الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة أبي بكر بلقايد تلمسان

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة جامعية بعنوان:

محاضرات وتطبيقات في بحوث العمليات I

موجهة لطلبة السنة الثالثة ليسانس تخصص: اقتصاد كمي

من إعداد: الدكتور بن عاتق عمر

السنة الجامعية: 2019–2020

محتوى المقياس

- **الفصل الأول: بحوث العمليات**
  - ماهية بحوث العمليات
  - تذكير بالبرمجة الخطية مع التركيز على مسائل التعيين
  - سلسلة تمارين رقم 1
- **الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة**
  - عموميات حول برمجة الأعداد الصحيحة
  - طريقة التفريغ والتحديد
- **الفصل الثالث: البرمجة الديناميكية**
  - مبدأ الأمثلية لـــ BELMAN
  - تطبيقات في البرمجة الديناميكية
  - سلسلة تمارين رقم 2
- **الفصل الرابع: التحليل الشبكي**
  - نظرية البيان
  - التدفق الأعظمي
  - شبكة الأعمال
  - سلسلة تمارين رقم 3
- **مواضيع امتحانات**

الفصل الأول: بحوث العمليات

- ماهية بحوث العمليات:

تعتبر بحوث العمليات إحدى المجالات المهمة في علم الإدارة وإحدى أهم التقنيات الكمية في اتخاذ القرارات التي دعت إلى تطبيقها العديد من المدارس الإدارية كمدرسة بحوث العمليات، المدرسة القرارية، مدرسة النظم ...الخ. وهي مجموعة من التقنيات الكمية المستعملة في حل المشاكل الحالية والمستقبلية.

تعود تسمية بحوث العمليات إلى العمليات الحربية التي كانت أولى المجالات التي استخدمت فيها مختلف التقنيات من قبل فريق من العلماء البريطانيين المختصين في الرياضيات والفيزياء والسلوكيات في الحرب العالمية الثانية، من أجل حل المسائل الاستراتيجية المتعلقة بالدفاع الأرضي والجوي، بهدف الاستخدام الأمثل والفعال للموارد الحربية المحدودة. ونظرا للنتائج الإيجابية لاستعمالاتها حفز الإدارة الحربية الأمريكية إلى القيام بتطبيقها في مسائل إمداد ونقل الجنود، تخطيط لغم البحار والاستخدام الأمثل للتجهيزات الالكترونية.

إن نجاح استخدام طرق بحوث العمليات في المسائل الحربية حفز على توسيع استخداماتها إلى ميادين أخرى اقتصادية وإدارية وهندسية مختلفة. ومن بين المشاكل التي عالجتها بحوث العمليات في الاقتصاد الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة في المؤسسة بهدف تعظيم الربح أو تدنية التكاليف إلى غير ذلك.

تعتبر بحوث العمليات فنا أكثر من علم. حيث تعتبر فنا نتيجة القدرات والمهارات التي يجب استخدامها من أجل تحديد المشاكل المواجهة ومختلف الحلول المتوفرة وكيفية تحويل هذه المشاكل إلى نماذج رياضية محددة تحديدا جيدا، مع الأخذ بعين الاعتبار الهدف المراد تحقيقه.

كما تعتبر بحوث العمليات علما بطبيعة الحال نتيجة استخدامها مختلف الطرق العلمية الرياضية لحل مثل هذه النماذج.

تتعدد طرق بحوث العمليات المستخدمة في اتخاذ القرارات الإدارية والاقتصادية ونجد من بينها:

- البرمجة الخطية التي تعمل على تحويل المشكل المطروح إلى برنامج رياضي يتكون من دوال ومعادلات ومتراجحات من الدرجة الأولى، وأهم المشاكل التي تستخدم فيها هي الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة في المؤسسة.
- التحليل الشبكي أو نظرية الشبكات التي تستخدم في حل المشاكل التي يمكن تمثيلها في شكل شبكة كشبكة المواصلات والمياه والغاز والكهرباء وشبكة الأعمال المتعلقة بتنفيذ المشاريع.
- البرمجة الديناميكية التي تستخدم في حل المشاكل المعقدة التي يجب تقسيمها إلى مراحل، بحيث تعتبر كل مرحلة مشكل جزئي ويتم حلها المرحلة بعد الأخرى إلى غاية المرحلة الأخيرة. وتعتمد هذه الطريقة على مبدأ الأمثلية لبلمان.
- نظرية الألعاب الاستراتيجية التي تعمل على حل مشاكل التي تتميز بالمنافسة بين عدة أطراف.
- نظرية صفوف الانتظار المتعلقة بحل مشاكل الانتظار لمدة طويلة من قبل زبائن المؤسسة ولكن ليس على حساب التكاليف. أين يجب الموازنة بين نظام الخدمة والانتظار.
- نظرية تسيير المخزون المهتمة بتحديد مستوى المخزون الأمثل الذي يواجه الطلب ويتفادى الانقطاع.
- نظرية المحاكاة التي تستخدم في حل المشاكل التي لا يمكن حلها باستخدام الطرق السالفة الذكر. أين يتم تمثيل مبسط للواقع باستخدام نظرية الاحتمالات.

- تذكير بالبرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية إحدى الأساليب التي تستخدم في علم بحوث العمليات، و هي طريقة رياضية تمكن من التوصل لأفضل الحلول أو أمثل الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوافر فيها شروط رياضية معينة.

يعتبر نموذج فان نيومان "***Van Neuman***" الخطّي للاقتصاد المتطور من أهمّ الأعمال التي قدمت في هذا الميدان و ذلك في عامي 1935م/1936م. قام بعد ذلك ليونتيف "***Leontif***" بدراسة نموذج الدخل و الإنفاق في الاقتصاد الأمريكي. كما قام فريق للبحوث العمليات في الو.م.أ

برئاسة المارشال وود "Wood" بتطبيق نموذج ليونتيف لدراسة مسائل توزيع الإمكانات في القوات الجوّية. كما يعتبر دانتزج "Dantzig" و هو عضو فريق بحوث العمليات في الو.م.أ أوّل من استخدم طريقة السمليكس لحل مسائل البرمجة الخطية و ذلك في عام 1947م.

بعد ذلك تطوّرت الدّراسات النظرية والتطبيقية في حلّ مسائل البرمجة الخطية بسرعة مذهلة، حيث يعتبر كوك "**W.Cook**" رائد التطبيقات المناعية للبرمجة الخطية أما مسألة النقل فيرجع الفضل في استخدامها إلى كل من هينشوك "**F.Hitchkook**" و كوبمان "**T. Koopman**".

البرمجة الخطية هي مجموعة من طرق التحليل العلمي، تبحث على وجه الخصوص على أمثليات الاستخدام للمواد الاقتصادية على مستوى الاقتصاد الجزئي خاصة، و ذلك بالاعتماد على الأساليب الرياضية.

تعالج البرمجة الخطية مشكلة تعظيم أو تدنية دالة معينة تسمى بدالة الهدف أو الدالة الاقتصادية أو دالة الفعالية ضمن مجال محدّد.

يتحدد هذا المجال بواسطة مجموعة قيود مفروضة على متغيرات الدالة غالبا ما تكون هذه القيود على شكل متراجحات أو معادلات. إن كلمة خطّية تعني أن دالة الهدف وجميع القيود دوال خطية أما كلمة برمجة فترادف في معناها كلمة تخطيط.

- تتكون البرمجة الخطية من ثلاث أجزاء مهمة و هي:

ا– دالة خطّية: تسمّى بالدالة الاقتصادية أو دالة الفعالية.

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \begin{cases} \nearrow \max \\ \searrow \min \end{cases}$$

ب– القيود الخطية:

ج– شرط عدم السلبية:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq bi & i = 1, \ldots K \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = bj & j = 1, \ldots p \\ f_3(x_1, x_2, \ldots x_n) \leq be & e = 1, \ldots m \\ x_k \geq 0 \; (K = 1, \ldots n) & \end{cases}$$

(شرط عدم السلبية)

تستخدم البرمجة الخطية في كلّ المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلة الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو كلاهما معا.

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية في مجالات العلوم الاقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة ما يلي:

أ- حالة التعظيم:

تعظيم الأرباح، تعظيم الانتاج، تعظيم طاقات التخزين، تعظيم استخدام رؤوس الأموال، تعظيم استخدام اليد العاملة، ...

ب- حالة التدنئة:

تدنية التكاليف، تدنئة الخسائر، تدنية عدد الموظفين، تدنية الأجور الإجمالية، ..

- مسألة التخصيص أو التحديد أو التعيين:

تلاقي الكثير من المؤسسات خاصة مؤسسات إنجاز المشاريع مشاكل تخصيص الموارد المادية والبشرية، لإنجاز مختلف الأعمال بكفاءة عالية ومردودية اقتصادية. وإشكالية مسائل التخصيص تتلخص في كيفية توزيع مجموعة من الوظائف على مجموعة من الأشخاص، أو مجموعة من الآلات على مجموعة من المهام، مما يؤدي إلى تحمل أقل التكاليف أو الحصول على أكبر الأرباح، بشرط أن يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة وكل شخص يشتغل في وظيفة واحدة، وهذا يتطلب أن يكون عدد الأشخاص أو الآلات مساو لعدد الوظائف.

مثال:

أعلنت إحدى المصالح الحكومية عن رغبتها في بناء ثلاثة مباني لإسكان موظفيها على أن يتم تخصيص مبنى واحد فقط للمقاول في المناقصة.

الجدول التالي يبيّن العروض المقدمة من 3 شركات مقاولة لبناء المباني السكنية الثلاثة بمئات ألاف الوحدات النقدية.

العروض المقدمة من الشركات.

المبنى \ المقاول	**1**	**2**	**3**
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

فإذا رمزنا إلى أن xij ترمز إلى أن شركة المقاولات i ستنفذ المبنى j حيث: i = 1, 2, 3 و j = 1 , 2 ,3. حيث شركة المقاولات لا يمكنها تنفيذ إلا مبنى واحد أي xij = 1 و ذلك لإحدى قيم j و تساوي الصفر لبقية قيم j و بالتالي فإن نموذج البرمجة الخطّية هو كالتالي:

$$MinZ=a_{11}x_{11}+a_{12}x_{12}+a_{13}x_{13}+a_{21}x_{21}+a_{22}x_{22}+a_{23}x_{23}+a_{31}x_{31}+a_{32}x_{32}+a_{33}x_{33}$$

علما أن الشروط المفروضة على الشركات المنفذة هي:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=1$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=1$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=1$$

و الشروط المفروضة على المباني هي:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1$$

$$x_{12}+x_{21}+x_{31}=1$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=1$$

إن مسائل التخصيص هي عبارة عن حالة خاصة من مسألة النقل.

الطريقة المجرية

سميت هذه الطريقة نسبة إلى الرياضي العالمي د. كوهن KUHN، ولإيجاد أفضل تخصيص بهذه الطريقة يتم إتباع المنهجية التالية:

بعد تعيين مصفوفة التكاليف ووضعها في جدول نتبع المراحل التالية:

- **ايجاد مصفوفة تكلفة الفرصة:** نأخذ أقل تكلفة من كل صف ونطرحها من تكاليف ذلك الصف، فتتحول أقل تكلفة إلى الصفر. ثم نأخذ أقل رقم في كل عمود من

الجدول الجديد ونطرحه من بقية الأرقام الموجودة في نفس العمود ويتحول أقل رقم إلى الصفر في كل عمود. وهكذا نحصل على جدول مصفوفة تكلفة الفرصة.

- **تقييم الحل:** من أجل عملية التقييم نقوم بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية. إذا كان عدد هذه الخطوط مساو لعدد الأعمدة أو الصفوف نقوم بعملية التخصيص، وإذا كان عدد الخطوط أقل نقوم بتحسين الحل من خلال أخذ أصغر رقم من الأرقام غير المغطاة في الجدول الأخير ونطرحه من الأرقام غير المغطاة ونضيفه للأرقام الموجودة في نقاط تقاطع الخطوط الأفقية والعمودية. ثم نعيد عملية التقييم إلى أن نجد عدد الخطوط الأفقية والعمودية مساو لعدد الأعمدة أو الصفوف.
- **عملية التخصيص:** من أجل عملية التخصيص نقوم بأخذ الصف أو العمود ذي أقل عدد من الأصفار، نؤطر إحدى هذه الأصفار ونشطب الأصفار الموجودة في نفس الصف ونفس العمود. ثم نعيد هذه العملية بدون الأخذ بعين الاعتبار الأصفار المؤطرة والمشطوبة إلى أن يتم تأطير صفر واحد في كل صف وكل عمود.

مثال: قم بتخصيص الآلات A، B، C للقيام بالوظائف 1، 2، 3 إذا علمت أن تكاليف قيام كل آلة بكل وظيفة محدد في الجدول التالي:

الوظائف / الآلات	1	2	3
A	13	7	14
B	9	7	7
C	5	10	12

حل المثال:

تعيين مصفوفة التكاليف

13	7	14
9	7	7
5	10	12

مصفوفة تكلفة الفرصة

6	0	7
2	0	0
0	5	7

6	0	7
2	0	0
0	5	7

تقييم الحل

7	0	6
0	0	2
7	5	0

عملية التعيين

7	$\boxed{0}$	6
$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	2
7	5	$\boxed{0}$

من خلال الجدول الأخير تكون عملية التخصيص كالتالي:

تخصيص الآلة A في الوظيفة 2.

تخصيص الآلة B في الوظيفة 3.

تخصيص الآلة C في الوظيفة 1.

للحصول على أقل التكاليف المقدرة بـــ 7+7+5= 19 وحدة نقدية.

ملاحظة:

في حالة تعظيم الدالة الاقتصادية يتم إضافة مرحلة إضافية في الأول وتسمى البحث عن مصفوفة الفرص الضائعة، من خلال أخذ أكبر قيمة في المصفوفة ونطرح منها بقية القيم الأخرى، لتصبح أكبر قيمة مساوية للصفر. ثم نطبق المراحل المذكورة سابقا على جدول الفرص الضائعة.

- سلسلة تمارين رقم 1:

تمرين 1:

تتكون مؤسسة من ثلاث ورشات A، B وC . تصنع هذه المؤسسة 3 مواد بكميات شهرية x_1، x_2 وx_3 المطلوب حسابها. الورشات الثلاث تشتغل شهريا: 2766، 624 و 416 ساعة على التوالي.

المنتوج الأول تتم معالجته وفق العملية الإنتاجية التالية:

الورشات المتتالية	A	C	B	C
المردود الساعي	0.357	30	12	15

المنتوج الثاني تتم معالجته وفق العملية التالية:

الورشات المتتالية	A	B	C
المردود الساعي	0.286	12	15

المنتوج الثالث تتم معالجته وفق العملية التالية:

الورشات المتتالية	A	B
المردود الساعي	9.6	12

الطلبات الشهرية على المنتوجات الثلاث هي: 250، 1250 و1500 على التوالي. الطلب الذي لا يتم تلبيته لا يؤدي إلى أعباء إضافية. الربح الوحدي للمنتوجات الثلاث هو: 350، 250، و400 على التوالي. أوجد نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق من خلاله أكبر ربح ممكن.

تمرين 2:

في ورشة تابعة لمؤسسة معينة يمكن صنع 4 منتوجات P1، P2، P3، P4. إن الأرباح الصافية والوحدية لكل نوع من المنتوجات الأربع هي: 5، 2، 3، 4 على التوالي. أما الاستهلاكات

الخاصة لهذه المنتجات من مادة معينة أولية فهي: 6، 2، 2، 3 وحدات على التوالي. الشروط الخاصة بالتخزين تفرض إنتاج 500 وحدة على الأكثر من P2 و P3 و700 وحدة على الأثر من P4.

أوجد نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد مخطط إنتاج يتم من خلاله استهلاك أكبر كمية ممكنة من المادة الأولية المشار إليها سابقا. والذي من أجله تحقق المؤسسة ربحا صافيا كليا لا يقل عن 2000 وحدة نقدية.

تمرين 03:

بعد إعادة هيكلة مؤسسة « Granito-lux » لصناعة جميع أنواع البلاط، تبين لمدير هذه المؤسسة وجود أربعة عمال إضافيين بالنسبة للمناصب المحددة في الهيكل التنظيمي، فكر هذا المدير في إمكانية تسريحهم، إلا أنه فضل إدماجهم ضمن الوحدات الإنتاجية الأربع التابعة للمؤسسة، حيث أن تكلفة تشغيل هؤلاء العمال ضمن مختلف الوحدات ملخصة في الجدول التالي:

	U1	U2	U3	U4
العامل 1	08	06	05	15
العامل 2	09	08	06	14
العامل 3	13	10	05	13
العامل 4	08	12	09	13

كيف يمكن تعيين هؤلاء العمال في مختلف الوحدات الإنتاجية بحيث تكون تكلفة التشغيل الإجمالية في حدها الأدنى، علما أنه لا يمكن تعيين أكثر من عامل واحد في كل وحدة؟

تمرين 04:

يمثل الجدول التالي إنتاجية مجموعة من العمال في إحدى الورشات، نريد تعيين مختلف العمال ضمن مختلف الورشات، فما هو التعيين الأمثل، وما هي الإنتاجية الناتجة عن هذا التعيين؟

A5	A4	A3	A2	A1	
04	07	10	02	09	T1
06	08	15	04	07	T2
04	06	12	04	02	T3
10	04	12	05	11	T4
16	12	08	10	15	T5

تمرين 05:

يبحث مدير مؤسسة معينة عن كيفية تعيين أو تخصيص ثلاث عمال في خمس آلات مختلفة، حيث أن إنتاجية كل عامل في مختلف الآلات موضحة في الجدول التالي:

M5	M4	M3	M2	M1	
12	18	10	16	14	T1
07	12	08	07	10	T2
12	16	10	09	18	T3

المطلوب تعيين هؤلاء العمال للعمل على مختلف الآلات من أجل الحصول على أكبر إنتاجية؟

الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة

عموميات حول برمجة الأعداد الصحيحة:

الكثير من المتغيرات الاقتصادية خاصة المتعلقة بالكميات الفيزيائية، لا يمكن تجزئتها، وإلا فقدت صفتها. فعندما نكون بصدد تحديد كميات الثلاجات الواجب إنتاجها في مصنع ما، فلا مجال لتقديرها بالأجزاء كأن نقول أن الإنتاج اليومي هو 20.4 جهاز، فالجهاز يجب أن يكون وحدة كاملة، فنقول أن الإنتاج اليومي هو 20 جهازا أو 21 جهازا. وفي البرمجة الخطية كثيرا ما يعطينا الحل الأمثل متغيرات قيمها عشارية وهو ما أدى إلى البحث في التخلص من هذا المشكل، وهذا ما استدعى استخدام **برمجة الأعداد الصحيحة**.

فبرمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرق البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية يتضمن متغيرات قيمها أعدادا صحيحة، ويتطلب ذلك المرور بعدة مراحل:

- **المرحلة الأولى:** إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، إذا كانت قيم متغيرات الحل الأمثل أعداد عشارية ننتقل إلى المرحلة الثانية.
- **المرحلة الثانية:** تسمى بمرحلة التفريغ أين تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي بهدف الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيما صحيحة، وتستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل إلى حل أمثل متغيراته تأخذ قيما صحيحة.

طريقة التفريغ والتحديد:

إذا كانت متغيرات الحل الأمثل عبارة عن أعداد غير صحيحة نقوم بتوليد برنامج جديد، حيث يضاف إلى البرنامج الأصلي قيد آخر وفق ما يلي:

إذا كان المتغير الذي يأخذ عددا غير صحيحا في الحل الأمثل هو x_i ولتكن قيمته غير الصحيحة b_i، فإنه يمكن كتابته ضمن مجال كالتالي:

$$b_{i1}<x_i<b_{i2}$$

حيث أن b_{i1} وb_{i2} عددين صحيحين غير سالبين، وليتجنب المتغير قيمة ضمن هذا المجال فإنه يتم اشتقاق قيدين جديدين هما $x_i\leq b_{i1}$ و $x_i\geq b_{i2}$ ، ونضيف كل قيد منهما إلى البرنامج الأصلي لنحصل على برنامجين آخرين، نقوم بحل كل واحد منهما حلا مستقلا، إذا كانت متغيرات الحل

الأمثل صحيحة نتوقف، ونأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة لدالة الهدف في حالة التعظيم والعكس في حالة التدنية. وإلا نستمر في تفريغ البرنامج إلى غاية الوصول إلى حل أمثل قيم متغيراته صحيحة.

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي حيث تأخذ متغيراته أعدادا صحيحة:

$$Max : Z=20x_1+2x_2$$

تحت القيود:

$$4x_1+10x_2\leq 22$$
$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$$

حل المثال:

باستعمال طريقة السمبلكس نحصل على $x_1=5.5$ و $x_2=0$ و$Z=110$

نلاحظ أن x_1 تأخذ قيمة عددا غير صحيحا، ويمكن كتابتها كما يلي:

$$5<x_1<6$$

أي يمكن استنتاج قيدين الأول هو $x_1\leq 5$ والثاني $x_2\geq 6$، ومن هذين القيدين يتم توليد برنامجين:

البرنامج الأول	البرنامج الثاني
$Max\ Z = 20x_1+ 2x_2$	$Max\ Z = 20x_1+ 2x_2$
s/c	s/c
$4x_1+10x_2\leq 22$	$4x_1+10x_2\leq 22$
$x_1\leq 5$	$x_1\geq 6$
$x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$	$x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$

لا يوجد حلول للبرنامج الثاني لأنه متناقض، حيث أن القيد الثاني لا يحقق القيد الأول.

أما حل البرنامج الأول فهو: $x_1=5$ و $x_2=0.2$ و $Z= 502/5$

نلاحظ كذلك أن قيمة x_2 ليست عددا صحيحا ويمكن كتابته على الشكل التالي:

$$0<x_2<1$$

ومن هنا نستنتج قيدين، الأول $x_2\leq 0$ والثاني $x_2\geq 1$، ونقوم بتوليد برنامجين جديدين:

البرنامج الثالث	البرنامج الرابع
$Max\ Z = 20x_1+ 2x_2$	$Max\ Z = 20x_1+ 2x_2$
s/c	s/c
$4x_1+10x_2\leq 22$	$4x_1+10x_2\leq 22$
$x_1\leq 5$	$x_1\leq 5$
$x_2\geq 1$	$x_2\leq 0$
$x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$	$x_1\geq 0$, $x_2\geq 0$

حل البرنامج الثالث هو: $x_1=3$ و $x_2=1$ و $Z=62$

حل البرنامج الرابع هو: $x_1=5$ و $x_2=0$ و $Z= 100$

قيم متغيرات كلا البرنامجين أعدادا صحيحة ولكن البرنامج الرابع قيمة دالته الاقتصادية أكبر وبالتالي حل البرنامج الرابع هو الأمثل.

الفصل الثالث: البرمجة الديناميكية

يقترن تاريخ أسلوب البرمجة الديناميكية باسم رتشارد بلمان Richard Bellman حيث يرجع له الفضل الأساسي في ابتكار الأسلوب. فقد قام بلمان بنشر ما يقارب 100 بحث في الموضوع أثناء قيامه بالبحث العلمي في شركة راند Rand Corporation خلال الخمسينات من القرن الماضي. وقد قام بتلخيص مساهمته في ابتكار الأسلوب في كتابه Dynamic Programming والذي نشر له سنة 1957، وكما ترجع التسمية التي أطلقت على الأسلوب أيضا إلى بلمان.

