. حساب عدد العمال الذين يتراوح أجرهم بين 24000دج و 58000دج:

لتكن Y عدد العمال الذين يتراوح أجرهم بين 24000دج و 58000دج:

$$Y=\beta+75+\delta \ =33+75+12=120$$

حيث:

$$\beta \in [20-30[$$

$$\begin{cases} 30-20 \rightarrow ai=10 \rightarrow ni=55 \\ 30-24 \rightarrow ai=6 \rightarrow ni=\beta \end{cases}$$

$$\beta=33$$

$$\delta \in [55-60[$$

$$\begin{cases} 60-55 \rightarrow ai=5 \rightarrow ni=20 \\ 58-55 \rightarrow ai=3 \rightarrow ni=\delta \end{cases}$$

$$\delta=12$$

و بالتالي فإن عدد العمال هو 120 عامل.

5- حساب التباين و الإنحراف المعياري:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{43273,44}{180} = 240,40$$

$$\Rightarrow \sigma_{(x)} = \sqrt{V(x)} = \sqrt{240,40} = 15,50$$

أو يُمكن حسابه بالطريقة الثانية:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i} - \overline{x}^2$$

$$= \frac{322343,75}{180} - (39,375)^2$$

$$= 240,40$$

$$\Rightarrow \sigma_{(x)} = 15,50$$

6. حساب الأجر المتوسط و التباين بعد الزيادة قدرها 05٪.

1.6 الأجر المتوسط [$\overline{S}$] : خاصية $\overline{S} = a.\overline{X} \quad \leftrightarrow \quad S_i = a.X_i$

فإذا كان $0.05x_i$ هي الزيادة فإن:

$Si = X_i + 0.05x_i = (1+0.05)\, x_i = 1.05\, x_i$

$\Rightarrow \overline{S} = a.\overline{X} = 1.05 \times 39.375 = 41,343\ .10^3 DA$

2.6 التباين الناتج [$V_{(y)}$] : خاصية $V(a.x_i) = a^2.\ V(x_i)$

$V(y) = V(a.x) = V(1.05.x) = (1.05)^2.V(x)$

$V(y) = (1.05)^2.240.40 = 265,041.10^3\ DA$

التمرين الثاني:

فئات الوزن	n_A	n_B	Xi	Xi n_A	Xi n_B
[18-24[	8	4	21	168	84
[24-30[	10	9	27	270	243
[30-36[	6	4	33	198	132
[36-40[	4	8	38	152	304
[40-44[	2	5	42	84	210
$\sum$	**30**	**30**	**-**	**872**	**973**

1.1 حساب وزن الأمتعة المتوسطة للرحلة A

$$\bar{X}_A = \frac{\sum_{i=1}^{5}(ni.xi)}{\sum_{i=1}^{5} ni} = \frac{872}{30} = 29.06 \text{ Kg}$$

2.1 حساب وزن الأمتعة المتوسطة للرحلة B

$$\bar{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{5}(ni.xi)}{\sum_{i=1}^{5} ni} = \frac{973}{30} = 32.43 \text{ Kg}$$

2.متوسط وزن الأمتعة الكلي :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{2}(\bar{x}i.ni)}{\sum_{i=1}^{2} ni} = \frac{(\bar{x}_A.n_1)+(\bar{x}_B.n_2)}{n_1+n_2}$$

$$= \frac{(30).(29.06)+(30).(32.43)}{60}$$

$$= 30.745 \text{ Kg}$$

التمرين الثالث:

برهن أن: $\sum_{i=1}^{n} n_i(X_i - \bar{X}) = 0$

لدينا :

$$\sum_{i=1}^{n} n_i(X_i - \bar{X}) = \sum n_i x_i - \sum n_i \bar{x}$$

$$= \sum n_i x_i - \sum n_i \left(\frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}\right)$$

$$= \sum n_i x_i - \sum n_i x_i$$

$$= 0$$

وهو المطلوب.

الموضوع الحادي عشر

تمريـــــــن 1:

خلال معرض تجاري قامت شركة مختصّة في صناعة السّاعات اليدوية ببيع 700 ساعة كما هي موضّحة في جدول التّوزيع التّكراري التّالي:

السّعـــر (100دج)	عـــدد السّاعات
20 – 40	50
40 – 60	150
60– 100	275
100 – 130	125
130 – 150	100

المطلـــــوب :

1 - أحسب عدد السّاعات المباعة التي يتراوح سعرها بين 44 و 90، واستنتج النسبة المئوية.

2 - أوجد السّعر المتوسّط للسّاعات المباعة.

3 - أوجد قيمة السّعر الذي يمثل50% من الساعات اليدوية المصنوعة.

4 - أحسب المنوال ثم الرّبيع الثّالث.

تمريـــــن 2 :

انطلاقا من الجدول التالي:

Ci	46-56	56-66	66-76	76-86	86-96	96-106
ni	03	11	33	36	14	06

1- أحسب الوسيط والمنوال

2- تأكد من قيمة الوسيط انطلاقا من العلاقة التالية $\bar{x} - M_0 = 3(\bar{x} - M_E)$:

تمريــــــن 3 :

برهـــن أن : $V(x) = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum (x_i)^2}{N} - (\bar{x})^2$ ، حيث $\bar{X}$ يمثل المتوسط الحسابي.