ويعني لفظ ديناميكية في واقع الأمر التحرك وعدم السكون عبر الزمن. وقد يستنبط من هذا أن أسلوب البرمجة الديناميكية يختص بحل المشاكل التي يمثل فيها الزمن أحد المتغيرات الهامة المكونة لها. وهذا غير صحيح في الواقع حيث أن المقصود باصطلاح البرمجة الديناميكية هو التوصل إلى الحل الأمثل لمجموعة من المشاكل التي يتميز كل منها بتعدد المراحل التي يتم فيها اتخاذ قرارات معينة بخصوص متغيرات معينة، عن طريق تحويل كل منها إلى عدة مشاكل جزئية، تمثل كل منها أحد المراحل بالمتغيرات التي تحتويها. ثم يتقدم الحل من مرحلة إلى أخرى بحيث يكون القرار الذي يمكن اتخاذه في أي مرحلة لاحقة هو القرار الأمثل بصرف النظر عن نوعية القرار الذي تم اتخاذه في المراحل السابقة.

ويمكن توضيح مفهوم البرمجة الديناميكية في النقاط التالية:

- هي أسلوب تحليلي لتقرير الخطة المثلى لتحقيق أهداف معينة تحت قيود معينة.
- وهي مناسبة لتحليل السلوك الرشيد.
- هي أسلوب لتحديد الخطة المناسبة من بين الخطط البديلة.
- وهي مختلفة عن غيرها من الأساليب كوناه تفترض تقسيم عمليات اتخاذ القرارات إلى خطوات متتالية.

وعلى ذلك يمكن تعريف البرمجة الديناميكية بأنها:

(مجموعة الإجراءات اللازمة لإيجاد الحل الأمثل للمشكلة التي يمكن صياغتها على هيئة مجموعة من القرارات المتعددة المراحل التي يحكمها مبدأ بلمان للأمثلية).

وحتى تسهل عملية تعريف حالة النظام لابد من توفر مؤشرين أساسيين وهما تحديد العلاقة التي تربط المراحل فيما بينها والمعلومات التي نحتاجها من المراحل السابقة في سبيل اتخاذ القرار في المراحل اللاحقة.

وإن حل المشاكل باستعمال البرمجة الديناميكية يتضمن طريقتين:

-الطريقة الأمامية: أو طريقة الحسابات الأمامية حيث يعتمد هذا الأسلوب على طريقة القيم المرتبطة تصاعديا كما يلي: $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow \ldots\ldots \rightarrow F_n$

إن هذه الطريقة تعتمد على مبدأ التقدم في العمل إذ يتم حساب قيمة الدالة الأولى F_1، ثم الانتقال إلى الدالة الثانية F_2 وهكذا حتى نصل إلى الدالة الأخيرة F_n .

- طريقة الحسابات الخلفية: وهي معاكسة للطريقة الأولى إذ تستخدم العلاقة التكرارية في ايجاد الحل الأمثل عن طريق التحرك إلى الخلف مرحلة بمرحلة وفي كل مرحلة يتم ايجاد الخطة المثلى لكل حالة من حالات هذه المرحلة إلى أن نصل إلى المرحلة الأولى وبذلك يتم ترتيب الدوال ترتيبا تنازليا كالآتي: $F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \ldots\ldots\ldots \rightarrow F_1$

- مبدأ بيلمان:

يتضمن مبدأ بيلمان أن للسياسة المثلى خاصية، أنه بصرف النظر عن نوعية القرار السابق فان بقية القرارت لابد أن تمثل القرارات المثالية فيما يتعلق بالنتائج المرتبطة بهذا القرار.

والصياغة الرياضية لمبدأ بيلمان هي كالتالي:

لتكن $F_n(e_{k1})$ القيمة التي تأخذها الدالة الاقتصادية بعد n مرحلة من التقدم والتحسين المعرفة الحالات المتعاقبة $(e_{k1}, e_{k2},\ldots\ldots,e_{kn})$ والسياسة $(d_1, d_2,\ldots\ldots, d_n)$.

و$g_i(e_{ki},d_i)$ دالة الإيراد المتعلقة بالمرحلة **i**. إذن الدالة الاقتصادية المراد تعظيمها هي كالتالي:

$$F_n(e_{k1})=\text{Max}[g_1(e_{k1},d_1)+g_2(e_{k2},d_2)+\ldots\ldots+g_n(e_{kn},d_n)]$$

وبالاستناد على معيار الأمثلية لبيلمان، فللبحث عن أمثلية هذه الدالة ذات n مجهول نبحث عن أمثلية مجموع n دالة ذات مجهول واحد.(نلاحظ أن المجاهيل ليست مستقلة عن بعضها البعض وإنما حالة النظام في لحظة معينة تابعة لحالة النظام السابق والقرار المتخذ فيه).

ونكتب:

$$Fn(e_{k1})=Max\{g_1(e_{k1},d_1)+Max[g_2(e_{k2},d_2)+\ldots..+g_n(e_{kn},d_n)]\}$$

ويمكن كتابة أيضا:

$$Fn(e_{k1})=Max[g_1(e_{k1},d_1)+F_{n-1}(e_{k2})]$$

مع

$$F_{n-1}(e_{k2})=Max[g_2(e_{k2},d_2)+\ldots\ldots..+g_n(e_{kn},d_n)]$$

بحيث:

e_{k2} هي دالة ل e_{k1} و d_1 ويمكننا كتابة $e_{k2}=T_1(e_{k1},d_1)$ ، T_1 تسمى دالة التحويل. والمرحلتين الأخيرتين $F_n(e_{k1})$ و $F_{n-1}(e_{k2})$ تمثل النظام الدالي الأساسي للبرمجة الديناميكية.

- صياغة المشكلة:

يواجه الباحث بعض الصعوبات في استخدام البرمجة الديناميكية وتتمثل هذه الصعوبات في صياغة المشكلة وفي خوارزمية الحل إذ أن كل مشكلة طبقت فيها البرمجة الديناميكية كان لها تطبيق مميز عن الآخر وفي ضوء ذلك تعد البرمجة الديناميكية نقيضا للبرمجة الخطية لعدم وجود صياغة قياسية لها وبناءا على ذلك تعد البرمجة الديناميكية نوعا عاما لحل المسائل على أن يتم تطوير المعادلات بما يوافق كل تطبيق معين.

وترتيبا على ما تقدم ظهر العديد من الصياغات للبرمجة الديناميكية من أشهرها مشكلة توزيع الاستثمارات وموازنة رأس المال، مشكلة تخطيط الإنتاج، مشكلة التنقل ...الخ.

وكما سبقت الإشارة إليه فان كل مشكلة من هذه المشاكل تختلف في صياغتها عن الأخرى ولكنها تشترك جميعا مع مشكلة أقصر مسار في تقسيم المشكلة إلى مراحل متعاقبة وإيجاد الحل الأمثل لكل مرحلة ومن ثم نضع العلاقة بين نتائج سلسلة المراحل السابقة للحصول على الحل النهائي للمشكلة الأصلية.

- البرمجة الديناميكية وتوزيع الاستثمارات:

نفرض أنه لدينا رأس مال قدره (K) يطلب توزيعه واستثماره على مشروعات اقتصادية عددها أربع، وهذا ما يمكن أن نستثمره ككتلة واحدة في إحدى المشروعات أو أن نوزعه إلى مشروعين أو ثلاثة أو أربعة إلى آخره، وذلك بالاستناد إلى نظرية بيلمان ومعادلاته.

إذا أردنا أن نوزع رأس المال المستثمر بين مشروعين الأول (P1) ومعادلة دخله g(x) والمشروع الثاني (P2) ومعادلة دخله h(x).

بحيث: $0 \leq X \leq K$

على فرض أننا خصصنا للمشروع الأول (x) من رأس المال المستثمر فيكون للمشروع الثاني (k-x) وبالتالي نتلقى دخلا g(x) من المشروع الأول و h(k-x) من المشروع الثاني.

فالدخل الإجمالي للمشروعين في الفترة المخططة يكون: $R(k,x)=g(x)+h(k-x)$.

وبالتالي نختار القيمة العظمى من خلال العلاقة F(x):

$$F(x)= \text{Max } R(x,k)= \text{Max } [g(x)+h(k-x)]$$

وهذه العلاقة شبيه بشكل كبير لمعادلات العالم بيلمان.

فإذا أردنا أن نوزع رأس المال المستثمر على مشروعين في المرحة الأولى يكون الحل المبدئي للمشروع الأول المخصص له (x) والمشروع الثاني المخصص له (k-x) هو: $R(k,x)=g(x)+h(k-x)$.

أما إذا أردنا أن نوزع رأس المال المستثمر على مشروعين في المرحلة الثانية فيكون للمشروع الأول المتبقي من المرحة الأولى (αx) حيث : $0\leq\alpha\leq1$ أما المشروع الثاني المتبقي فيكون $\beta(k-x)$ حيث $0\leq\beta\leq1$ أما الدخول المتوقعة هي $g(\alpha x)$ من المشروع الأول و $h[\beta(k-x)]$ من المشروع الثاني.

إن الأمثلية في طريقة البرمجة الديناميكية تبدأ قاعدتها من المرحة الأخيرة لذلك نبدأ بالمرحة الثانية، لدراسة المرحة الأولى والتي نرمز لها بالرمز f_1 (الدخل الأعظمي الممكن من المشروعين في المرحلة الثانية).

$$F_1[\alpha x+\beta(k-x)]= \text{Max } \{g(x)+h[\beta(k-x)]$$

ثم ننظر إلى المراحل المتتالية كما لو أن المرحلة السابقة كأنها المرحلة الأولى وبالتالي يكون الدخل من المرحلتين للمشروعين:

$$F_2(k)= \text{Max } \{f_1(x)+h(k-x)+ f_1[\alpha x+\beta(k-x)]\}$$

وبنفس المنطق نكتب بعد n مرحلة:

$$F_n(k)= \text{Max } \{g(x)+h(k-x)+fn-1[\alpha x+\beta(k-x)]\}$$

حيث:

Fn-1: دالة الهدف في نهاية المرحلة n-1 .

وهذه الدالة ترتبط وتشابه طريقة دالة العالم بيلمان في البرمجة الديناميكية والتي تمتلك الشكل التالي:

$$F_n(k)= \text{Max } \{\varphi(x)+f_{n-1}(\alpha x)\}$$

مثال:

ليكن لدينا رأس مال قدره 200 ألف دينار يطلب توزيعه واستثماره على أربعة مشروعات في فترة تخطيطية واحدة وذلك باستخدام البرمجة الديناميكية، واليك المعلومات التالية:

رأس المال الموظف في الاستثمار بآلاف الدنانير الجزائرية (x)	زيادة إنتاج المنتجات للمشروعات الأربعة (زيادة نسبية) كدخول متوقعة			
	g1(x)	g2(x)	g3(x)	g4(x)
0	0	0	0	0
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

الحل:

نحن نمتلك قيم مختلفة ومنفصلة لتوزيع رأس المال المستثمر على الشكل التالي: (x=50,100,150,200) إن مجموع الاحتمالات النهائية التي يمكن حسابها على الشكل التالي:

إذا وزعنا 200 ألف دينار بالتساوي بين المشروعات الأربعة كل منهم سيكون نصيبه 50 ألف دينار سنجد حسب الجدول زيادة إنتاج المنتجات بنسب مئوية كما يلي:

$$g1(50)+g2(50)+g3(50)+g4(50)=25+30+36+28=119$$

من البديهي لإيجاد الإمكانيات الممكنة الأخرى للتوزيع المتطابق مع زيادة إنتاج المنتجات يتطلب المساعدة من معادلات العالم بيلمان.

في المقدمة يمكن أن نشير أنه إذا لم نوزع رأس المال المستثمر على المشروعات فيكون الدخل الإجمالي مساو للصفر.

يتألف أسلوب حسابنا بالبحث عن الفاعلية المثلى من المشروع الأول ثم من مشروعين معا ثم من ثلاث مشاريع حتى النهاية (في نهاية المرحلة من أربع مشاريع).

نبدأ من المشروع الأول المرتبط بتطور وزيادة إنتاج المنتجات g(x) حيث نرمز $F_1(c)$ بالزيادة العظمى للمنتجات المرتبة بالمشروع الأول في حالة خصصنا له رأس مال مستثمر مقداره :(c)

$$F_1(c)= \underset{0 \le X \le C}{\text{Max}}\, g_1(x)=g_1(c)$$

أي أن إذا كان $(C_2>C_1)$ فإن $g_2(c_2)>g_1(c_1)$ وبالتالي نكتب بالنسبة للمشروع الأول في المرحلة الأولى:

$F_1(50)=g_1(50)=25$
$F_1(100)=g_1(100)=60$
$F_1(150)=g_1(150)=100$
$F_1(200)=g_1(200)=140$

ننتقل إلى المرحلة الثانية من الحسابات، في هذه الحالة من الضروري تحديد التوزيع الأفضل لرأس المال المستثمر. فإذا وزعنا بين مشروعين فعلينا أن نأخذ بعين الاعتبار الفعالية المثلى لهذا التوزيع في المشروع الأول. نرمز $F_2(c)$ لزيادة إنتاج المنتجات من جراء توزيع رأس المال المستثمر (c) بين المشروعين.

هذا يتوافق مع منطق طريقة العالم بيلمان:

$$F_2(c)= \text{Max}\ [g_2(x) +f_1(c-x)]$$

نعرض الحسابات لهذه التوزيعات المختلفة رأس المال والموزع على الشكل التالي:

$$C=(50\ ;100\ ;150\ ;200)$$
$$F_2(50)= \text{Max}\ [g_2(x)+f_1(50-x)]$$

بمقدار توافق المعلومات x الموجودة في الجدول يمكن أن نستخدم قيم منفصلة وبالتالي يمكن أن يتغير x من 0 إلى 50 ونحصل على قيمتين لذلك:

$$\begin{aligned} F_2(50) &= \text{Max}\ [g_2(x)+f_1(50-x)] \\ &= \text{Max}\ [g_2(0)+f_1(50)\ ;g_2(50)+f_1(0)] \\ &= \text{Max}\ [0+25\ ;\underline{30+0}]=30 \end{aligned}$$

عند هذه الإشارة تكون القيمة العظمى المساوية (30) أي $F_2(50)=30$

إن ما يعنيه $g_2(50)+f_1(0)$ هو أن المشروع الثاني يخصص له 50 ألف دينار والمشروع الأول لا يخصص له.

في هذه الحالة إن رأس المال الباقي يساوي:

$k-50=200-50=150$ ألف دينار

سيوزع بين المشروعين الثالث والرابع.

نتبع نفس المنطق في حساب كل من:

$$\begin{aligned} F_2(100) &= \text{Max}\ [g_2(x)+f_1(100-x)] \\ & \quad 0\leq X\leq 100 \\ &= \text{Max}\ [g_2(0)+f_1(100)\ ;\ g_2(50)+f_1(50)\ ;\ g_2(100)+f_1(0)] \end{aligned}$$

$$= \text{Max}\ [0+60\ ;\ 30+25\ ;\ \underline{70+0}] = 70$$

ونجد التمثيل الأمثل هو أن نوزع 100 ألف دينار إلى المشروع الثاني وسيحقق 70 زيادة.

$$F_2(150) = \text{Max}\ [g_2(0)+f_1(150)\ ;\ g_2(50)+f_1(100)\ ;\ g_2(100)+f_1(50)\ ;\ g_2(150)+f_1(0)]$$

$$= \text{Max}\ [\underline{0+100}\ ;\ 30+60\ ;\ 70+25\ ;\ 90+0] = 100$$

نجد أن توزيع هذا المبلغ يكون من الأفضل كله للمشروع الأول لتحقيق زيادة إنتاج المنتجات أفضل ما يمكن.

$$F_2(200) = \text{Max}\ [g_2(x)+f_1(200-x)]$$

$$= \text{Max}\ [g_2(0)+f_1(200)\ ;\ g_2(50)+f_1(150)\ ;\ g_2(100)+f_1(100)\ ;\ g_2(150)+f_1(50)\ ;\ g_2(200)+f_1(0)]$$

$$= \text{Max}\ [\underline{0+140}\ ;30+100\ ;70+60\ ;90+25;122+0] = 140$$

ننتقل إلى المرحلة الثالثة بحيث نحدد الإمكانيات المثلى لتوزيع رأس المال المستثمر في حال تخصيص هذا المال إلى المشروعات الثلاثة معا لحساب هذه المرحلة $f_3(c)$ يجب أن نراعي القيم التي عثرنا عليها من $f_2(c)$ وبالأخص:

$$F_3(c) = \text{Max}\ [g_3(x)+f_2(50-x)]$$

إن الحسابات المختصرة تعطي التالي:

$$F_3(50) = \text{Max}\ [g_3(x)+f_2(50-x)]$$

$$= \text{Max}\ [g_3(0)+f_2(50)\ ;\ g_3(50)+f_2(0)]$$

$$= \text{Max}\ [0+30\ ;\underline{36+0}] = 36$$

$$F_3(100) = \text{Max}\ [g_3(x)+f_2(100-x)]$$

$$= \text{Max}\ [g_3(0)+f_2(100)\ ;\ g_3(50)+f_2(50)\ ;\ g_3(100)+f_2(0)]$$

$$= \text{Max}\ [\underline{0+70}\ ;\ 36+30\ ;\ 64+0] = 70$$

$$F_3(150) = \text{Max}\ [g_3(x)+f_2(150-x)]$$

$$= \text{Max}\ [g_3(0)+f_2(150)\ ;\ g_3(50)+f_2(100)\ ;\ g_3(100)+f_2(50)\ ;\ g_3(150)+f_2(0)]$$

$$= \text{Max}\ [0+100\ ;\ \underline{36+70}\ ;\ 64+30\ ;95+0] = 106$$

هذا يعني أن نوزع 150 ألف دينار بين المشروع الثاني والمشروع الثالث كالتالي 100 و50 ألف دينار على الترتيب.

ثم نحسب F3(200) كالتالي:

$$F_3(200) = \text{Max}\ [g_3(x)\ +f_2(200-x)]$$

$$= \text{Max}[g_3(0)+f_2(200)\ ;g_3(50)+f_2(150)\ ;g_3(100)+f_2(100)\ ;\ g_3(150)+f_2(50)+\ g_3(200)+f_2(0)]$$

$$= \text{Max}\ [\underline{0+140}\ ;\ 36+100\ ;\ 64+70\ ;\ 95+30\ ;130+0] = 140$$

أي أن توزيع 200 ألف دينار على المشروع الأول هو الذي يعطي الفعالية المثلى.

ننتقل إلى المرحلة الأخيرة أي توزيع رأس المال المستثمر على كل المشروعات وبالتالي من الضروري حساب $F_4(c)$:

$$F_4(c)= \text{Max}\ [g_4(x)+f_3(c-x)]$$

في هذه المرحلة لا داعي لحساب $f_4(50)$ لأنه لا يوجد معنى من حسابهم. وبالتالي نحسب فقط $f_4(200)$.

إن أعظم قيمة هي:

$$\begin{aligned}F_4(200) &= \text{Max}\ [g_4(x)+f_3(200-x)]\\ &= \text{Max}\ [g_4(0)+f_3(200)\ ;g_4(50)+f_3(150)\ ;g_4(100)+f_3(100)\ ;\ \mathbf{g_4(150)+f_3(50)}\ ;\ g_4(200)+f_3(0)]\\ &= \text{Max}\ [0+140\ ;\ 28+106\ ;\ 56+70\ ;\ \underline{\mathbf{110+36}}\ ;\ 142+0]=\mathbf{146}\end{aligned}$$

إن أعظم قيمة هي: $g_4(150)+f_3(50)$ حيث يتم وضع المبلغ 150 ألف دينار جزائري في المشروع الرابع و 50 ألف دينار في المشروع الثالث.

أي أنه ليس من المربح توزيع أي مبلغ لكل من المشروعين الأول والثاني وبالتالي بهذا التوزيع نحصل على أعظم زيادة في إنتاج المنتجات هي 146 وحدة نسبية.

- البرمجة الديناميكية ومشكلة موازنة رأس المال:

تتلخص هذه المشكلة باختيار التوليفة المثلى من البدائل المتاحة التي تحقق أعظم عائد كلي، ويمكن توضيح صياغة هذه المشكلة بافتراض أن هناك شركة تمتلك N من المعامل وكل معمل يدرس إمكانية التوسع. وان رأس المال المخصص لكل المعامل هو C، عدد الاختيارات للمعمل i حيث أن $(i=1,2,\ldots,N)$ هو Mi وعائد الربح أو الريع Ri أما الكلفة الإضافية المتوقعة من البديل Mi للمعمل i هي $C_{i,mi}$.

إن هدف الشركة هو اختيار الخطة المجدية المناسبة لكل معمل بحيث أن العائد للمعامل جميعا هو أعظم ما يمكن:

يمكن تمثيل المراحل بالمعامل كما يمكن توضيح التكلفة لكل معمل وفقا للخطة الموضوعة والربح الناتج عن تنفيذها بالشكل التالي:

Alternative Mi	I=1		I=2			I=N	
	C_1	R_1	C_2	R_2	……..	C_N	R_N
1	C_{11}	R_{11}	C_{12}	R_{12}	……..	C_{1N}	R_{1N}
2	C_{21}	R_{21}	C_{22}	R_{22}	……..	C_{2N}	R_{2N}
3	C_{31}	R_{31}	C_{32}	R_{32}	……..	C_{3N}	R_{3N}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	…….. …….. ……..	. . .	. . .
N	C_{N1}	R_{N1}	C_{N2}	R_{N2}	……..	C_{NN}	R_{NN}

لذلك ستكون صياغة المشكلة كالآتي:

$$\text{Max } R=\Sigma R_{i\,,mi}$$

Subject to:

$$\Sigma C_{i,mi} \leq C$$

$$C_i m_i \geq 0$$

أما المعادلة التكرارية وفق الحسابات الأمامية فستكون:

$$F_{1(x1)}= \text{Max } \{R_{1,m1}\}$$
$$C_{1,m1} \leq X_1$$
$$F_i(xi)= \text{Max } \{R_{i,mi}+f_{i-1}(X_i-C_{i,mi})\}$$
$$C_{i,mi} \leq X_i$$

على فرض أن:

$R_{i,mi}$: تمثل عائد البديل M_i عند المرحلة i حيث (i=1,2,…,N)

$F_{i(xi)}$: تمثل العائد الأمثل للمراحل(i=1,2,..,n)

x_i : تمثل متغير الحالة

$C_{i,mi}$: تمثل كلفة البديل عند المرحلةi.

مثال:

شركة لديها ثلاث مصانع فرعية أرادت تطوير هذه المصانع فكانت البدائل المتاحة لديها هي كما هو مبين في الجدول أدناه فإذا علمت أن رأس المال المخصص للتطوير هو (C=5) خمسة مليون دينار أوجد أفضل خيار للشركة وأفضل عائد ممكن أن تحصل عليه من تطوير تلك المصانع.

M_i	I=1		I=2		I=3	
	C	R	C	R	C	R
1	0	0	0	0	0	0
2	1	6	2	9	1	4
3	2	7	3	10		
4			4	13		

الحل:

يتضح من السؤال أن (i=1) تمثل بيانات المصنع الأول و هي(i=2) المصنع الثاني و(i=3) هو المصنع الثالث أن البدائل المتاحة للمصانع الثلاثة هي (3,4,2)على التوالي أي بمعنى أن المصنع الأول لديه ثلاث بدائل حيث البديل الأول يمثل عدم إجراء أي تطوير فيكون كلفته صفرا وعائده صفرا أيضا حيث أن(c تمثل الكلفة وR يمثل العائد) أما البديل الثاني فهو إنفاق (مليون واحد). لتطوير المصنع الأول نحصل على عائد مقداره (ستة مليون دينار). أما البديل الثالث فهو إنفاق (اثنان مليون دينار) لنحصل على عائد مقداره (سبعة مليون دينار) وهكذا بالنسبة للمصنعين الآخرين حيث أن المصنع الثاني لديه أربعة بدائل والمصنع الثالث لديه بديلين فقط.

لذلك فلأجل التوصل إلى حل أمثل للمشكلة باستخدام البرمجة الديناميكية فإننا نقسم المشكلة إلى ثلاث أجزاء صغيرة (أي ثلاث مراحل) حيث أن المرحلة الأولى تمثل المصنع الأول والمرحلة الثانية تمثل المصنع الثاني والمرحة الثالثة تمثل المصنع الثالث. كما يمكن اعتبار رأس المال

هوvariable state فلو أخذنا المرحلة الأولى فإننا نحاول الوصول إلى أعظم عائد في ظل الكلفة للبديل فلو رمزنا ب:

C_{1j} إلى كلفة البديل عند المرحلة الأولى حيث j=1,2,3

R_{1j} تمثل عائد البديل عند المرحلة الأولى حيثj=1,2,3

$F_1(X_1)$ تمثل دالة الإيراد الناتج من اختبار السياسة المثلى عند المرحلة الأولى

$$F_1(X_1)= \text{Max } R_{1j}C_{1j}$$

ونستطيع أن نرتب البيانات في السؤال في جدول المرحلة الأولى كما يلي:

المرحلة الأولى:

State	تقييم البدائل الثلاثة				
X1	$C_{11}=0$ $R_{11}=0$	$C_{12}=1$ $R_{12}=6$	$C_{13}=2$ $R_{13}=7$	$F_1(x_1)$	رقم القرار
0	0	–	–	0	1
1	0	6	–	6	2
2	0	6	7	7	3
3	0	6	7	7	3
4	0	6	7	7	3
5	0	6	7	7	3

المرحلة الثانية:

في هذه المرحلة تتوفر أربعة بدائل ولكن رأس المال المخصص x_2 سيكون عبارة عن رأس المال المخصص للمرحة الثانية وبالمقابل فان الإيراد المناظر لها سيكون عبارة عن مجموعة الإيراد للمرحلة الثانية والأولى. فلو رمزنا إلى:

$F_2(x_2)$ لتمثل الإيراد الناتج من تطبيق السياسة المثلى للمرحلة الثانية. فإننا نحصل عليها من تطبيق هذه المعادلة:

$$F_2(X_2)= \text{Max}\ [R_2(C_{2j})+f_1(x_2-C_{2j})$$
$$0 \le C_2 \le X_2$$

تطبيق البدائل الثلاثة:

X_2	$C_{21}=0$ $R_{21}=0$	$C_{22}=2$ $R_{22}=9$	$C_{23}=3$ $R_{23}=10$	$C_{24}=4$ $R_{24}=13$	$F_2(x_2)$	رقم القرار
0	0=0+0	–	–	–	0	1
1	6=6+0	–	–	–	6	1
2	7=7+0	9=9+0	–	–	9	2
3	7=7+0	15=9+6	10=10+0	–	15	2
4	7=7+0	16=9+7	16=10+6	13=13+0	16	2،3
5	7=7+0	16=9+7	17=10+7	19=13+6	19	4

المرحلة الثالثة:

في هذه المرحلة فان المعادلة التكرارية ستكون:

$$F_3(x_3)=\text{Max}[R_{3j}(C_{3j})+f_2(x_3-C_{3j})] \qquad j=1,2$$
$$0 \le C_3 \le X_3$$

X_3	$C_{31}=0$ $R_{31}=0$	$C_{32}=1$ $R_{32}=4$	$F_3(x_3)$	رقم القرار
0	0=0+0	–	0	1
1	6=6+0	4=4+0	6	1
2	9=9+0	10=4+6	10	2
3	15=15+0	13=4+9	15	1
4	16=16+0	19=4+15	19	2
5	19=19+0	20=4+16	20	2

إذن نلاحظ عندما يكون رأس المال المخصص لتطوير المصانع الثلاثة(خمسة مليون دينار) فان أحسن خيار لها هو تخصيص 1 مليون لتطوير المصنع الأول و3مليون للمصنع الثاني و1 مليون للمصنع الثالث وبذلك يكون العائد الأمثل هو 20 مليون دينار.

- البرمجة الديناميكية ومشكلة تخطيط الإنتاج:

لتكن: X_t: الكمية المنتجة في الفترة t.

I_t: المخزون النهائي في الفترة t.

i_n: المخزون الابتدائي للفترة n.

D_t: الطلب في الفترة t.

$C_t(X_t i_t)$: تكلفة سياسة التخزين/الإنتاج.

ولدينا كهدف: تدنية تكاليف الإنتاج والتخزين:

$$\text{Min}\,\Sigma\, C_t(X_t I_t)$$

مع N: عدد فترات التخطيط، ولدينا:

$$I_t = I_{t-1} + X_t - D_t$$
$$X_t = I_t + D_t - I_{t-1}$$
$$0 \leq i_n \leq D_1 + D_2 + D_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + D_n + I_n$$
$$X_n \leq D_1 + D_2 + \ldots\ldots\ldots + D_n - i_n + I_N$$

والعلاقة الرياضية التراجعية هي كالتالي:

$$F_n(i_N) = \text{Min}\,[C_n(X_n, i_n + X_n - D_n) + F_{N-1}(i_n + X_n - D_n)]$$

المخزون النهائي للفترة الأخيرة هو I_n ، يمكننا الحصول على مخطط الإنتاج والتخزين الأمثل على شكل دالة الطلبيات المتوقعة.

مثال:

بافتراض أن دالة تكاليف الإنتاج والتخزين $c(x_t\ I_t)$ هي على الشكل الخطي $c(x_t)+hI_t$ مع:

$$C(x_t) = 2x_t + 13 \text{ et } h = 1$$

نحتاج إلى تخطيط الإنتاج عل مدى 3 فترات بوضع : $D_t=3$ وحدات لكل فترة، المخزون النهائي للفترة الأخيرة هو $I_N=0$ ، إمكانيات الإنتاج محددة ب 5 وحدات، وإمكانيات التخزين التخزين محدودة ب 4 وحدات.

نستعمل الطريقة الرياضية التراجعية من أجل حل هذا المشكل فنبدأ بالمرحلة الأخيرة للتخطيط ثم نعود إلى غاية المرحلة الأولى .

1) n=1 لدينا كمعطيات $I_N=0$

$$0 \leq i_1 \leq D_1 : x_1 = 3 - i_1$$
$$F_1(i_1) = c(x_1) = c(3-i_1) = 2x_t + 13 = 2(3-i_1) + 13$$

والذي يعطي الجدول التالي:

	القرارات		
الحالات	i_1	$X_1(i_1)$	$F_1(i_1)$
	0	3	19
	1	2	17
	2	1	15
	3	0	13

2) $n=2$: لدينا:

$0 \leq i_2 \leq 4 \; ; 3-i_2 \leq x_2 \leq 5$

$F_2(i_2)=c(x_2) + hi_1+f_1(i_1)= c(x_2)+(i_2+x_2-3)+f_1(i_2+x_2-3)$

والذي يعطي الجدول التالي:

القرارات

x_2 / i_2	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\mathbf{x_2(i_2)}$	$\mathbf{f_2(i_2)}$
0	-	-	-	19+0+19	21+1+17	23+2+15	3	38
1	-	-	17+0+19	19+1+17	21+2+15	23+3+13	2	36
2	-	15+0+19	17+1+17	19+2+15	21+3+13	-	1	34
3	13+0+19	15+1+17	17+2+15	19+3+13	-	-	0	32
4	13+1+17	15+2+15	17+3+13	-	-	-	0	31

3) $n=3$ لدينا:

$0 \leq i_3 \leq 4 \; ; 3-i_3 \leq x_3 \leq 5$

$F_3(i_3)= c(x_3) + hi_2 +f_2(i_2)= c(x_3)+(i_3+x_3-3)+f_2(i_3+x_3-3)$

والجدول كالتالي:

القرارات

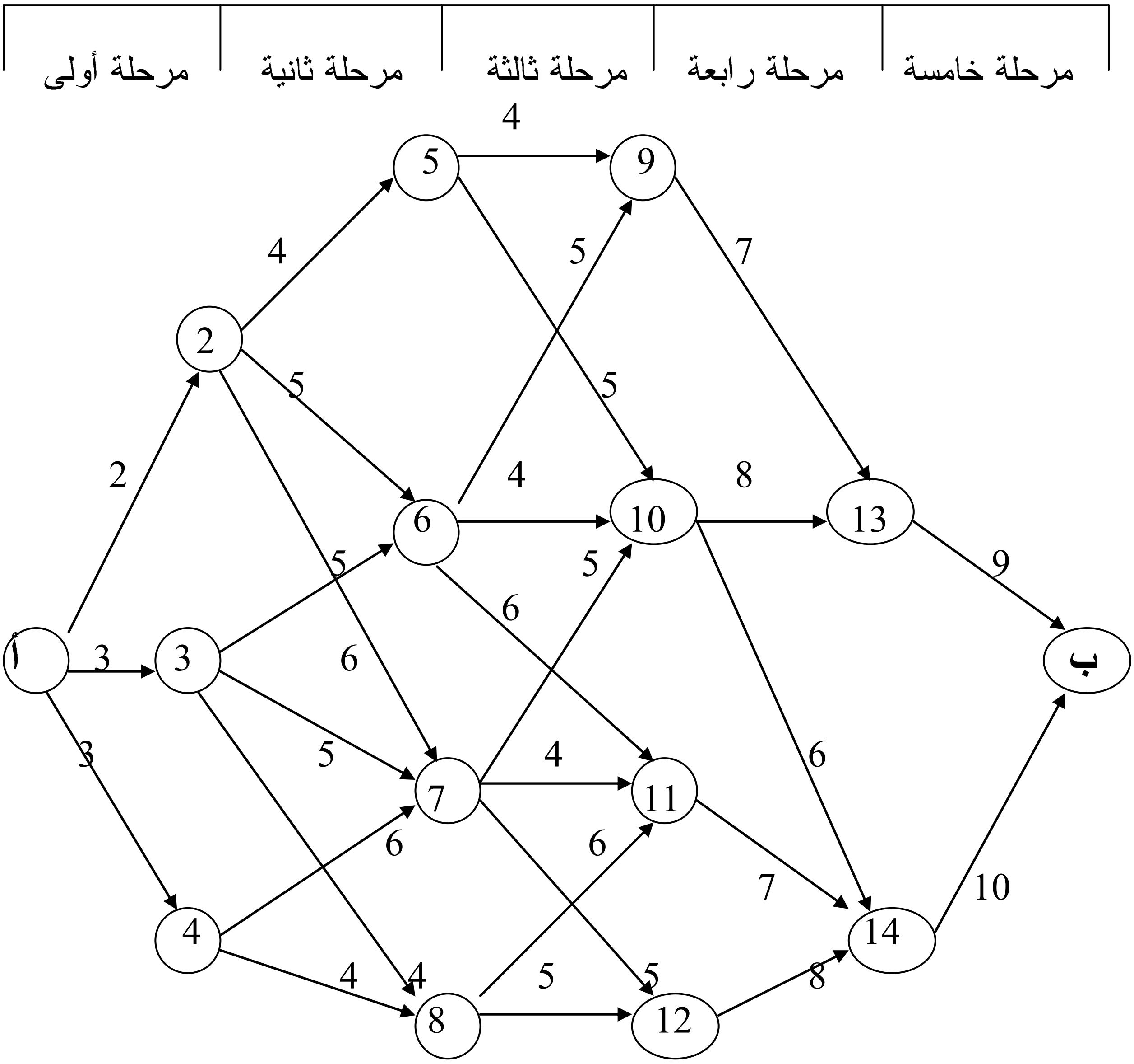
i_3 \ X_3	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**$X_3(i_3)$**	**$F_3(i_3)$**
0	-	-	-	19+38	22+36	25+34	3	57
1	-	-	17+38	20+36	23+34	26+32	2	55
2	-	15+38	18+36	21+34	24+32	27+31	1	53
3	13+38	16+36	19+34	22+32	25+31	-	0	51
4	14+36	17+34	20+32	23+31	-	-	0	50

مخطط (الإنتاج/المخزون) الأمثل يتكون من:

- تثبيت مخزون ابتدائي في بداية الفترة الأخيرة ب 0 وحدة.
- عدم إنتاج أي وحدة في الفترة الأولى مع العلم أن المخزون الأولي في هذه الفترة هو 4.
- إنتاج وحدتين في الفترة الثانية.
- إنتاج 3 وحدات في الفترة الثالثة.
- وأخيرا التكلفة الكلية للإنتاج/ مخزون هي 50.

- البرمجة الديناميكية للانتقال بين مدينتين:

مثال(4): مسافر يريد أن ينتقل من المدينة (أ) إلى المدينة (ب) ولكن لا يوجد خط سفر مباشر بين المدينتين وهذا المسافر مضطر أن يمر في مدن مختلفة ليصل إلى المدينة (ب) ويقسم هذه المدن إلى خمسة مراحل واليك المخطط الذي يوضح كيفية السفر أو الانتقال إلى المدينة المبتغاة.



.يمثل كل سهم على الشكل طريق السفر بين مدينتين وأن كل رقم يقع فوق السهم يقيس أجور السفر. إن المسافر يريد أن ينتقل من المدينة رقم (1) إلى المدن التي تليها (2،3،4) ومن ثم إلى (5،6،7،8) وهكذا وبالتالي لديه احتمالات كثيرة ويصعب تحديدها.

إن تطبيق نظرية بلمان R.Bellaman في البرمجة الديناميكية على هذا المثال، حيث ينظر إلى المرحلة الأخيرة فيوجد خيار وحيد للوصول إلى المدينة الأخيرة (ب). سواء انطلق من المدينة (13) أو (14). وتبلغ أجور السفر في هذه المرحلة (9) دينار إذا تم الانطلاق من المدينة (13) و(10) دينار إذا تم الانطلاق من المدينة (14).

لنقوم الآن بترجمة هذه الرحلة رياضيا باستخدام العلاقة التتابعية الخلفية.

نرمز ب $F_n(s)$ إلى تكلفة السياسة المثلى فيما إذا تم الانطلاق من المدينة s في المرحلة n ولغاية الوصول إلى المدينة الأخيرة (ب) (j) وإذا رمزنا c_{sj} إلى أجور السفر بين المدينتين s et j في أي رحلة كانت، فان العلاقة التتابعية الخلفية لهذه المسألة تأخذ الصيغة التالية:

$$F_n(s)= Min \{c_{sj} +f_{n+1}(j)\}$$

ونبدأ بحل هذه المسألة من المرحلة الأخيرة حيث يكون لدينا $f_5(14)$، $f_5(13)$ ومن ثم يتحرك الحل نحو الخلف (البداية) أي يتجه نحو المرحلة n=4 . إذا تقرر الانطلاق في هذه المرحلة من المدينة (9) فيوجد في هذه الحالة خط سفر وحيد باتجاه المدينة 13 وبأجور سفر مقدارها $C_{9,13}$ =7 ونكتب العلاقة التتابعية كما يلي:

$$F_4(9)= c_{9,13}+f_5(13) =16$$

وإذا تقرر أن تبدأ المرحلة الرابعة من المدينة 10 فإن هذه المدينة تتصل مباشرة مع المدينة 13 ومع المدينة 14 وتأخذ العلاقة التراجعية الصيغة التالية:

$$F_4(10)= Min \{C_{10,13}+f_5(13) ; C_{10,14}+f_5(14)\}$$
$$= Min \{ 8+9 ;6+10\}=16$$

وعليه إذا بدأت المرحلة الرابعة من المدينة 10 فيجب أن يكون خط السفر باتجاه المدينة 14. وبتعبير آخر يفضل دائما الاتجاه من المدينة 10 إلى المدينة 14 بصرف النظر عن أسلوب الوصول إلى المدينة 10.

إن هذه النتيجة لا تقضي بأن الحالة يجب أن ينطلق في جميع الحالات من المدينة 10 إلى المدينة 14 خلال رحلته، ولكنها تعني أنه إذا كانت سياسة المثلى تتطلب الوصول إلى المدينة 10 فيجب أن يتم الانطلاق من هذه المدينة باتجاه المدينة 14 بهدف الوصول إلى المدينة الأخيرة (ب) وهذا جهور مبدأ الأمثلية الذي نادى به العالم بيلمان.

ولكن تبسيط أسلوب المعالجة لكل مرحلة باستخدام جدول يوضح البدائل أو الخيارات المختلفة وكذلك القرار الأمثل الخاص بهذه المرحلة آخذين بعين الاعتبار بأن (s) تشير إلى مدينة الانطلاق و (j) الى مدينة الوصول وإن n ترتيب المرحلة ونعرض الجداول الخمسة بمراحل هذه المسألة المدروسة.

جدول المرحلة الخامسة

مدينة الوصول j / مدينة الانطلاق s	التكلفة C_{sj}	$f_5(s)$=Min	القرار الأمثل
13	9	9	الوصول إلى (ب)
14	10	10	الوصول إلى (ب)

جدول المرحلة الرابعة

j / s	$C_{sj}+f_5(j)$		$f_4(s)$=Min	القرار الأمثل
	13	**14**		
9	16	–	16	الوصول إلى **13**
10	17	16	16	الوصول إلى **14**
11	–	17	17	الوصول إلى **14**
12	–	18	18	الوصول إلى **14**

جدول المرحلة الثالثة

s \ j	$C_{sj}+f_4(j)$				$Min=f_3(s)$	القرار الأمثل
	9	10	11	12		
5	20	21	–	–	20	الوصول إلى 9
6	21	20	23	–	20	الوصول إلى 10
7	–	21	21	23	21	الوصول إلى 10 أو 11
8	–	–	23	23	23	الوصول إلى 11 أو 12

جدول المرحلة الثانية

s \ j	$C_{sj}+f_3(j)$				$Min=f_2(s)$	القرار الأمثل
	5	6	7	8		
2	24	25	27	–	24	الوصول الى 5
3	–	25	26	27	25	الوصول الى 6
4	–	–	27	27	27	الوصول الى7

جدول المرحلة الأولى

j / s	$C_{sj}+f_1(j)$			$Min=f_1(s)$	القرار الأمثل
	2	3	4		
أ	26	28	30	26	الوصول إلى 2

ويحدد الحل الأمثل من الجدول الأخير والجداول السابقة حيث يعتبر المسار الأمثل هو:

ب→13→9→5→2→أ

والتكلفة أو أجور السفر لهذه الرحلة تساوي على الترتيب :

2+4+4+7+9 =26 دينار

- خلاصة الفصل:

إن كل أسلوب رياضي أو كمي يحتوي على مزايا وسلبيات، أما من مزايا البرمجة الديناميكية فنجد أنها تحقق وفرات في الوقت والتكلفة اللازمة لإجراء العمليات الحسابية التي قد يتطلبها تعديد البدائل وتقويم كل منها بالطريقة الحسابية المباشرة. كما أنه يترتب على إتباع أسلوب البرمجة الديناميكية توفير بيانات إضافية تمكن من تقويم مجموعة البدائل الفرعية التي قد تترتب على المشكلة الأصلية أو تؤثر فيها.

ألا أنه يوجد كذلك بعض السلبيات لهذا الأسلوب من أساليب حل المشاكل هي أنه إذا كانت المشكلة تتكون من عدد من المتغيرات فان نموذج البرمجة الديناميكية يحولها إلى عدد من المشاكل كل منها في متغير واحد ويتم تحديد كل متغير لاحق من واقع النموذج الخاص به على اعتبار أن القيم المثلى التي تحددت لكل المتغيرات السابقة تمثل شرطا أساسيا يجب الحفاظ عليه عند تحديد قيمة كل متغير لاحق. ويترتب على ذلك ضرورة الاحتفاظ بالقيم المثلى للمتغيرات السابقة حيث أنها تؤثر في القيم المثلى لكل المتغيرات اللاحقة وهذا في حد ذاته يعتبر أهم نواحي القصور في البرمجة الديناميكية. فكلما زاد عدد المتغيرات وزاد عدد المراحل التي يتم فيها اتخاذ قرار بشأن

المتغيرات التي تحتويها كل مرحلة كلما أصبحت تكلفة النموذج على الحاسب الآلي كبيرة وخاصة لحاجة الاحتفاظ بالقيم المثلى للمتغيرات السابقة للرجوع إليها لاختيار القيم المثلى للمتغيرات اللاحقة.

إنما يمكن الاستعانة ببعض الطرق الرياضية للتغلب على مشكلة حجم النموذج وذلك بتخفيض أو ايجاد الحل عن طريق وسائل التقريب المتتالي.

- سلسلة تمارين رقم 2:

تمرين 1:

يوجد في مصنع ما ثلاث ورشات، ويريد صاحب المصنع إدخال آلة جديدة في كل ورشة من أجل رفع إنتاجية هذه الورشات. يتوفر لدى صاحب المصنع عدة بدائل للآلة التي يمكن أن يضيفها في كل ورشة لكن يجب أن لا يتجاوز هذا الاستثمار في الورشات الثلاث مبلغ 10 ملايين دج. تكلفة الآلات وإنتاجيتها ملخصة في الجدول التالي:

البدائل	الورشة 01		الورشة 02		الورشة 03	
	التكلفة	الإنتاجية	التكلفة	الإنتاجية	التكلفة	الإنتاجية
1	0	0	0	0	0	0
2	2	30	3	35	1	20
3	3	50	5	70	3	40
4	4	60	-	-	-	-

المطلوب: كيف يمكن لصاحب المصنع تقسيم المبلغ المستثمر (10ملايين دج) على الورشات الثلاث بهدف تعظيم الإنتاجية الإجمالية باستعمال البرمجة الديناميكية.

تمرين 02:

بافتراض أن دالة تكاليف الإنتاج والتخزين $c(x_t\ I_t)$ هي على الشكل الخطي $c(x_t)+hI_t$

مع:

$$C(x_t)=2x_t+13 \text{ et } h=2$$

نحتاج إلى تخطيط الإنتاج على مدى 3 فترات بوضع : $D_t=4$ وحدات لكل فترة، المخزون النهائي للفترة الأخيرة هو $I_N=0$ ، إمكانيات الإنتاج محددة ب 6 وحدات، وإمكانيات التخزين محدودة ب 5 وحدات.

استخرج مخطط الإنتاج و التخزين لثلاث فترات باستعمال طريقة البرمجة الديناميكية.

الفصل الرابع: التحليل الشبكي

إن ظهور نظرية الشبكات في البداية كان سنة 1735 نتيجة فضول رياضي طرح من العــالم Euler الذي حاول في إحدى جولاته عبور جسور مدينة koeinsberg السبعة (تسمي حاليا Kaginingrad) مرة واحدة فقط انطلاقا من نقطة الأصل ثم العودة إليها.

ثم بعد ذلك قام العالم الانجليزي Sylvester بعدة أبحاث في المجال سنة 1822 إضــافة إلى العالم D.Kning سنة 1936 الذي قام بنشر أول مجموعة عن نظرية الشبكات و أساليب تطبيقاتها في مختلف الميادين إلي غاية سنة 1958 حيث قام Claude berge بنشر " نظرية البيانات و خوارزميتها و تطبيقاتها في الاقتصاد " وقد تم تطــوير هذه العملية خاصة بعد سنة 1971 خصوصا في بعض دول أوروبا و الولايات المتحدة الأمريكية.