حل الموضوع الحادي عشر

التمرين 01:

الفئات	ni	ni ↗	Xi	ni xi	ai	ni*=ni/ai
[20-40[	50	50	30	1500	20	2,5
[40-60[	150	200	50	7500	20	7,5
[60-100[	275	475	80	22000	40	6,88
[100-130[	125	600	115	14375	30	4,17
[130-150[	100	700	140	14000	20	5,00
∑	**700**	-	-	**59375**	-	-

1- عدد الساعات المباعة التي يتراوح سعرها بين 44 و 90 و نسبة ذلك:

- فئة 44 هي الفئة الثانية (i=2) $44 \in [40-60[$ و نجد العدد كما يلي:

$$\left.\begin{array}{r} [40-60[:\ a_i = 20 \rightarrow n_i = 150 \\ [40-44[:\ a_i = 4 \rightarrow n_i = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{4 \times 150}{20} = 30$$

و بالتالي:

$$Rg_{44} = 50 + 30 = 80$$

- فئة 90 هي الفئة الثالثة (i=3) $90 \in [60-100[$ و نجد العدد كما في السابق:

$$\left.\begin{array}{r} [60-100[:\ a_i = 40 \rightarrow n_i = 275 \\ [60-90[:\ a_i = 30 \rightarrow n_i = x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{30 \times 275}{40} = 206.25$$

و بالتالي:

$$Rg_{90} = 50 + 150 + 206.25 = 406.25$$

و بالتالي فإن العدد المطلوب هو:

$$Rg_{[44-90[} = Rg_{90} - Rg_{44} = 406.25 - 80 = 326.25$$

و نسبة ذلك هي : 46.60٪

2- السعر المتوسط:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{59375}{700} = 84.82$$

3- الوسيط:

رتبة الوسيط هي: $Rg_{Me} = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{700}{2} = 350$؛

إعتماداً على التكرار الصاعد فإن فئة الوسيط هي الفئة]60-100]؛ وبتطبيق القانون نحصل على قيمة الوسيط كما يلي:

$$Me = L_{i1} + \frac{Rg_{Me} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

$$= 60 + \frac{350-200}{275} \times 40$$

$$= 81.81$$

4- المنوال و الربيع الثالث:

- المنوال:

الفئات غير متساوية في الطول فنستعمل التكرارات المعدلة ؛ و بملاحظتنا لقيم هذه الأخيرة نرى أن أكبر تكرار معدل هو "7.5" الذي يقابل الفئة]40-60] و عليه فإن هذه الأخيرة هي فئة المنوال، وبتطبيق قانون المنوال معتمدين على التكرارات المعدلة بدل المطلقة نحصل على قيمته كالتالي:

$$Mo = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 40 + \frac{(7.5-2.5)}{(7.5-2.5)+(7.5-6.88)} \times 5$$

$$= 57.79$$

- الربيع الثالث:

- تحديد رتبة الربيع الثالث Q_3: $Rg_{Q3} = \frac{3\sum ni}{4} = \frac{3\times 700}{4} = 525$

إذن فئة الربيع الثالث هي]100-130] و نستخرج قيمته بإستعمال الصيغة:

$$Q_3 = L_{i1} + \frac{Rg_{Q_3} - n^{\nearrow}_{(i-1)}}{n_i}.ai$$

$$= 100 + \frac{525-475}{125}.30$$

$$= 112$$

التمرين 02:

الفئات	ni	ni ↗	Xi	ni xi
[46-56[	3	3	51	153
[56-66[	11	14	61	671
[66-76[	33	47	71	2343
[76-86[	36	83	81	2916
[86-96[	14	97	91	1274
[96-106[	6	103	101	606
∑	**103**	**-**	**-**	**7963**

1-

- حساب الوسيط:

رتبة الوسيط هي: $Rg_{Me} = \frac{\sum n_i}{2} = \frac{103}{2} = 51.5$؛

إعتماداً على التكرار الصاعد فإن فئة الوسيط هي الفئة [76-86[؛ وبتطبيق القانون نحصل على قيمة الوسيط كما يلي:

$$Me = L_{i1} + \frac{Rg_{Me} - n_{(i-1)}^{\nearrow}}{n_i} \times a_i$$

$$= 76 + \frac{51.5 - 47}{36} \times 10$$

$$= 77.25$$

- حساب المنوال:

الفئات هنا متساوية في الطول و بملاحظتنا أن أكبر تكرار مطلق هو "36" الذي يقابل الفئة [76-86[نحصل على قيمة المنوال كما يلي:

$$Mo = L_{i1} + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times a_i$$

$$= 40 + \frac{(36-33)}{(36-33)+(36-14)} \times 10$$

$$= 77.2$$

2- التأكد من قيمة الوسيط انطلاقا من العلاقة: $\bar{x} - M_0 = 3(\bar{x} - M_E)$

نقوم بحساب المتوسط الحسابي أولاً:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{7963}{103} = 77.31$$

$$(\bar{X} - Mo) = 3 \times (\bar{X} - Me) \Leftrightarrow (\bar{X} - Mo) = 3\bar{X} - 3Me$$

$$\Leftrightarrow 3Me = 2\bar{X} + Mo$$

$$\Leftrightarrow Me = \frac{2\bar{X} + Mo}{3}$$

$$\Leftrightarrow Me = \frac{2(77.31)+77.2}{3}$$

$$\Leftrightarrow Me = 77.27 \approx 77.25$$

التمرين 03:

إثبات أن $V(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\mathrm{N}} = \frac{\sum \mathbf{x}_\mathbf{i}^\mathbf{2}}{\mathbf{N}} - \overline{\mathbf{x}}^\mathbf{2}$:

$$V(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{\mathrm{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)}{\mathrm{N}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\mathrm{N}} - \frac{2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\mathrm{N}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2}{\mathrm{N}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\mathrm{N}} - 2\overline{x}\overline{x} + \frac{\mathrm{N}\overline{x}^2}{\mathrm{N}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\mathrm{N}} - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\mathrm{N}} - \overline{x}^2$$

و هو المطلوب.

تم بحمد الله.