- تعريف نظرية الشبكات:

تعتبر نظرية الشبكات إحدى الوسائل المهمة والفعالة في اتخاذ القرار الأمثل من خلال نمذجة وحل مختلف المشاكل التي تواجهها بحوث العمليات فقد أصبحت تستخدم في حل و تمثيل العديد من المشاكل الواقعية خاصة في مجالات التسيير الأمثلي للموارد كأعمال الطرق وإمداد الشبكات كشبكات المياه والغاز والكهرباء... إضافة إلي أنها تسعى إلى معالجة مشاكل النقل وهي الحالات التي لا يمكن اللجـــــوء فيها إلى استعمال البرمجة الخطية كشبكات النقل.

- مفاهيم عامة:

تعريف الشبكة:

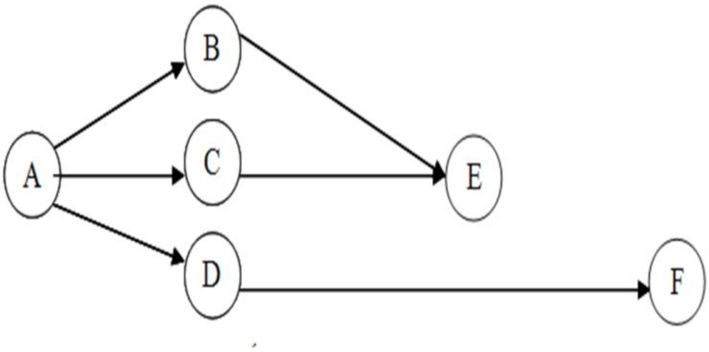
هي رسم هندسي معرف بمجموعة من النقط تسمى قمم مربوطة فيما بينها بواسطة مجموعة من الخطوط أو الأسهم تسمى روابط أو جسور، فالشبكة تتكون مجموعتين من المحددات:

+المجموعة x: تسمى بالقمم عبارة عن نقط أو دوائر صغيرة تعبر عن مراكز الاستقبال أو التوزيع... الخ.

+المجموعة:u عبارة عن خطوط أو أسطر تربط كل قمتين وهي تعبر عن طرق النقل أو الأنابيب... الخ.

وبالتالي يعبر عن البيان بالصيغة التالية: G(x,u)

مثال:



إذا كانت الشبكة تتضمن N عقدة نقول أنها ذات ترتيب N

في مثالنا G(6 ,6) هي شبكة ذات ترتيب 6.

الشبكة الموجهة:

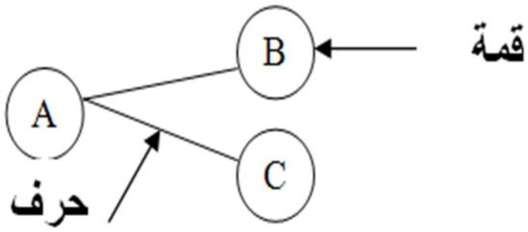
هي نظام مكون من مجموعة منتهية من العقد (x1, x2…xn) مرتبطة مع مجموعة منتهية من الأقواس.

*القوس: خط موجه أو سهم يصل بين طرف ابتدائي قمة الانطلاق (x i) وطرف نهائي قمة الوصول (xj) وقد يكون بين قمتين متتاليتين فكل قوس يحدد بطرفيه الابتدائي والنهائي مثلا أقواس الشكل السابق تكتب كمايلي :

U= {(AB), (AC), (AD), (BE), (CE), (DF)}

* الحرف (Arète): هو خط غير موجه بين قمتين وهو يكافئ قوسين متعاكستين.

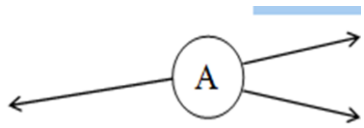
مثال:



*درجة القمة : نعني بها مجمــــوع الأقواس الذي تدخل إلى القمة و الأقواس التي تخرج منها، نرمز لها بالرمز $d(A)$ حيث: $d(A) = d(A)^{+}+d(A)^{-}$

$d(A)^{+}$:عدد الأقواس التي تخرج من القمة

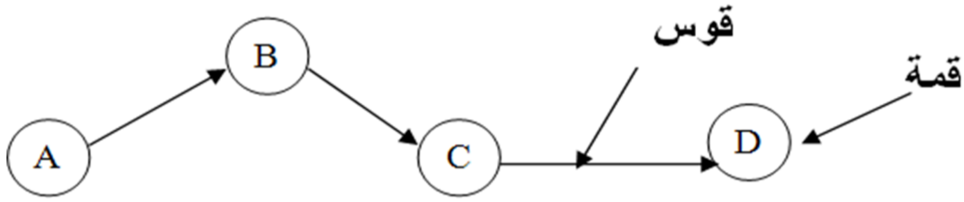
$d(A)^{-}$: عدد الأقواس التي تدخل إلى القمة



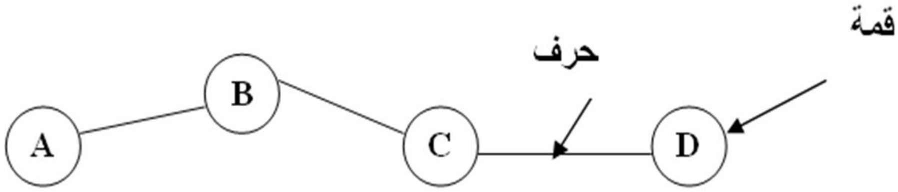
$d(A)^{+}=3$ $\qquad$ $d(A)^{-}=0$

$$d(A) = 3+0 = 3$$

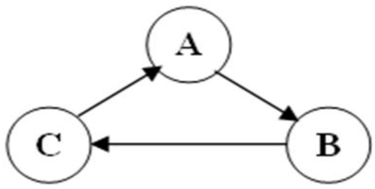
*المسار Le chemin: مجموعة متتابعة من الأقواس يكون فيها الطرف النهائي لكـــل قوس هو الطرف الابتدائي للقوس الموالي، طول المسار هو عدد الأقواس التي يتكـــون منها ويكون أوليا إذا كان لا يلـــتقي أكثر من مرة واحدة بكل قمة.



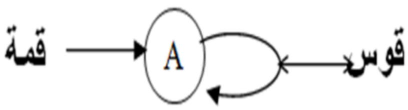
*السلسلة : هي مجموعة متتابعة من الأحرف يكون فيها الطرف النهائي للحرف هـــــو الطرف الابتدائي للحرف الموالي باستثناء الطرف النهائي للحرف الأخير.



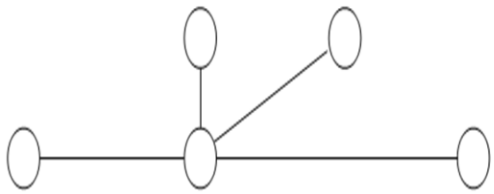
*الدارة (Le circuit) : مسار مغلق على نفسه يكون فيه الطرف النهائي للقوس الأخير متصل بالطرف الابتدائي للقوس الأول.



*العقدة:(La boucle) هي سهم طرفه الابتدائي هو نفسه طرفه النهائي أي يعـــــود إلى نفس القمة التي ينطلق منها.



*الشجرة : بيان مترابط بدون حلقة (دائرة) يحتوي علي N قمة و N-1 حرف.



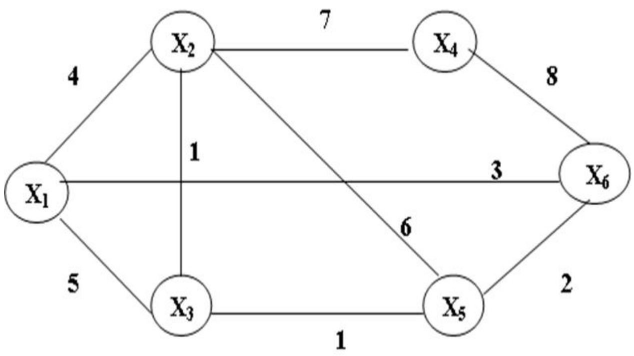
مصفوفة السعة:

في هذه الحالة تكون الشبكة مقيمة إذا كان كل قوس أو حرف فيها يمثل كمية، يعبر إما على الطول حجم الحمولة المنقولة أو تكاليف النقل ....الخ

وفي حالة التعبير عنها بمصفوفة السعة فإن كل عنصر فيها يمثل حمولة القوسين أو الحرف بين كل قمة و قمة أخرى. أما في حالة عدم وجود علاقة فإنه يتم التعبير عن ذلك بالقيمة "0"

مثال:

لتكن الشبكة التالية:



مصفوفة السعة الخاصة بهذه الشبكة هي كالتالي:

القمم	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	4	5	0	0	3
X_2	4	0	1	7	6	0
X_3	5	1	0	0	1	0
X_4	0	7	0	0	0	8
X_5	0	6	1	0	0	2
X_6	3	0	0	8	2	0

- نظرية التدفق الأعظمي:

نقصد بالتدفق الأعظمي أكبر إرسال ممكن من بين مجموعة من المنابع إلى مجموعة من المصبات تحت قيد محدودية طاقة نقل الأقواس في الشبكة ولإيجاد أعظم تدفق من بين هذه التدفقات نستخدم خوارزمية Ford-fulkerson والتي تعالج مشكلة البحث عن تمرير أكبر كمية ممكنة من المادة المراد نقلها دون أخذ بعين الاعتبار التكاليف وبهذا يكون المشكل المطروح هو البحث عن كيفية تمرير أكبر كمية والتي يجب أن لا تتعدى طاقة القوس مع مراعاة قانون Kirchoff حيث تكون مجموع التدفقات الخارجة = مجموع التدفقات الداخلة في كل قمة.

شبكة النقل هي شبكة بدون حلقة حيث أن كل رابط محدد بعدد موجب نسميه C (U) طاقة الرابط Uو تحتوي على عقدة بدون سابقة نسمبها مدخل الشبكة و عقدة بدون لواحق نسميها مخرج الشبكة.

خوارزمية:Ford-fulkerson

اكتشفت هذه الخوارزمية من طرف Ford-Fulkerson وخطواتها كالتالي:

أ- رسم البيان:

ويتم ذلك بإتباع الخطوات التالية:

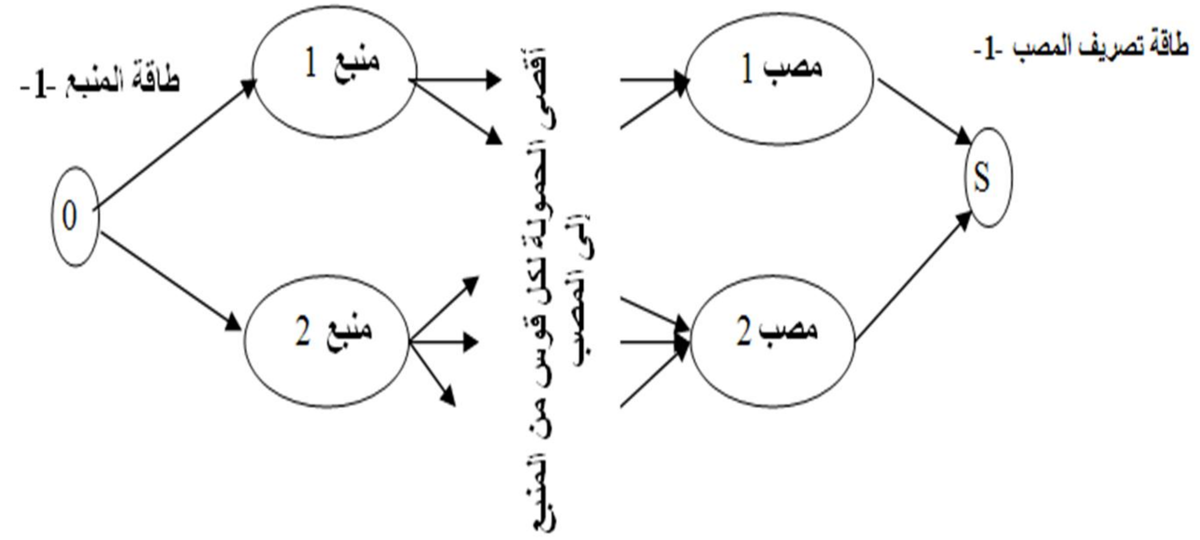
*نحدد نقطة ما نسميها مدخل البيان ونرمز لها بالرمز 0.

*نحدد قمم المنابع i ثم نصل قمة المدخل و قمم المنابع بأقواس الطاقة حمولة كل منها تساوي طاقة تصريف كل منبع.

*نحدد قمم المصبات ونصلها بالمنابع عن طريق أقواس ونحدد طاقة تصريف كل قوس.

*نحدد نقطة أخرى خارج البيان إلى يمين المصبات و نسميها مخرج البيان و نرمز لها ب.S

*نصل النقطة S بمختلف المصبات بأقواس طاقة تصريفها يساوي طاقة استقبال كل مصب ويصبح البيان كمايلي .



ب – البحث عن أمثل التدفق :

نبدأ بالأقواس التي تخرج من قمة المدخل و نقوم بإرسال تدفق مع ضرورة تسوية الوضعية عند كل قمة بحيث تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة حسب قاعدة Kirchoff دون تجاوز طاقة نقل كل قوس ، نقوم بتحسين التدفق حتى يكون كل مسار من المدخل 0 حتى المخرج Sيحتوي على الأقل على قوس مشبع واحد (تدفق كامل) وهذا حسب منهجية الخطوة 3 أدناه ، نقصد بالقوس المشبع أنه ينقل كمية تساوي تماما طاقة نقله القصوى.

ج – ننطلق من القمة 0 ونجـــري مايلي :

- نوسم القمة 0 بالإشارة. +

- نبحث عن القوس غير مشبع ينطلق من القمة i نحو القمة j و نضع بجوار القمة j العلامة .i+

- في حالة عدم وجود قوس غير مشبع ينطلق من القمة i نحو القمة j نبحث عن القوس غير معدوم (تم النقل فيه كمية معينة من قبل) ينطلق من قمة ما K ليصل إلى القمة i و نضع بجوار القمة K العلامة (i–) و نكرر العملية من جديد لبقية القمم دون إعادة توسيم القمم التي تم توسيمها من قبل .

- إذا استحالت الإجابة عن الأسئلة السابقة و كنا لم نصل إلى توسيم المخرج فإن التدفق يكون أعظميا . إذا وصلنا إلى توسيم القمة s فإن التدفق يكون غير أعظمي و ينبغي تحسينه و بالتالي

ينبغي تحديد السلسلة الموسمة و نبدأ بتحسين الحل بإضافة أو إنقاص أنسب كمية و ذلك بمراعاة عدم تجاوز الطاقة القصوى للأقواس و عدم إحداث أقواس بقيمة سالبة .

– نستمر في العملية حتى يستحيل توسيم القمة s و عندها نكون أمام تدفق أعظمي.

مثال:

مؤسسة لديها ثلاثة خزانات رئيسية للمياه هي A,B,C لتموين أربع قوى D,E,F,G ،بحيث أن الخزان A يستطيع تصريف 45 ل/ثا و الخزان B يستطيع تصريف 25ل/ثا و الخزان C يستطيع تصريف 20ل/ثا، بينما تقدر حاجيات القرية D ب 30ل/ثا و القرية E ب 10ل/ثا والقريةF ب 20ل/ثا والقرية G ب 30ل/ثا.

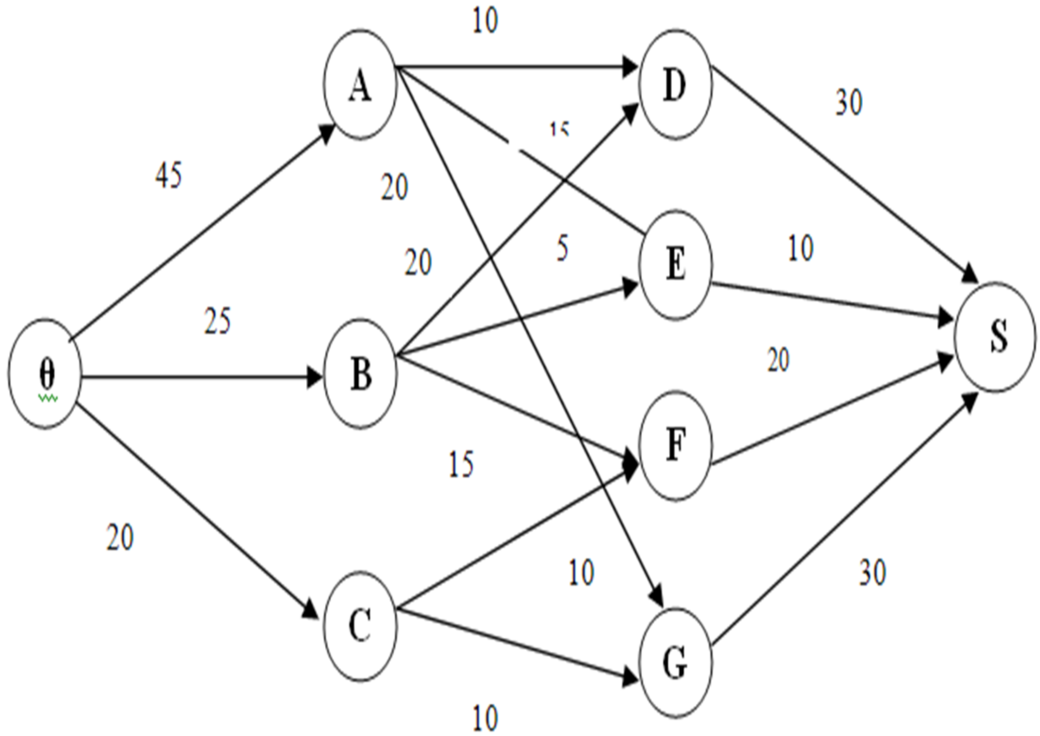
توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالقرى طاقة تصريف كل منها محدودة وهي موضحة في الجدول التالي: (طاقة تصريف الأنابيب بـــ لتر/ثانية)

المصب المنبع	D	E	F	G
A	**10**	**15**	**-**	**20**
B	**20**	**5**	**15**	**-**
C	**-**	**-**	**10**	**10**

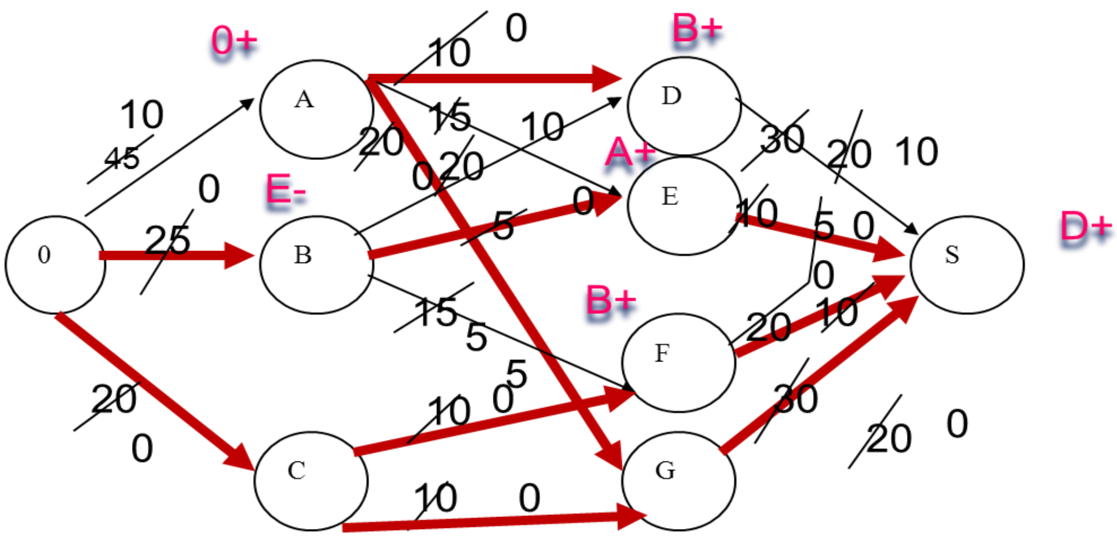
و تكون الإشكالية في البحث عن أفضل تموين ممكن لمختلف القرى عبر شبكة النقل المتاحة ،أي إيجاد أعظم تدفق ممكن من الخزانات الثلاثة إلى القرى في وجود قيود طاقة التصريف للأنابيب .

حل المثال:

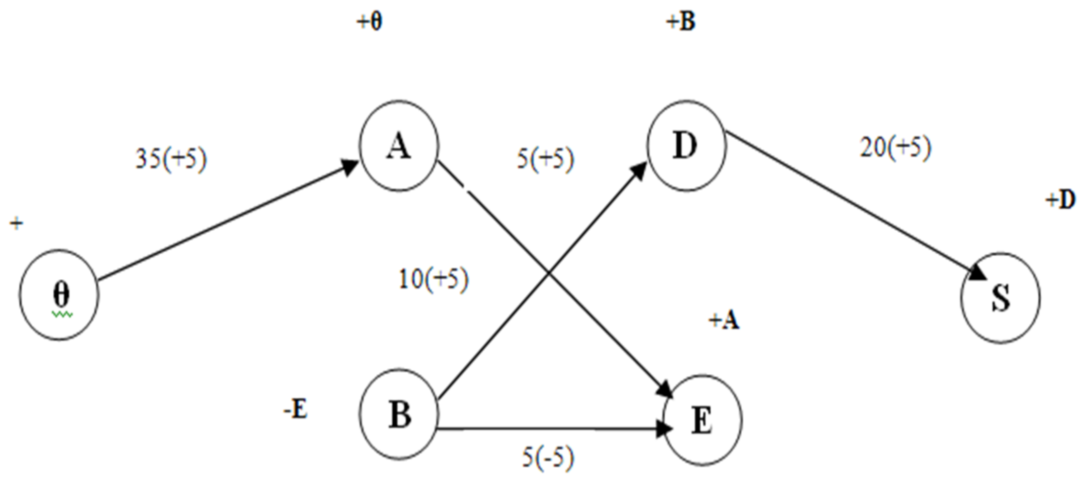
- رسم الشبكة:



- تحديد التدفق المبدئي وعملية التوسيم:



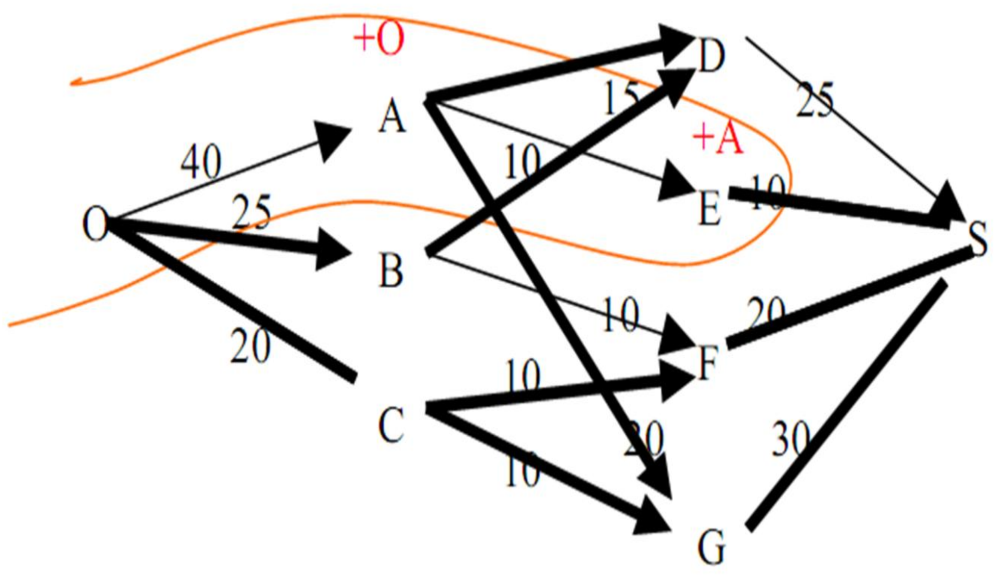
- مسار التوسيم:



و هي سلسلة تمثل لنا مسار تحسين الحل.

و لتحسين الحل ينبغي الزيادة في الأقواس DS، DB، OA، و الإنقاص في القوس BE بحيث يسمح ذلك بتحقيق قاعدة كورشوف في كل قمة و نلاحظ أنه لا يمكن تخفيضEB بأكثر من 5ل/ثا لأن ذلك يؤدي إلى قيمة سالبة لذلك نضيف القيمة 5 إلى كل قوس في السلسلة ما عدا EB فإننا نطرح منه 5 ويصبح قوس صفري إي معدوم لا ينقل عبره شيء ويصبح البيان الجديد.

ثم نقوم بعملية التوسيم من جديد في التدفق الجديد:



بعد إعادة التوسيم لم نصل إلى القمة S ومنه فإننا تحصلنا على أعظم تدفق والذي يمكن تلخيصه في الجدول التالي:

المصبات / المنابع	D	E	F	G	الكمية المصرفة
A	**10**	**10**	**–**	**20**	**40**
B	**15**	**0**	**10**	**–**	**25**
C	**–**	**–**	**10**	**10**	**20**

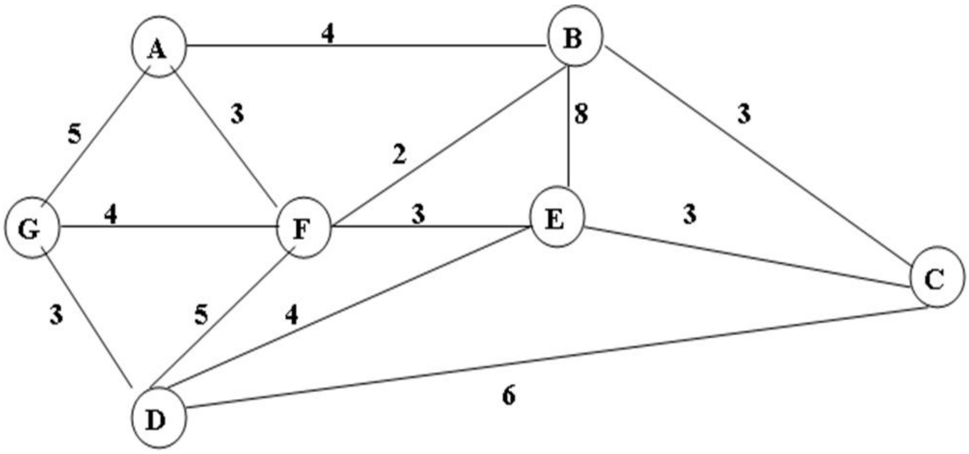
نلاحظ أن القرية D لم تلبى كل احتياجاتها إذ بقي عجز يقدر ب 5 ل/ثا كما أن الخزان A لا يشتغل بكل طاقاته.

- نظرية الشجرة المثلى:

1. **حالة الشجرة الدنيا:** (البحث عن أدنى تكلفة أو مسافة،..........)

مثال:

تريد المؤسسة الوطنية للكهرباء و الغاز لإمداد شبكة كهربائية لتغطية عدد من القرى الريفية بالكهرباء و المطلوب هو إيجاد الشبكة التي تسمح بتزويد القرى (A,B,C,D,E,F,G) بالكهرباء بأقل تكلفة.



خوارزمية (J.B KRUSKAL) 1936:

- ترتب الأحرف تصاعديا حسب حمولتها
- تأخذ الأحرف الأقل تصاعديا و ترتبها دون تكرار و دون تشكيل حلقة مع بقية الأحرف حتى الحصول على (N-1) حرف و N عقدة.
- في حالة تساوي حمولة عدد من الأحرف نضيف 2+ε2، 2+ε.............

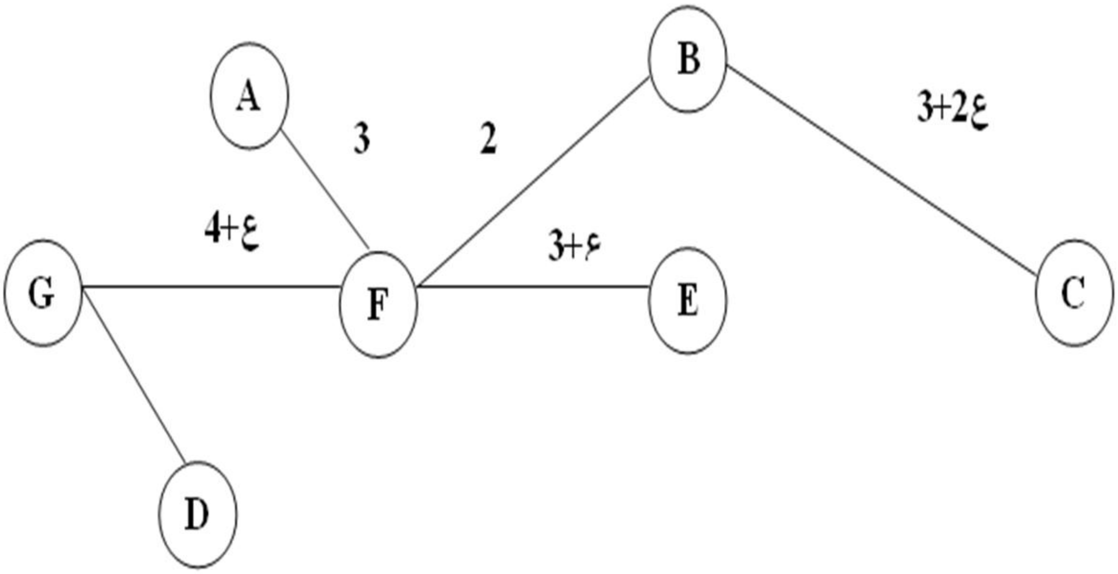
الترتيب	الحرف	الحمولة
1	BF	2
2	AF	3
3	EF	3+ε
4	BC	3+2ε
5	CE	3+3ε
6	DG	3+4ε
7	AB	4

8	FG	ε+4
9	ED	4+2ε
10	AG	5
11	DF	ε+5
12	DC	6
13	BE	8

بعد الانتهاء من الرسم نحصل على شجرة عدد أحرفها N-1 و عدد عقدها هو N و التكلفة Z

هي : 18+18ε

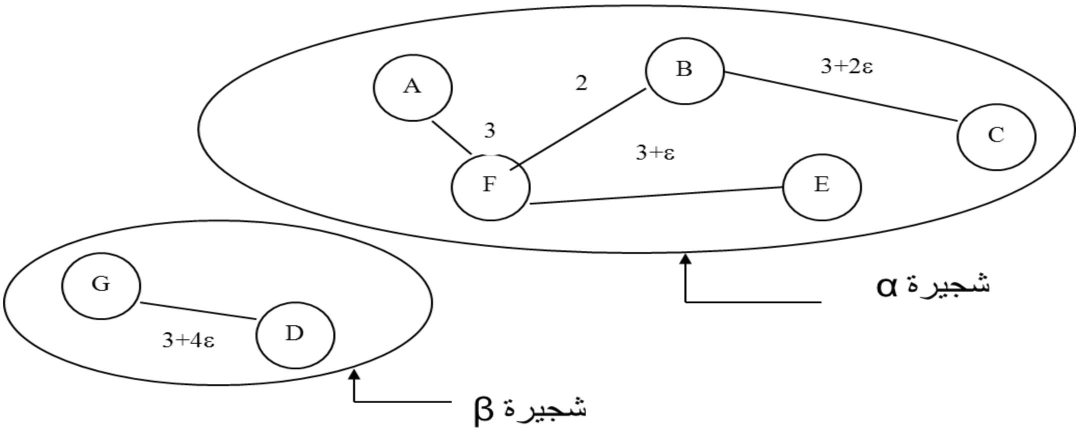
بإهمال ε نجد Z= 18 وحدة نقدية.



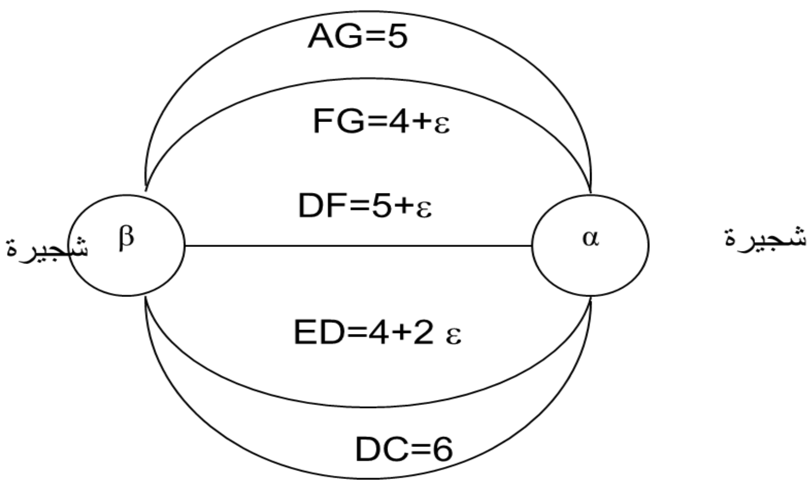
خوارزمية SOLLIN 1961

نأخذ أي قمة و نفحص الروابط التي تتصل بها و نأخذ أقلها و نرسمها مع تفادي التكرار و تفادي تشكيل حلقة:

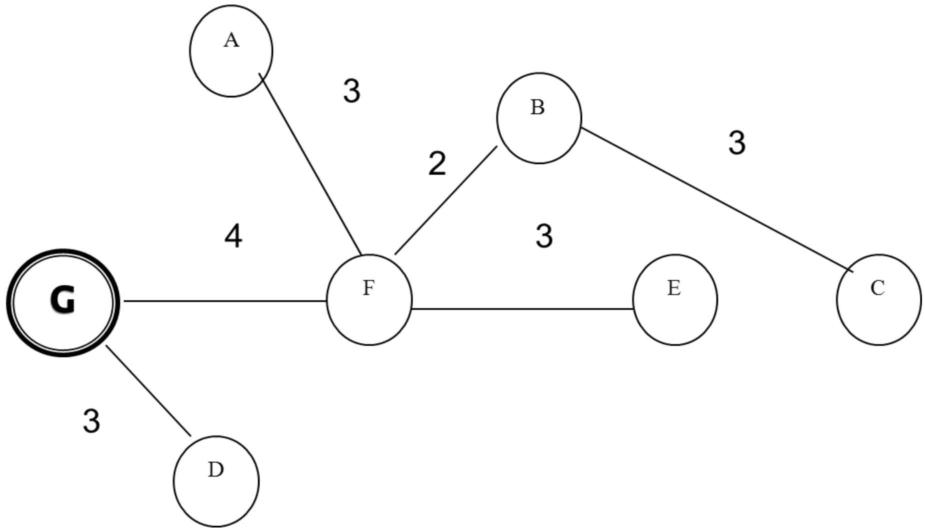
القمة	الحرف
A	نختار AF=3
B	نختارAF=2
C	نختارBC=3+2ε
D	نختارBG=3+4ε
E	نختارEF=3+ε
F	لا نختار
G	لا نختار



نلاحظ أننا حصلنا على شجرتين الأولى و تتكون من 5 عقد و 4 أحرف و الثانية B تتكون من عقدتين و حرف واحد و نقوم بفحص الروابط التي تربط بين α، β كما في الشكل :



نختار الحرف أقل كلفة و هو: FG=4+ε و تصبح الشجرة



بعد حساب التكلفة Z نجد أن z= 18 وحدة نقدية

2. الشجرة العظمى (البحث عن اكبر ربح أو عائد):

مبدأ KRUSKAL:

- نرتب الاحرف تنازليا حسب حمولتها
- نأخذ الاحرف الاكبر قيمة تنازليا و نرسمها مع الحرص على عدم التكرار و عدم رسم الحلقة و نستمر في العملية حتى نحصل على شجرة
- كما نمايز الأحرف المتساوية ب ε عدد صغير.

- نظرية المسارات المثلى

تستعمل هذه النظرية في البحث عن المسار الأمثل الذي يربط بين نقطتين محددتين من بين مجموعة من المسارات ضمن بيان موجه دون الاشتراط المرور بجميع القيم.

و بالتالي فإن هدف النظرية هو البحث عن اقصر أو اطول مسار ينطلق من القمة الابتدائية X0. ليصل إلى القمة النهائية للبيان Xn:

لحل مسائل المسارات المثلى يتم استخدام:

- خوارزمية فورد
- طريقة الفحص التتابعي

1. طريقة فورد: سميت نسبة إلى فورد أول من استعملها و تستخدم في البحث عن اقصر مسار أو أطول مسار

أ. **البحث عن اقصر مسار:**

لتكن χ_0 قيمة الانطلاق تليها χ_1 حتى الوصول إلى القمة النهائية χ_{n-1}

- العدد الكلي للقمم هو n
- نضع $\lambda_0 = 0$ أمام χ_0
- $\lambda_1 = \infty$ أمام χ_1
- نفترض أن: $c(\chi_i,\chi_j)$ هي حمولة القوس (χ_i,χ_j)

مرحلة الذهاب

في كل قمة χ_j تكون فيها $c(\chi_i,\chi_j) < (\lambda i-\lambda j)$ نعوض λ_j

$\lambda_j = \lambda_i + c(\chi_i,\chi_j)$

نستمر في العملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_j

مرحلة الإياب:

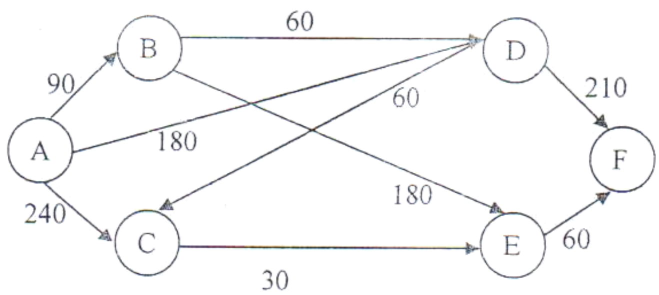
نبدأ من قمة الوصول χ_{n-1} نأخذ القوس الذي تكون فيه:

$\lambda_{n-1}-\lambda_p=c(\chi_i,\chi_j)$

و يكون هذا القوس من ضمن الأقواس التي تشكل "أقصر مسار".

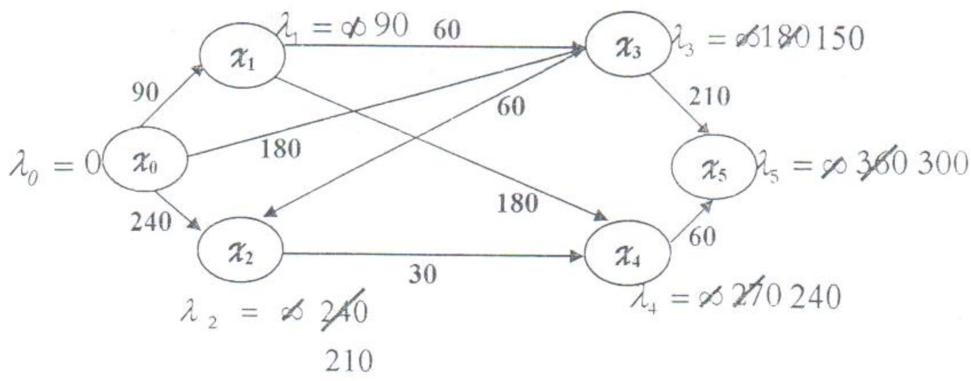
مثال:

تريد اللجنة العلمية لمعهد العلوم الاقتصادية و علوم التسيير تنظيم رحلة علمية إلى جامعة قسنطينة عن طريق البر، المسالك الرئيسية، المدن الممكن المرور بها و المسافات بين المدن يوضحها الشكل التي:



نريد تحديد اقصر طريق يمكن المرور به.

نسمي نقطة الانطلاق χ_0 و المخرج χ_5 كما هو مبين في الشكل التالي:



مرحلة الذهاب:

نتفحص الاقواس التي تنطلق من كل قمة:

من القمة χ_0: (χ_0,χ_1), (χ_0,χ_2), (χ_0,χ_3)

(χ_0,χ_3) $\lambda_1-\lambda_0=\infty-0=\infty>c(\chi_0,\chi_1)=90$

$\rightarrow \lambda_1=\lambda_0+90=0+90=90$

(χ_0,χ_2) $\lambda_2-\lambda_0=\infty-0=\infty>c(\chi_0,\chi_2)=240$

$\rightarrow \lambda_2=\lambda_0+240=240$

(χ_0,χ_3) $\lambda_3-\lambda_0=\infty-0=\infty>c(\chi_0,\chi_3)=180$

$\rightarrow \lambda_3=\lambda_0+180=180$

من القمة χ_1: (χ_1,χ_3), (χ_1,χ_4)

(χ_1,χ_3) $\lambda_3-\lambda_1=180-90=90>c(\chi_1,\chi_3)=60$

$\rightarrow \lambda_3=90+60=150$

(χ_1,χ_4) $\lambda_4-\lambda_1=\infty-90=\infty>c(\chi_1,\chi_4)=180$

$\rightarrow \lambda_4=90+180=270$

من القمة χ_2: (χ_2,χ_4)

(χ_2,χ_4) $\lambda_4-\lambda_2=270-240=30=c(\chi_2,\chi_4)$

بما أن النتيجة مساوية لطول القوس لا نغير λ_4.

من القمة χ_3: $(\chi_3,\chi_5), (\chi_3,\chi_2)$

(χ_3,χ_2) $\lambda_2-\lambda_3=240-150= c90>c(\chi_3,\chi_2)=60$

$\rightarrow \lambda_2=150+60=210$

(χ_3,χ_5) $\lambda_5-\lambda_3=\infty-150=\infty>210$

$\rightarrow \lambda_5=150+210=360$

بالنسبة (χ_3,χ_2) $j<i \leftarrow i=3, j=2$

يجب أن نعود من جديد لفحص الأقواس التي تنطلق من χ_2, و هي (χ_2,χ_4)

(χ_2,χ_4) $\lambda_4-\lambda_2=270-210=60>30$

$\rightarrow \lambda_4=210+30=240$

من القمة χ_4: (χ_4,χ_5)

$\lambda_5-\lambda_4=360-240= 120> 60$

$\rightarrow \lambda_5=240+60=300$

من القمة χ_5:

لا يوجد أي قوس من هذه القمة، بالتالي $\lambda_2=300$ هي أقصر مسافة بين نقطة المبدأ و نقطة الوصول.

في مثالنا هذا يمكن بسهولة معرفة الأقواس التي اتبعناها للوصول إلى القمة النهائية لكن في البيانات المعقدة لابد من المرور بالمرحلة الثانية و هي مرحلة الإياب.

مرحلة الإياب: و فيها نتفحص الأقواس التي تصل:

من القمة (χ_4,χ_5) , (χ_3,χ_5)

(χ_3,χ_5) : $\lambda_5-\lambda_3=300-150=150\#210$

$\lambda_5-\lambda_3 \neq c\ (\chi_3,\chi_5)$

القوس (χ_3,χ_5) لا ينتمي إلى المسار الأقصر $U\ (\chi_3,\chi_5)\ \notin U,$

(χ_4,χ_5) : $\lambda_5-\lambda_4=300-240=60= c\ (\chi_4,\chi_5)$

القوس (χ_4,χ_5) ينتمي إلى المسار الأقصر $U\in (\chi_4,\chi_5)$

من القمة χ_4: $(\chi_2,\chi_4), (\chi_1,\chi_4)$

$(\chi_1,\chi_4)\ \ \lambda_4-\lambda_1=240-90= 150 \neq 180$

$\rightarrow \lambda_4-\lambda_1 \neq c\ (\chi_1,\chi_4)$

القوس (χ_1,χ_4) لا ينتمي إلى المسار الأقصرU $(\chi_1,\chi_4)\ \notin U,$

$(\chi_2,\chi_4)\ \ \lambda_4-\lambda_2=240-210=30=c(\chi_2,\chi_4)$

القوس (χ_2,χ_4) ينتمي إلى المسار الأقصرU

$\rightarrow(\chi_2,\chi_4)\in U$

*القمة χ_3: $(\chi_0,\chi_3), (\chi_1,\chi_3)$

$(\chi_0,\chi_3)\ \ \lambda_3-\lambda_0=150-0= 150 \neq 180$

القوس (χ_1,χ_4) لا ينتمي إلى المسار الأقصرU $(\chi_0,\chi_3)\ \notin U,$

$(\chi_1,\chi_3)\ \ \lambda_3-\lambda_1=150-90= 60 = C(\chi_1,\chi_3)$

القوس (χ_1,χ_3) لا ينتمي إلى المسار الأقصرU $(\chi_1,\chi_3)\ \in U,$

القمة χ_2: $(\chi_0,\chi_2), (\chi_3,\chi_2)$

$(\chi_0,\chi_2)\ \ \lambda_2-\lambda_0=210-0= 210 \neq C(\chi_0,\chi_2)$

$(\chi_0,\chi_2)\ \notin U,$

(χ_3,χ_2)

$\lambda_2-\lambda_3=210-150= 60 = C(\chi_3,\chi_2)$

$(\chi_3,\chi_2)\ \in U$

القمة χ_1: (χ_0,χ_1)

$\lambda_1-\lambda_0=90-0=90=C(\chi_0,\chi_1)$

القوس (χ_0,χ_1) ينتمي إلى المسار الأقصر U $(\chi_0,\chi_1)\in U,$

$(\chi_0,\chi_2)\notin U,$

القمة χ_0:

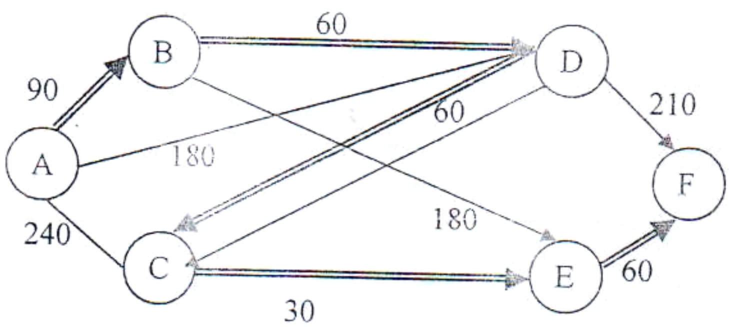
لا يوجد قوس يصل إلى χ_0 لأنها نقطة البداية و بالتالي نكون قد فحصنا كل الأقواس.

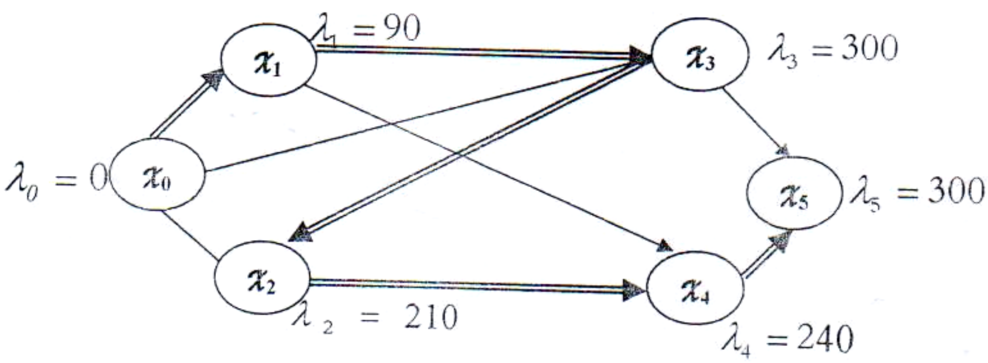
المسار الأمثل هو:

$U=[(\chi_0,\chi_1),(\chi_1,\chi_3),(\chi_3,\chi_2),(\chi_2,\chi_4),(\chi_4,\chi_5)]$

نميزه بخطوط مزدوجة

ح





حيث يجب المرور انطلاقا من المدينة A بالمدن E,C,D,B و أخيرا E

ب.البحث عن أطول مسار

للبحث عن أطول مسار نتبع جميع الخطوات السابقة إنما في اتجاه معاكس على النحو التالي:

- العدد الكلي للقمم هو n أي من قمة البداية χ_0 إلى قمة الوصول χ_{n-1}
- نضع $\lambda_0=0$ أمام χ_0
- $\lambda_i=0$ أمام χ_i

نفترض أن: $C(\chi_i,\chi_j)$ هي حمولة القوس (χ_i,χ_j)

- **مرحلة الذهاب:**

في كل قمة χ_j تكون فيها: $\lambda_j-\lambda_i< C(\chi_i,\chi_j)$

نعوض λ_j بالقيمة $\lambda_i+ C(\chi_i,\chi_j)$

نستمر في العملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_j

- **مرحلة الإياب:**

نبدأ من قمة الوصول χ_j و نطرح من القيمة λ_{n-1} قيمة λp

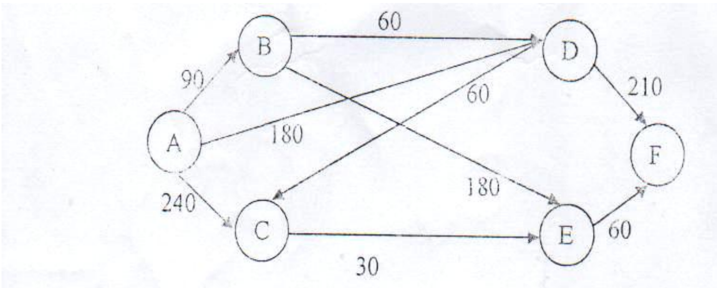
$$\lambda_{n-1}-\lambda_p= C(\chi_i,\chi_j)$$

و يكون هذا القوس من ضمن الأقواس التي تشكل أطول مسار نقوم برسمه بخط مزدوج.

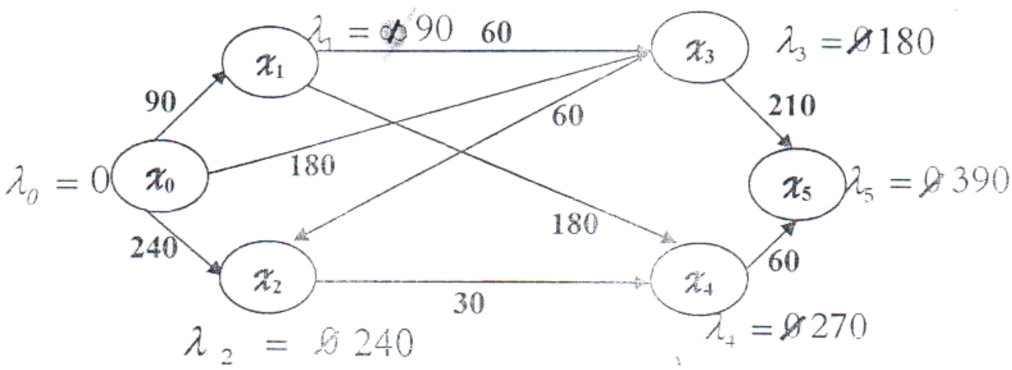
و بعد الانتهاء نستبين الخطوط المزدوجة التي تشكل أطول مسار موصل إلى القمة النهائية.

مثال:

نأخذ نفس المثال السابق لكن المطلوب هو البحث عن أطول مسار يربط بين المدينة A و المدينة F.



نضع مكان A ← χ_0، B ← χ_1 إلى غاية F ← χ_5 فنجد



مرحلة الذهاب(الأقواس التي تنطلق):

من القمة χ_0: (χ_0,χ_1), (χ_0,χ_2), (χ_0,χ_3)

(χ_0,χ_3) $\lambda_1-\lambda_0=\infty-0=\infty>c(\chi_0,\chi_1)=90$

$\rightarrow \lambda_1=\lambda_0+90=0+90=90$

(χ_0,χ_2) $\lambda_2-\lambda_0=0-0=0<240$

$\rightarrow \lambda_2=\lambda_0+240=240$

(χ_0,χ_3) $\lambda_3-\lambda_0=0-0=0<180$

$\rightarrow \lambda_3=180$

من القمة χ_1: (χ_1,χ_3), (χ_1,χ_4)

(χ_1,χ_3) $\lambda_3-\lambda_1=180-90=90>60$

$\lambda_3 \rightarrow$لا تتغير

(χ_1,χ_4) $\lambda_4-\lambda_1=0-90=-90<180$
$\rightarrow \lambda_4=90+180=270$

من القمة χ_2: (χ_2,χ_4)

(χ_2,χ_4) $\lambda_4-\lambda_2=270-240=30=c(\chi_2,\chi_4)$

بما أن النتيجة مساوية لطول القوس لا نغير λ_4.

من القمة χ_3: (χ_3,χ_5), (χ_3,χ_2)

(χ_3,χ_2) $\lambda_2-\lambda_3=240-180=60=c(\chi_3,\chi_2)$

$\lambda_2 \rightarrow$لا تتغير

(χ_3,χ_5) $\lambda_5-\lambda_3=0-180=-180<210$
$\rightarrow \lambda_5=180+210=390$

من القمة χ_4: (χ_4,χ_5)

$\lambda_5-\lambda_4=390-270=120>30$

$\rightarrow \lambda_5$ لا تتغير $\rightarrow$

من القمة χ_4:

لا ينطلق أي قوس من هذه بالتالي $\lambda_5{=}390$ هي أطول مسافة بين نقطة المبدأ و نقطة الوصول.

مرحلة الإياب: (الاقواس التي تصل)

الى القمة χ_5: (χ_3,χ_5), (χ_4,χ_5)

$\lambda_5-\lambda_4=390-270=120\neq 60$

$\lambda_5-\lambda_4 \rightarrow (\chi_3,\chi_5) \notin U$

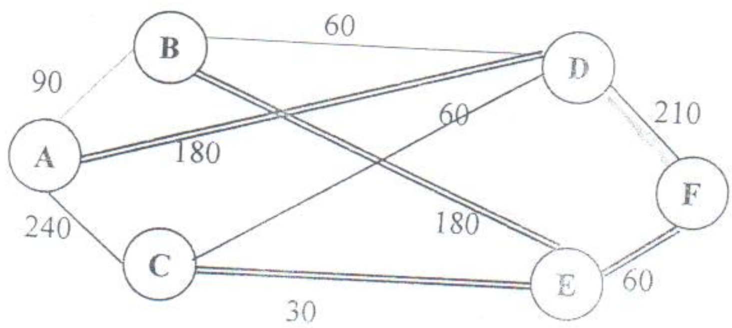
إذن القوس (χ_3,χ_5) لا ينتمي إلى المسار الأطول U

(χ_3,χ_5) $\lambda_5-\lambda_3=390-180=210= c(\chi_3,\chi_5)$

$\rightarrow(\chi_4,\chi_5) \in U$

إلى القمة χ_4: $(\chi_2,\chi_4), (\chi_1,\chi_4)$

نستمر في فحص الأقواس إلى غاية نقطة البداية و نميز الأقواس التي تنتمي إلى U بخط مزدوج كما هو في الشكل التالي:



من الشكل يظهر أن أطول مسار يوصل من القمة الابتدائية إلى القمة النهائية هو الذي ينطلق من A←D←F .بمسافة 390 كلم.

أهملنا الأقواس BE,CE,AC لأنها لا توصلنا إلى القمة F انطلاقا من القمة .A

2. طريقة الفحص التتابعي للمسارات الجزئية.

تقوم هذه الطريقة على فحص المسارات الجزئية المتتالية واختيار المسار الذي يوصل إلى القمة النهائية بأقل أو أكبر قيمة ممكنة.

أ. **حالة التدنئة:**

مثال:

نريد إنشاء طريق سيار بين المدينتين A,K و يمكن لهذا الطريق أن يمر بين بعض المدن من ضمن مجموعة أمن المدن.

الشكل التالي يظهر إمكانيات الربط بين كل مدينة و أخرى و التكاليف المتوقعة:

(χ_1,χ_4) $\lambda_4-\lambda_1=240-90=150\neq180$

$\rightarrow \lambda_4-\lambda_1\neq c(\chi_1,\chi_4)$

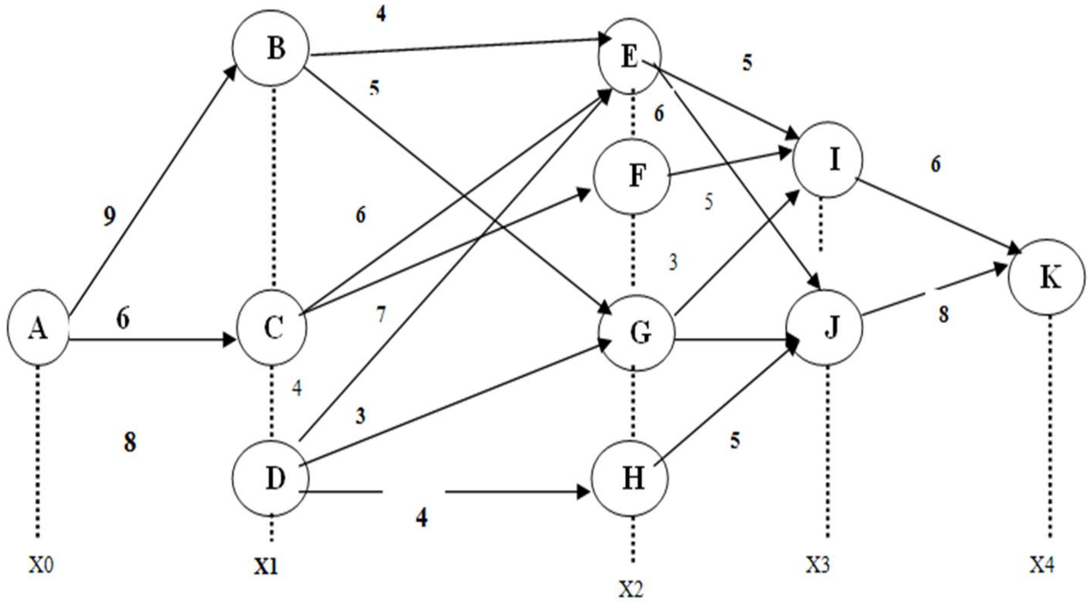
القوس (χ_1,χ_4) لا ينتمي إلى المسار الأقصر U

$\rightarrow(\chi_4,\chi_5) \notin U$

(χ_2,χ_4) $\lambda_4-\lambda_2=240-210= c(\chi_2,\chi_4)$

القوس (χ_1,χ_4) لا ينتمي إلى المسار الأقصر U

$\rightarrow(\chi_1,\chi_4) \in U$



لتحديد المسار ذي التكلفة الأقل نقوم بتقسيم البيان إلى عدة أجزاء تضم مجموعة من القمم حيث جعلنا.

$\chi_0=\{A\}$

$\chi_1=\{B,C,D\}$

$\chi_2=\{E,F,G,H\}$

$\chi_3=\{I,J\}$

$\chi_4=\{K\}$

أ. اختيار اصغر المسارات الواصلة إلى χ_1

χ_1	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الاصغر	تكلفة المسار الأصغر
B	AB	9	AB	9
C	AC	6	AC	6
D	AD	8	AD	8

3. أصغر المسارات الواصلة إلى χ_2

χ_2	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الاصغر	تكلفة المسار الأصغر
E	ABE	13	ACE	12
	ACE	12	ACE	12
	ADE	12		

F	ACF	11	ACF	11
G	ABG	14	ADF	11
	ACG	13		
	ADG	11		
H	ACH	11	ACH	11
	ADH	12		

3. أصغر المسارات الواصلة إلى χ_2

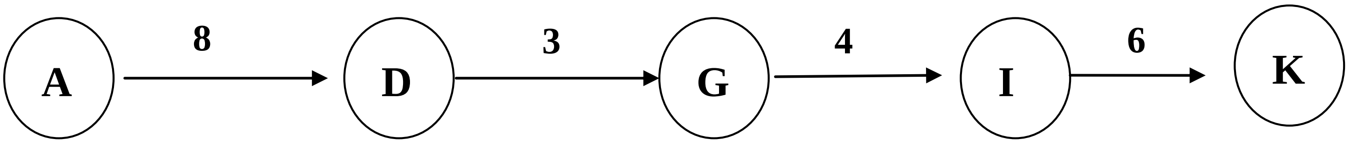
χ_2	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الاصغر	تكلفة المسار الأصغر
E	ACEi	17	ADGI	15
	ADEI	17		
	ACFI	16		
	ADGI	15		
j	ACEJ	11	ADGJ	14
	ADEJ	14		
	ACFJ	13		
	ADGJ	11		

لا يوجد المسار ACHI لأن لا يوجد على البيان.

1. اختيارات المسارات الواصلة إلى χ_4

χ_2	المسارات الممكنة	التكلفة	المسار الأصغر	تكلفة المسار الأصغر
K	ADGIK	21	ADGIK	21
	ADGJK	22		

المسار الأمثل إذن هو ADGIK بتكلفة تقدر ب 21 مليون دينار



ب.حالة التعظيم:

تستخدم طريقة الفحص ألتتابعي في حالة التعظيم بطريقة مشابهة لحالة التدنية.

الفارق فقط هو في اختيار المسار الأمثل فبدل ما نختار المسار الأصغر نختار المسار الأكبر.

- شبكات الأعمال:

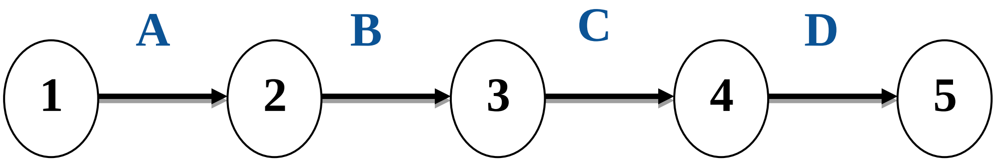
شبكات الأعمال هي تلك الأشكال البيانية والهندسية التي تعبر عن مشكلة معينة، ويتم تصميم الشبكات على الأغلب من خلال الأسهم وتعرف بالنشاط، ونقاط وقمم تعرف بالأحداث

مكونات شبكات الأعمال:

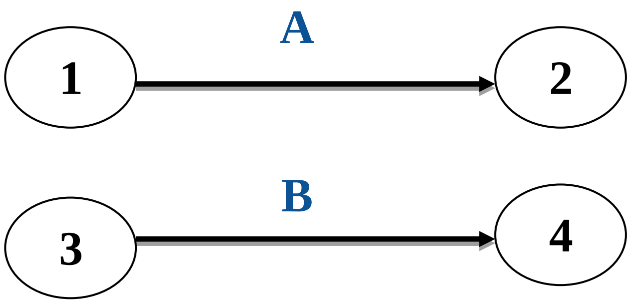
الحدث: هو عبارة عن لحظة من الزمن تدل على إنجاز بعض الأنشطة وبداية الأنشطة الأخرى، حيث أن البداية والنهاية لكل نشاط يعبر عنهما بحدثين، أحدهما يعرف بحدث البداية والآخر حدث النهاية

النشاط: هو جزء من المشروع يستغرق وقتا وله بداية ونهاية ويتطلب تخصيص مورد من موارد المشروع المراد إنجازه، ويعبر عنه من خلال سهم ينطلق من حدث البداية باتجاه حدث النهاية

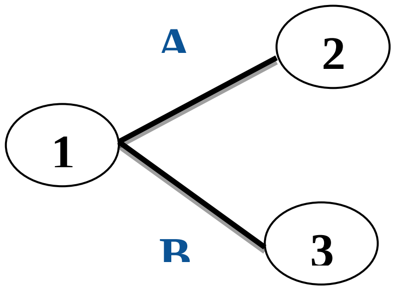
الأنشطة المتتابعة (المتعاقبة): وهي أنشطة تحدث بتسلسل وتتابع محدد، ويوضح الشكل التالي أنه لا يمكن البدء بتنفيذ النشاط (D) إلا بعد إنهاء النشاط.(C)



الأنشطة المتوازية: هي الأنشطة التي يمكن إنجازها في نفس الوقت وهي أنشطة مستقلة

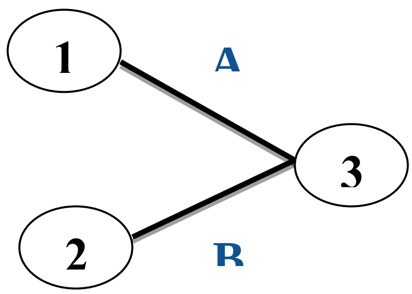


نشاطين متوازيين ومستقلين



نشاطين متوازيين مشتركين

في حدث البداية



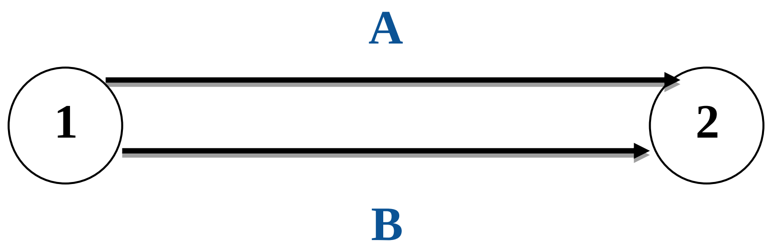
نشاطين متوازيين مشتركين

في حدث النهاية

قواعد إعداد شبكة الأعمال

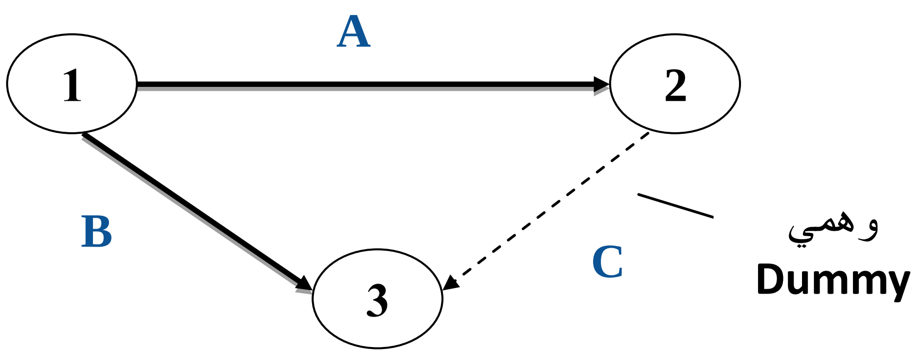
- إن لكل نشاط حدث بداية وحدث نهاية واحد. ويتم ترقيم الأحداث بشكل متسلسل.

- لا يمكن أن يبدأ أكثر من نشاط واحد من حدث واحد وينتهي في حدث واحد.



- ويمكن معالجة المشكل من خلال إدخال نشاط وهمي.

الأنشطة الوهمية: وهي أنشطة لها دور تكميلي (تعديلي) في شبكة الأعمال، وليس لها أي وجود في الواقع العملي لذلك فهي لا تستلزم أي موارد أو وقت، ويعبر عنها عن طريق سهم متقطع كما هو موضح في الشكل التالي:



- تقاطع الأنشطة غير مرغوب فيه في شبكات العمل إلا في بعض الحالات الضرورية.
- لإعداد شبكة الأعمال لمشروع ما لابد من المرور بثلاث مراحل أساسية هي:

- تحديد جميع الأنشطة التي يتكون منها المشروع.
- تحديد التسلسل أو الترتيب المنطقي الذي يجب أن تنفذ الأنشطة طبقا له.
- رسم مخطط شبكي يبين الأنشطة حسب الترتيب الذي يتم التوصل إليه في المرحلة الثانية.

- أساليب التحليل الشبكي

تعتبر طريقة المخطط الشبكي إحدى الطرق الحديثة نسبيا في إدارة المشاريع، والتي ظهرت نتيجة لحاجات عجزت عن تلبيتها الطرق التي سبقتها، ونخص بالذكر طريقة جانت «GANTT».

- أسلوب (خارطة) جانت GANTT CHART
- أسلوب المسار المحرج Critical Path Methods CPM
- أسلوب تقييم ومتابعة البرامج Program Evaluation and Review Technique PERT.

أسلوب جانت GANTT

قام هذا الأسلوب في مطلع القرن العشرين من قبل "هنري جانت" ويطلق على هذا الأسلوب اسم "المخططات الزمنية"

(Bar Chart)، وأحيانا تنسب لاسم صاحبها (GANTT-CHART)، حيث استطاع جانت وضع خرائط في إطار الجدول الزمني المحدد، حيث يعتمد بالدرجة الأولى على الزمن في تنفيذ الأنشطة التي تمت جدولتها.

بناء مخطط جانت

بعد تقسيم المشروع إلى عدة نشاطات، نقوم بتحديد الوقت اللازم لتنفيذ كل نشاط على حدى مع مراعاة التسلسل المنطقي والتتابع الزمني لهذه النشاطات.

بعد الانتهاء من عملية الجدولة يتم تمثيل كل نشاط بخط أفقي يتناسب طوله مع الزمن اللازم للتنفيذ.

المحور الأفقي للمخطط يمثل الزمن حسب المقياس المناسب (يوم، أسبوع، شهر...) اللازمة لتنفيذ المشروع وفق تسلسل معين.

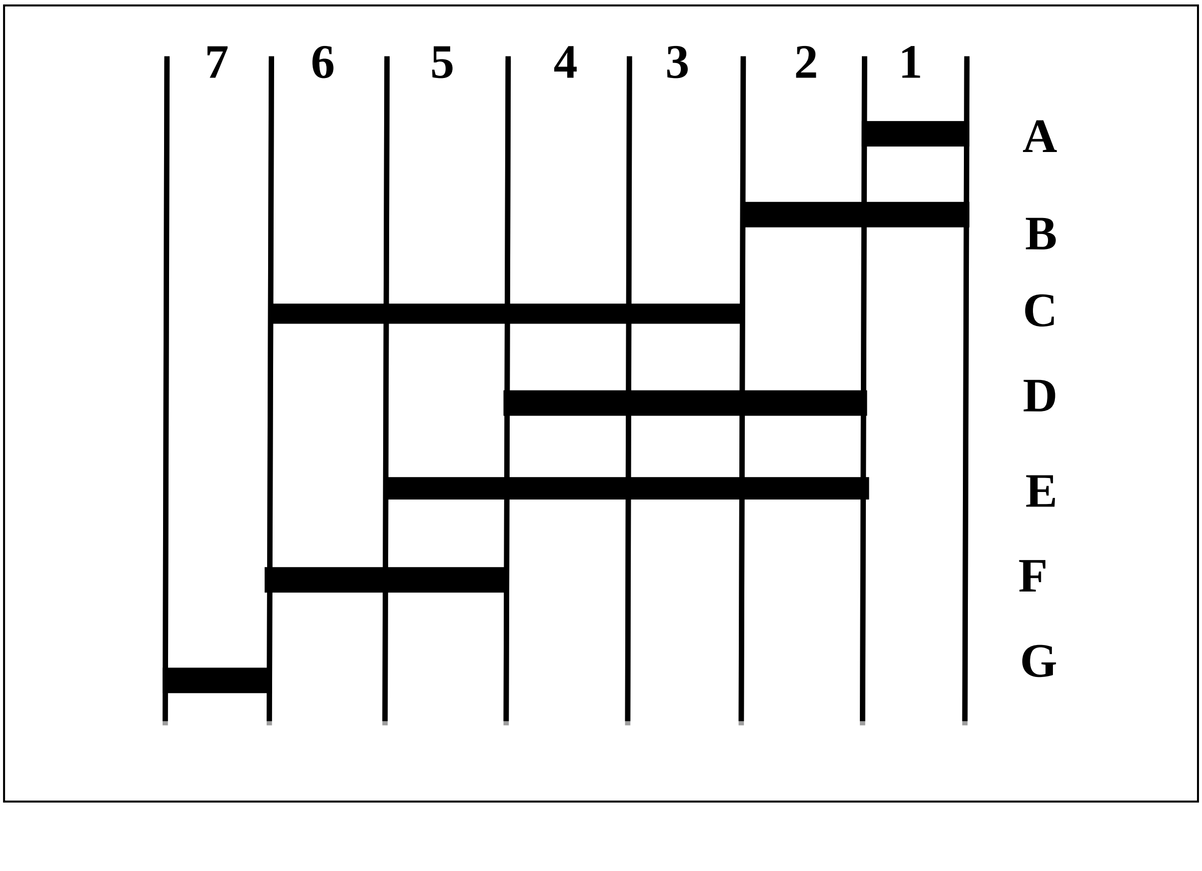
مثال:

الزمن	النشاط الموالي	المرحلة	النشاط
أسبوع	E.D	التسهيلات	A
أسبوعين	C	مقابلة المتقدمين	B
4 أسابيع	G	التعيين والتدريب	C
3 أسابيع	F	اختيار طلب الأثاث	D
4 أسابيع	G	تركيب الهواتف	E
أسبوعين	G	استلام الأثاث	F
أسبوع	Fin	الشروع في العمل	G

المطلوب: إنجاز خارطة جانت GANTT

حل المثال:

خارطة GANTT



أسلوب المسار الحرج CPM :

ظهر أسلوب CPM في عام 1957 على يد «J.E.Kelly» بغرض المساعدة في جدولة عمليات التعطل بسبب الصيانة في مصانع المواد الكيماوية. فقد أدى إلى تخفيض وقت الأعطال اللازمة لعمل برنامج الصيانة في مصانع شركة «Du Pont» بالولايات المتحدة الأمريكية من 125 ساعة إلى 78 ساعة، ومن هنا أصبح أسلوب CPM من أهم أساليب التحليل الشبكي المستعملة خاصة في المشروعات الصناعية ذات الحالات المتكررة (المشاريع الروتينية).

آلية عمل المسار الحرج CPM

- تحديد المشروع وتجزئته إلى مجموعة من الأنشطة مع إعطاء رموز خاصة (رقم-حرف) لكل نشاط.

- تحديد التسلسل لإنجاز كل الأنشطة: (من خلال جدول اللواحق).

وضع هذه العلاقات بين الأنشطة على شكل شبكة لها بداية ونهاية ويجب أن يكون للمشروع ككل نقطة بداية واحدة ونقطة نهاية واحدة.

- تحديد المسار الحرج: شبكة الأعمال تتكون من مجموعة من الأنشطة المتتالية والمتوازية والمتداخلة، بحيث كل نشاط يتطلب وقتا معينا لتنفيذه يكتب فوق السهم أو أسفله. إن تتابع هذه الأسهم يشكل لنا مسارا من أول حدث في المشروع إلى آخر حدث وأطوال هده المسارات تختلف غير أن المسار الذي يستغرق أطول وقت زمني ممكن من بين جميع مسارات شبكة الأعمال هو الذي يشكل لنا "المسار الحرج"، حيث أن مجموع أوقات هذا المسار هي التي تحدد لنا الوقت اللازم للانتهاء من المشروع، فكل النشاطات الواقعة في هذا المسار هي "نشاطات حرجة"

لتحديد المسار الحرج يتم حساب ستة أوقات وهي:

- الوقت المبكر لبداية النشاط.
- الوقت المبكر لنهاية النشاط.
- الوقت المتأخر لبداية النشاط.
- الوقت المتأخر لنهاية النشاط.
- وقت السماح الكلي.

- وقت السماح الحر.

نحسب هذه الأوقات على أربعة مراحل:

المرحلة الأولى: مرحلة الذهاب:

- الوقت المبكر لبداية كل نشاط: وهو أبكر وقت ممكن للبدء بالنشاط

الوقت المبكر لبداية النشاط = الوقت المبكر لبداية النشاط السابق له + مدة إنجاز النشاط السابق

الوقت المبكر لبداية أول نشاط في الشبكة يساوي الصفر.

عندما يكون النشاط مسبوقا بنشاطين أو أكثر فإن بدايته المبكرة يحكمها النشاط السابق له ذو أكبر نهاية مبكرة علما أن:

الوقت المبكر لبداية النشاط = الوقت المبكر لنهاية النشاط السابق له

- الوقت المبكر لنهاية النشاط: وهو أبكر وقت ممكن أن ينتهي عنده النشاط إذا بدأ في وقت البداية المبكرة :

الوقت المبكر لنهاية النشاط = الوقت المبكر لبداية النشاط + مدة تنفيذ النشاط

المرحلة الثانية: مرحلة الإياب

- الوقت المتأخر لنهاية النشاط: وهو آخر وقت ممكن إنهاء النشاط

الوقت المتأخر لنهاية النشاط = الوقت المتأخر لنهاية النشاط اللاحق – مدة تنفيذ النشاط اللاحق

إن الوقت الذي ينتهي فيه المشروع هو الوقت الأكبر بين أوقات بداية آخر الأنشطة زائدا مدة تنفيذ هذه الأنشطة، ونسميه "أبكر وقت لإنهاء المشروع“

حيث في آخر قمة يكون

الوقت المبكر لنهاية المشروع = الوقت المتأخر لنهاية المشروع

مع الأخذ بعين الاعتبار أنه: عندما يكون النشاط مسبوقا بنشاطين أو أكثر فإن نهايته المتأخرة تحكمها أبكر بداية متأخرة بينهم.

- الوقت المتأخر لبداية النشاط: هو آخر وقت يمكن للنشاط أن يبدأ فيه دون أن يؤدي ذلك إلى تأخير نهاية المشروع حيث:

الوقت المتأخر للبداية = الوقت المتأخر للنهاية — مدة تنفيذ النشاط

المرحلة الثالثة:

مرحلة تدوين كل هذه الأوقات الأربعة لكل نشاط في جدول يسمى "جدول المراقبة الزمنية للمشروع"

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة التنفيذ	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		السماح الكلي	النشاط الحرج
			للبداية	للنهاية	للبداية	للنهاية		

- السماح الكلي: هو مقدار تأخير إنهاء النشاط عن وقت نهايته المبكرة الممكن بدون أن يسبب ذلك في إطالة مدة تنفيذ المشروع

السماح الكلي = البداية المتأخرة – البداية المبكرة

السماح الكلي = النهاية المتأخرة – النهاية المبكرة

- السماح الحر: هو مقدار تأخير إنهاء النشاط عن وقت نهايته المبكرة بدون التسبب في تأخير البداية المبكرة لأي نشاط آخر، أي هو مقدار الوقت المتاح للنشاط زيادة على المدة المقدرة التي يحتاجها.

السماح الحر = البداية المبكرة لأبكر نشاط لاحق – النهاية المبكرة للنشاط

المرحلة الرابعة: تحديد المسار الحرج:

المسار الحرج هو مجموع الأنشطة المتسلسلة التي يساوي وقت السماح الكلي لكل منها الصفر (0)، وذلك من بداية المشروع إلى نهايته، وبذلك يمكن تحديد مدة إنجاز المشروع، كما قد يكون للمشروع أكثر من مسار حرج.

مثال:

رمز النشاط	الأنشطة السابقة	مدة تنفيذ النشاط (بالأشهر)
A	**-**	**1**
B	**A**	**4**
C	**A**	**2**
D	**B**	**6**
E	**C**	**2**
F	**D.E**	**1**

المطلوب هو رسم الشبكة وكذا إيجاد المسار الحرج

حل المثال

حساب الأوقات:

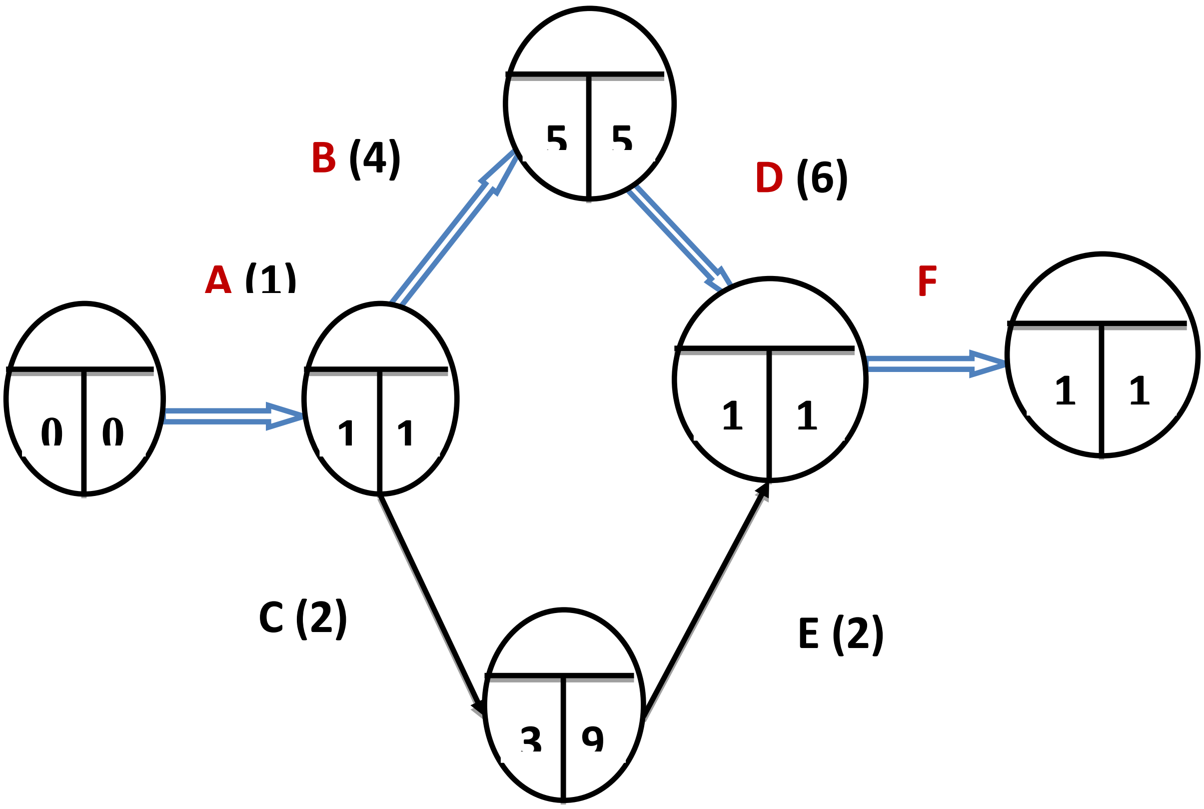
الأوقات المبكرة لبداية كل نشاط:

النشاط	الوقت المبكر للبداية
A	الوقت المبكر لبدايته = 0
B	الوقت المبكر لبدايته = 0 +1 = 1
C	الوقت المبكر لبدايته = 0 + 1 = 1
D	الوقت المبكر لبدايته = 4 + 1 = 5
E	الوقت المبكر لبدايته = 2 + 1 = 3
F	الوقت المبكر لبدايته = أكبر وقت ممكن بين (6+5 و3+2) = 11

الأوقات المتأخرة لنهاية كل نشاط:

النشاط	الوقت المتأخر للنهاية
A	الوقت **المتأخر** لنهايته = أقل قيمة بين (4–5 و 2–9) = 1
B	الوقت **المتأخر** لنهايته = 11 – 6 = 5
C	الوقت **المتأخر** لنهايته = 11 – 2 = 9
D	الوقت **المتأخر** لنهايته = 12 – 1 = 11
E	الوقت **المتأخر** لنهايته = 12 – 1 = 11
F	الوقت **المتأخر** لنهايته = أكبر وقت ممكن بين 11 + 1 =12

- شبكة الأعمال:



جدول المراقبة الزمنية للمشروع

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	مدة التنفيذ	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		السماح الكلي	النشاط الحرج
			للبداية	للنهاية	للبداية	للنهاية		
A	-	1	0	1	0	1	0	حرج
B	A	4	1	5	1	5	0	حرج
C	A	2	1	3	7	9	6	
D	B	6	5	11	5	11	0	حرج
E	C	2	3	5	9	11	6	
F	D. E	1	11	12	11	12	0	حرج

الأنشطة الحرجة التي تتوقف عليها مدة تنفيذ المشروع A,B,D,F وأي تأخر في أحدها سوف يؤدي إلى تأخر في مدة التنفيذ

مدة تنفيذ المشروع هي: 1+4+6+1= 12 شهرا.

– أسلوب تقييم ومراجعة البرامج PERT

لقد تم تقديم هذا الأسلوب في عام 1958 بواسطة Hamilton ,Booz, Allen، وهي إحدى الشركات المتخصصة في تقديم الاستثمارات الإدارية، وذلك بالاشتراك مع مكتب المشاريع الخاصة بالبحرية الأمريكية، كما وشارك أيضا في هذه الأبحاث قسم الصواريخ لشركة لوكهيد Lockheed وهي كبرى شركات تنفيذ أعمال وزارة الدفاع الأمريكية وقد كان الهدف الأساسي من هذا الأسلوب هو تصميم طريقة يتم بها تخطيط مشروع إنتاج الصواريخ "Polaris" بشكل يمكن من إحكام الرقابة على التنفيذ، وذلك لإنجاز المشروع في موعده المحدد. وقد أوضحت نتائج التطبيق أن استخدام أسلوب PERT في هذا المشروع قد أدى إلى تخفيض فترة إتمام المشروع المقدرة أصلا بواسطة المهندسين بحوالي عامين كاملين بعد أن كان التقدير المبدئي هو ستة سنوات.

تعريف أسلوب PERT

تقنية PERT هي من التقنيات المهمة تطبق خاصة في المشاريع التي تتصف بعدم التأكد والثبات التي تهدف المؤسسة من ورائها إلى تحقيق التسيير العقلاني لمواردها. فهي وسيلة لتخطيط الوقت اللازم لتنفيذ المشاريع بتقسيمها إلى أنشطة متتابعة و مترابطة لتحديد أوقات الانتهاء منها و توزيع الموارد على هذه الأنشطة.

آلية عمل PERT

تستخدم طريقة PERT بالاعتماد على عنصر الوقت في إنجاز النشاطات وعلى الفرضية الاحتمالية لتقدير فترة إنجاز نشاطات المشروع وخاصة للمشاريع التي تتصف بعشوائية التقدير للإنجاز، من خلال هذا الأسلوب يتم تقدير ثلاث أنواع من الأوقات لكل نشاط من الأنشطة التي يتكون منها المشروع وهي:

- تقدير الوقت المتفائل (a) (Optimistic time): وهو أقل تقدير زمني يمكن من خلاله الانتهاء من إنجاز النشاط مع افتراض أن الظروف والعوامل المؤثرة الخارجية والداخلية جيدة ومناسبة ولن يحدث ما يعيق سير تنفيذ النشاط.

- تقدير الوقت المتشائم (b) (Pessimistic time): وهو أطول تقدير زمني يمكن من خلاله الانتهاء من إنجاز النشاط مع الأخذ بعين الاعتبار أسوء ظروف عمل ومؤثرات خارجية وداخلية غير ملائمة تؤدي إلى حدوث صعوبات ومعوقات عمل غير متوقعة.

- تقدير الوقت الأكثر احتمالا (m) (Most likely time): وهو التقدير الزمني المتوسط والمحتمل حدوثه في الظروف العادية، ويقدر بناء على الاستفادة من مشاريع مماثلة تم تنفيذها سابقا، علما أن:

$$a \leq m \leq b$$

وبناءً على هذه الأوقات يتم حساب الوقت المتوقع لتنفيذ أي نشاط من الأنشطة التي يتكون منها المشروع، وهذا بالاعتماد على المعادلة التالية:

الوقت المتوقع = الوسط الحسابي المرجح للأوقات الثلاثة

يتم اللجوء إلى أسلوب الاحتمالات أو الأوزان، أي تقدير وزن معين لكل واحد من الأزمنة الثلاثة، كما هو موضح في الجدول التالي:

احتمال الحدوث (الوزن)	الوقت
1	الوقت المتشائم (b)
4	الوقت الأكثر احتمالا (m)
1	الوقت المتفائل (a)
6	مجموع الأوزان

$$\text{الوقت المتوقع} = \frac{\text{الوقت المتشائم} + 4 \times \text{الأكثر احتمالا} + \text{المتفائل}}{6}$$

$$Te = \frac{a + 4m + b}{6}$$

كما يجب حساب التباين لكل نشاط والذي يعكس مدى تباعد التقدير التفاؤلي عن التقدير التشاؤمي، فكلما كبر تباين النشاط الحرج كلما قل احتمال الإنجاز لهذا النشاط ضمن الوقت المتوقع لإنجازه حيث أن:

$$\sigma^2 = \left(\frac{b - a}{6}\right)^2$$

إن الكثير من المؤسسات لا تكتفي بحساب الوقت المتوقع لإنجاز المشروع بل ترغب في معرفة احتمال تنفيذ المشروع في فترة معينة قد تكون أكبر أو أصغر من الفترة المتوقعة عن طريق الشبكة، لذلك فإنه يتم حساب معامل احتمال تنفيذ المشروع في تلك الفترة، ويتم بعد ذلك استخراج قيمة الاحتمال من جدول التوزيع الطبيعي.

$$Z = \frac{D_s - D_é}{\sigma}$$

مثال

البيانات التالية خاصة بتنفيذ مشروع معين ملخصة في الجدول التالي

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتشائم	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت المتفائل
A	-	14	5	2
B	-	21	18	3
C	A	17	14	5
D	B	8	5	2
E	C-D	7	4	1
F	B	30	15	6

المطلوب

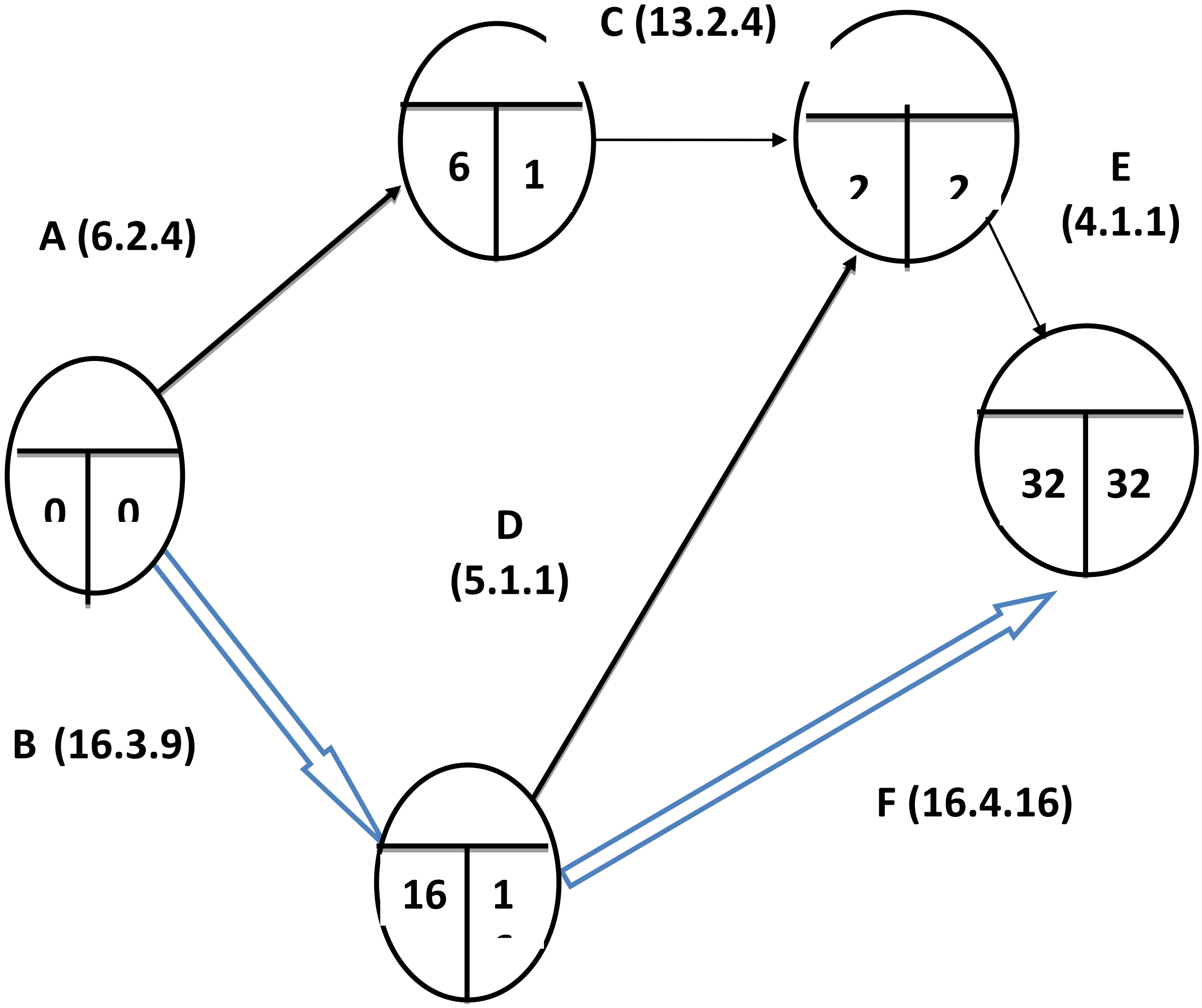
- رسم شبكة الأعمال وإيجاد المسار الحرج .
- إيجاد احتمال تنفيذ المشروع في 20 شهرا وفي 30 شهرا و35 شهرا.

حل المثال:

نقوم في البداية بحساب الأوقات المتوقعة لإنجاز كل نشاط وكذا الانحراف المعياري:

النشاط	الوقت المتوقع	الانحراف المعياري
A	6	2
B	16	3
C	13	2
D	5	1
E	4	1
F	16	4

رسم شبكة الأعمال:



يظهر من الشبكة أمام كل نشاط الوقت المتوقع و الانحراف المعياري والتباين بالترتيب.
نلاحظ أن النشاط BوF لهما نفس المدة المتوقعة 16 شهرا إلا أن انحرافهما المعياريين مختلفين حيث أن درجة التأكد من تنفيذ النشاط B في 16 شهرا أحسن من درجة التأكد من تنفيذ النشاطF

جدول المتابعة الزمنية:

اسم النشاط	الأنشطة السابقة	المدة المتوقعة	الأوقات المبكرة للبداية	للنهاية	الأوقات المتأخرة للبداية	للنهاية	السماح الكلي	النشاط الحرج
A	-	6	0	6	9	15	9	
B	–	16	0	16	0	16	0	حرج
C	A	13	6	19	15	28	9	
D	B	5	16	21	23	28	7	
E	C D	4	21	25	28	32	7	
F	B	16	16	32	16	32	0	حرج

إيجاد احتمال تنفيذ المشروع في 20 شهرا وفي 30 شهرا و35 شهرا

يجب أولا حساب الانحراف المعياري للنشاطين الحرجين

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{21-3}{6}\right)^2 + \left(\frac{30-6}{6}\right)^2}$$

$$\sigma = 5$$

– احتمال تنفيذ المشروع في 20 شهرا

$$Z = \frac{D_s - D_é}{\sigma} = \frac{20-32}{5}$$

$$=-2,8$$

من جدول الاحتمال الطبيعي القياسي نجد أن الاحتمال المقابل لــ 2.8 هو 0.003 أي 0.3%

(احتمال ضعيف جدا).

– احتمال تنفيذ المشروع في 30 شهرا

$$Z = \frac{30-32}{5} = -0.4$$

الاحتمال المرافق هو 0.345اي 34.5%

- احتمال تنفيذ المشروع في 35 شهرا:

$$Z = \frac{35 - 32}{5} = 0.6$$

الاحتمال المرافق هو 0.726 اي % 72.6

خلاصة الفصل

أصبح من المعلوم أن إدارة المشاريع بصفة عامة و التخطيط والمتابعة بصفة خاصة تحتاج إلى الأساليب الكمية و خاصة طرق الشبكات لتسهيل معرفة أفضل السبل في تحديد مسارات المشروع و تتبعه خطوة بخطوة لما يترتب عن ذلك من تقليص دورة حياة المشروع وبالتالي تقليص التكاليف المترتبة عنه.

و في الأخير يمكن القول أن هذه الأساليب ما هي إلا أدوات في يد المسير، أما نجاح أو فشل المشروع فيعتمد بالدرجة الأولى على قدرة هذا المسير على التسيير الفعال للمشروع و كذا استخدام هذه الأساليب الشبكية أحسن استخدام.

سلسلة تمارين رقم 3:

تمرين 01:

تقوم الشركة الوطنية للحبوب بتأمين احتياجات البلاد من مختلف الحبوب الأساسية، لهذه الشركة كميات مخزنة بموانئ بعض الدول الممونة، هذه الموانئ هي .A, B, C, D .أن الكميات المخزنة لكل ميناء بآلاف الأطنان هي:

الميناء المصدر	A	B	C	D
الكمية المخزنة	140	120	120	120

تريد الشركة الوطنية للحبوب نقل هذه الكميات إلى الموانئ الوطنية: E, F, G, H. قدرا ت استقبال كل ميناء بآلاف الأطنان هي:

الميناء المستقبل	E	G	F	H
قدرة الاستقبال	120	100	110	170

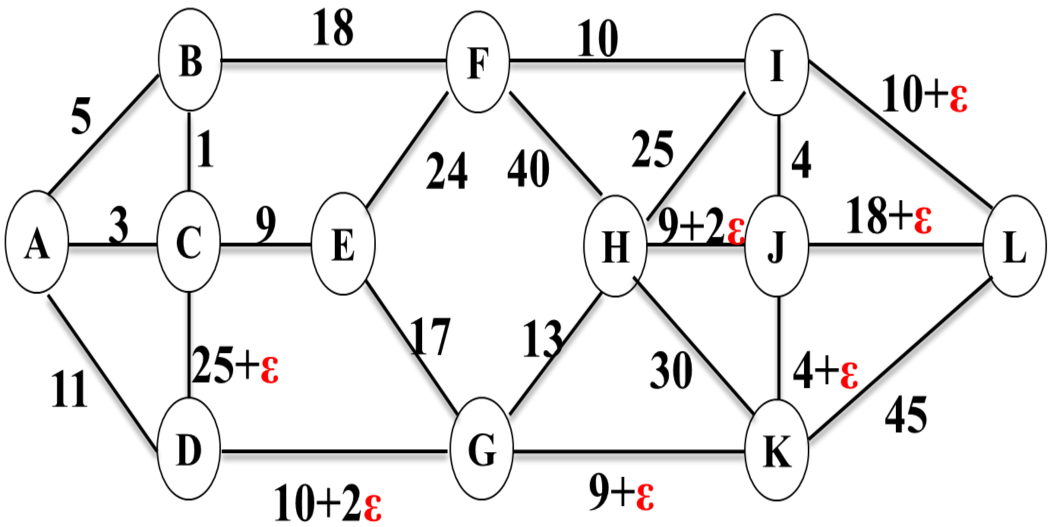
لنقل هذه الكميات من الميناء المصدر إلى الميناء المستقبل، تم توفير عدة باخرات تختلف طاقة نقلها، وهي موضحة في الجدول التالي بآلاف الأطنان:

	E	F	G	H
A	90	50	40	-
B	70	60	30	-
C	-	40	60	100
D	-	40	60	100

تمرين 2:

في إطار برنامج الكهربة الريفية التي تقوم بها إحدى الولايات طلب من شركة سونلغاز إنشاء محطة لتوليد الكهرباء في إحدى القرى المعنية بعملية توصيل الكهرباء.

بعد دراسة العراقيل الجغرافية توصلت المؤسسة إلى إمكانيات الربط المختلفة والمسافات بين كل قرية وأخرى كما هو موضح في الشكل التالي.



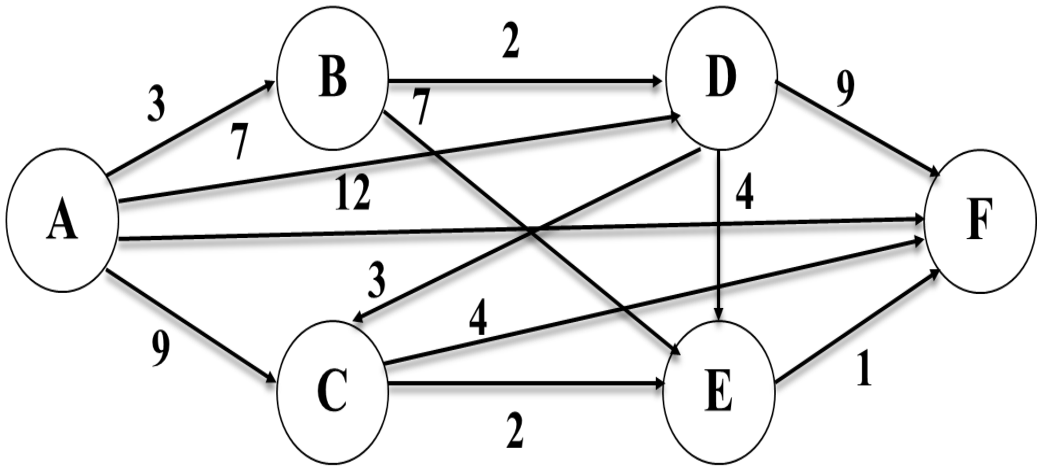
تكلفة الخط الكيلومتري الواحد هي 10 آلاف د.ج.

المطلوب ما هي أقل تكلفة تتحملها سونلغاز ؟

تمرين 3

تريد شركة نقل خاصة بالتموين بالمواد الغذائية إحداث خط نقل دائم لتموين المنطقة F بالمواد الغذائية انطلاقا من العاصمة الاقتصادية A.

الشبكة التالية تمثل شبكة الطرق الممكن المرور بها والمسافة بين كل مدينة وأخرى بمئات الكيلومترات.



تمرين 4:

تظهر البيانات التالية الأنشطة الخاصة بتنفيذ إحدى المشروعات ومدة تنفيذها بالأشهر:

النشاط	النشاط السابق	الوقت المتفائل	الوقت الأكثر احتمالا	الوقت المتشائم
A	–	5	6	7
B	–	10	14	18
C	A	12	15	18
D	B,C	3	4	5
E	A	16	17	18

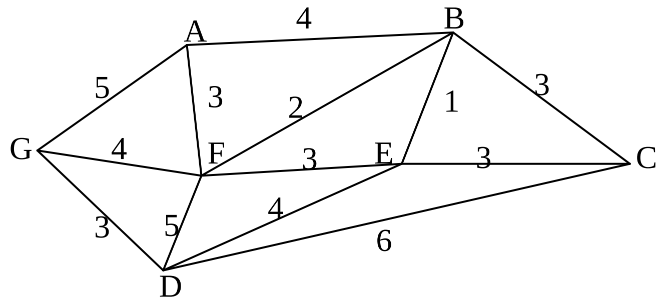
- أرسم شبكة الأعمال.
- حدد الوقت المتوقع لإتمام المشروع.
- استخرج جدول المتابعة الزمنية وحدد الأنشطة الحرجة.
- أوجد احتمال إنجاز المشروع في 26 شهرا.

مواضيع امتحانات

الموضوع 1:

تمرين 1:

يمثل البيان G=(X,U) مشروع ربط الكهرباء بين عدة منازل وأحرفه مقيمة بتكاليف التوزيع.



أكتب مصفوفة السعة ثم أوجد من خلال هذا البيان الشجرة ذات التكاليف الأدنى باستعمال طريقة Solin.

تمرين 2:

تملك مؤسسة بترولية ما 5 آبار بترول (A,B,C,D,E) تستخرج في الشهر الكميات التالية من البترول (50,75,30,25,60) ألف طن. تصدر هذه الشركة البترول لأربع بلدان (w,x,y,z) طلبها مقدر بـــ: (60,40,75,25) على التوالي.

الكميات القصوى التي يمكن نقلها من كل بئر إلى كل بلد ملخصة في الجدول التالي:

الكمية المطلوبة	E	D	C	B	A	الآبار / البلدان
60	-	-	25	30	20	w
40	-	10	-	20	15	x
75	20	05	15	-	30	y
25	35	15	-	10	-	z
	60	25	30	75	50	الكمية المعروضة

استخرج مخطط التموين الأساسي وقيمه إن كان أمثليا ثم حسنه إن تطلب الأمر.

الموضوع 2:

تمرين 01:

تدير مؤسسة زراعية ثلاث مزارع (A,B,C) مساحتها بالهكتار هي (700، 600، 300) على الترتيب. تريد هذه المؤسسة زراعة هذه المزارع بثلاث أنواع مختلفة من المحاصيل هي (K, L, M) وتبين المعلومات الموجودة في الجدول التالي عدد الوحدات التي ينتجها كل هكتار، وكذلك الحد الأقصى للمبيعات، وحاجة كل هكتار لمياه الري، والربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من مختلف المحاصيل الثلاث:

الربح في الوحدة	الماء لكل هكتار	أقصى المبيعات	الوحدات في الهكتار	المحصول
6	5	20000	25	K
4	4	25000	20	L
2	3	8500	21	M

فإذا كان الماء المستهلك من العوامل المهمة وكان الماء المتاح في المزارع (A,B,C) هو (2800,2000,1000) لتر مكعب على التوالي. ضع النموذج الرياضي لتحديد مخطط الفلاحة المثالي.

تمرين 02:

بافتراض أن دالة تكاليف الإنتاج والتخزين $c(x_t\ I_t)$ هي على الشكل الخطي $c(x_t)+hI_t$ مع:

$$C(x_t)=2x_t+13 \text{ et } h=2$$

نحتاج إلى تخطيط الإنتاج على مدى 3 فترات بوضع : $D_t=4$ وحدات لكل فترة، المخزون النهائي للفترة الأخيرة هو $I_N=0$ ، إمكانيات الإنتاج محددة ب 6 وحدات، وإمكانيات التخزين محدودة ب 5 وحدات.

استخرج مخطط الإنتاج و التخزين لثلاث فترات باستعمال طريقة البرمجة الديناميكية.

الموضوع 3:

أسئلة نظرية:

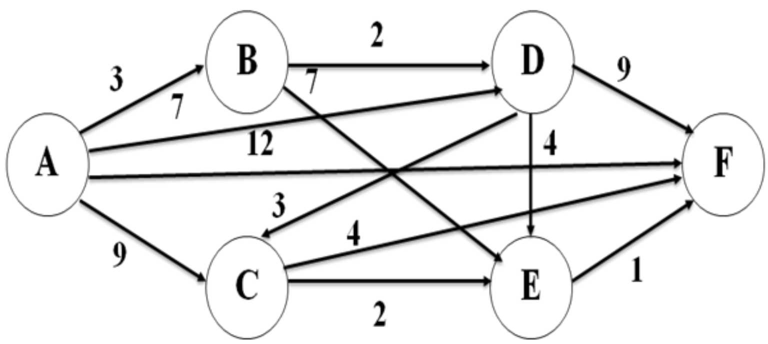
في نظرية الألعاب الإستراتيجية، ما المقصود بالاستراتيجيات المختلطة ومتى يتم استعمالها؟

ما هو الفرق بين البرمجة الخطية والبرمجة الديناميكية؟

في ماذا تستعمل طريقتي كريسكال وسولان وما هو الفرق بينهما؟

تمرين:

يلخص الشكل التالي مختلف المهام اللازمة لإنجاز مشروع معين، حيث تمثل الأسهم مختلف المهام والعقد حوادث بدأ وانتهاء هذه المهام. أما الأرقام الموجودة على الأسهم فتمثل مدة إنجاز كل مهمة.



المطلوب هو إيجاد مدة إنجاز المشروع كله ورسم جدول المتابعة الزمنية وتحديد الأنشطة الحرجة.

الموضوع 4:

سؤال نظري

ما هو الفرق بين مشكل النقل والتدفق الأعظمي؟

تمرين 1:

يقوم مقاول بإنجاز عمارات سكنية في ثلاثة أماكن مختلفة، وللاستفادة من بعض المزايا المتفق عليها في دفتر الأعباء، يريد هذا المقاول تخفيض فترة الإنجاز، ولأجل ذلك يفكر في تدعيم كل مكان عمل بآلة جديدة سوف تقوم بتخفيض مهلة الإنجاز بالأيام لتصبح كما هو موضح في الجدول التالي:

	مكان 01	مكان 02	مكان 03
الآلة 01	14	12	10
الآلة 02	10	16	12
الآلة 03	20	17	08

المطلوب هو مساعدة المقاول في تعيين الآلات في الأماكن المختلفة بما يخفض من مهلة الإنجاز.

تمرين 2:

مؤسسة ما لها ثلاث مصادر إنتاج متمثلة في الآتي:

المصدر	1	2	3
الكمية المنتجة/ ألف وحدة	5000	6000	2500

تريد توزيعها على أربع مراكز طلب المتمثلة في الآتي:

المركز	1	2	3	4
الكمية المطلوبة/ ألف وحدة	6000	4000	2000	1500

يربط بين مصادر الإنتاج ومراكز الطلب مجموعة من وسائل النقل. طاقة نقلها ملخصة في الجدول التالي:

	مركز الطلب 1	مركز الطلب 2	مركز الطلب 3	مركز الطلب 4
المصدر 1	2000	1500	1750	500
المصدر 2	2500	2650	200	–
المصدر 3	1200	–	700	950

المطلوب:

استخرج مخطط نقل أكبر كمية ممكنة من مصادر الإنتاج إلى مراكز الطلب.

الموضوع 5:

تمرين:

تتنافس مؤسستان تجاريتان (A,B) على كسب أكبر حصة سوق ممكنة، حيث أن ما تكسبه المؤسسة الأولى تخسره المؤسسة الثانية. للمؤسسة A ثلاث استراتيجيات (a1,a2,a3) وللمؤسسة B كذلك ثلاث استراتيجيات (b1, b2, b3) وعوائدها موضحة في الجدول التالي:

المؤسسات		المؤسسة B		
	الاستراتيجيات	b1	b2	b3
المؤسسة A	a1	4	-1	0
	a2	-1	6	2
	a3	3	0	1

إذا علمت أن الأرقام الموجبة هي أرباح بالنسبة للمؤسسة A وخسائر بالنسبة للمؤسسة B.
استخرج نموذج البرمجة الخطية المناسب لكل مؤسسة من أجل تحديد الاستراتيجيات التي يجب إتباعها طول فترة التنافس؟

أسئلة نظرية:

1- ما هي مختلف أنواع البرمجة بالأهداف وما الفرق بينها؟

2- في نظرية الألعاب الإستراتيجية، ما المقصود بالاستراتيجيات المختلطة ومتى يتم استعمالها؟

3- ما الفرق بين كمية الطلب الاقتصادية وكمية الإنتاج الاقتصادية في نظرية تسيير المخزون؟

الموضوع 6:

تمرين 1

تقوم مؤسسة صناعية بإنتاج 3 أنواع من المنتجات (P1,P2,P3) باستعمال ثلاث طرق (A,B,C).

الجدول -1- يبين تكاليف إنتاج الوحدة الواحدة من الأنواع الثلاث من المنتجات باستعمال كل طريقة:

	P1	P2	P3
الطريقة A	60	50	50
الطريقة B	80	70	75
الطريقة C	-	65	60

الجدول -2- يبين المردود الساعي من كل نوع من المنتوجات الثلاث باستعمال كل طريقة. والطاقة المتاحة في كل طريقة.

	P1	P2	P3	الطاقات المتاحة
الطريقة A	5/2	10/3	10/3	600
الطريقة B	5/4	5/3	10/7	540
الطريقة C		2	5/2	360

الطلب على الأنواع الثلاث من المنتوجات هو على التوالي: 500 وحدة، 1200 وحدة، 1500 وحدة. حيث أن أي نقصان في الطلب يؤدي إلى خسارة الزبائن وأي زيادة تؤدي إلى تكاليف إضافية.

المطلوب: إذا كانت أسعار بيع الوحدة الواحدة من المنتوجات الثلاث هي على التوالي: 100 و.ن، 90 و.ن، 95 و.ن:

1- استخرج نموذج البرمجة الخطية الذي يحدد مخطط الإنتاج الأمثل.

تمرين 2

بافتراض أن دالة تكاليف الإنتاج والتخزين $c(x_t\ I_t)$ هي على الشكل الخطي $c(x_t)+hI_t$ مع:

$$C(x_t)=2x_t+13 \text{ et } h=0.5$$

نحتاج إلى تخطيط الإنتاج على مدى 3 فترات بوضع الطلب : $D_t=4$ وحدات لكل فترة، المخزون النهائي للفترة الأخيرة هو $I_3=1$ ، إمكانيات الإنتاج محددة ب 4 وحدات، وإمكانيات التخزين محدودة ب 5 وحدات.

استخرج مخطط الإنتاج و التخزين لثلاث فترات باستعمال طريقة البرمجة الديناميكية.

الموضوع 7:

سؤال نظري:

متى يتم استعمال طريقة Ford وماهي مراحلها؟

تمرين 1:

بافتراض أن دالة تكاليف الإنتاج والتخزين $c(x_t\ I_t)$ هي على الشكل الخطي $c(x_t)+hI_t$ مع:

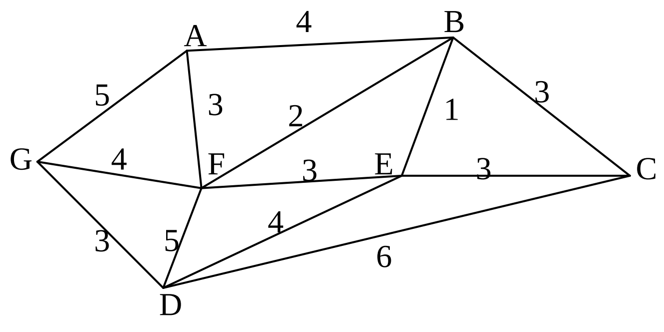
$$C(x_t)=2x_t+13 \text{ et } h=1.5$$

نحتاج إلى تخطيط الإنتاج على مدى 3 فترات مع العلم أن الطلب لكل فترة هو كالتالي : $D_1=4$، $D_2=5$، $D_3=3$ ، المخزون الابتدائي للفترة الأولى هو $i_1=2$ والمخزون النهائي للفترة الأخيرة هو $I_3=1$ ، إمكانيات الإنتاج محددة بــ 4 وحدات، وإمكانيات التخزين محدودة ب 5 وحدات.

استخرج مخطط الإنتاج و التخزين الأمثلي للفترات الثلاث باستعمال طريقة البرمجة الديناميكية.

تمرين 2:

يمثل البيان $G=(X,U)$ مشروع ربط الكهرباء بين عدة منازل وأحرفه مقيمة بتكاليف التوزيع. أوجد من خلال هذا البيان الشجرة ذات التكاليف الأدنى باستعمال طريقة Solin.



الموضوع 8:

أسئلة نظرية:

ما هي استخدامات نظرية شبكات الأعمال؟

ما المقصود بمعامل الاستخدام في نظرية خطوط الانتظار وماذا يحدث إذا تجاوز الواحد (1)؟

تمرين:

تتنافس مؤسستان تجاريتان (A,B) على كسب أكبر حصة سوق ممكنة، حيث أن ما تكسبه المؤسسة الأولى تخسره المؤسسة الثانية. للمؤسسة A استراتيجيتين (a1,a2) أما للمؤسسة B ثلاث استراتيجيات (b1, b2, b3) وعوائدها موضحة في الجدول التالي:

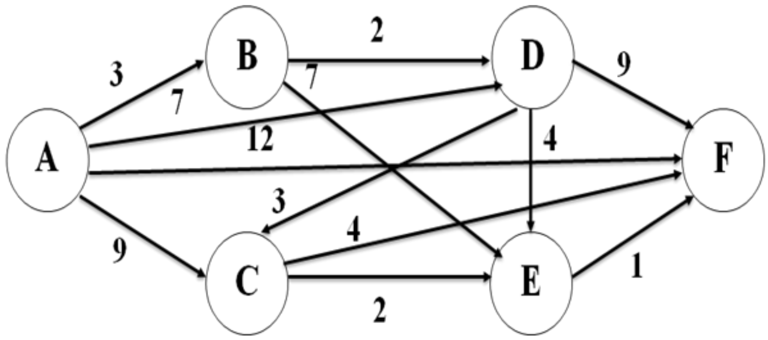
المؤسسات		المؤسسة B		
	الاستراتيجيات	b1	b2	b3
المؤسسة A	a1	4	-1	0
	a2	-1	6	2

إذا علمت أن الأرقام الموجبة هي أرباح بالنسبة للمؤسسة A وخسائر بالنسبة للمؤسسة B ما هي الاستراتيجة أو الاستراتيجيات التي يجب تبنيها من طرف كل مؤسسة من أجل تعظيم العوائد؟

الموضوع 9:

تمرين 1:

يلخص الشكل التالي مختلف المهام اللازمة لإنجاز مشروع معين، حيث تمثل الأسهم مختلف المهام والعقد حوادث بدأ وانتهاء هذه المهام. أما الأرقام الموجودة على الأسهم فتمثل مدة إنجاز كل مهمة.



المطلوب هو إيجاد مدة إنجاز المشروع كله بإتمام شبكة الأعمال. واستخرج المسار الحرج.

تمرين 2:

يمكن لمؤسستين متنافستين تتقاسمين سوق معين القيام بالإشهار بطرق مختلفة من أجل الحصول على أرباح إضافية. فالمؤسسة الأولى يمكنها القيام بالإشهار باستعمال الجرائد أو الملصقات أما المؤسسة الثانية يمكنها القيام بالإشهار باستعمال الجرائد أو الملصقات أو التلفزيون.

- فإذا قامت المؤسسة الأولى بالإشهار باستعمال **الجرائد** والثانية كذلك ستربح المؤسسة الأولى 100 و.ن، أما إذا قامت المؤسسة الثانية بالإشهار باستعمال الملصقات ستربح المؤسسة الأولى 50 و.ن وإذا قامت المؤسسة الثانية بالإشهار باستعمال التلفزيون ستخسر المؤسسة الأولى 200 و.ن.

- وإذا قامت المؤسسة الأولى بالإشهار باستعمال **الملصقات** والمؤسسة الثانية الجرائد ستخسر المؤسسة الأولى 50 و.ن، أما إذا قامت المؤسسة الثانية بالإشهار باستعمال الملصقات ستربح

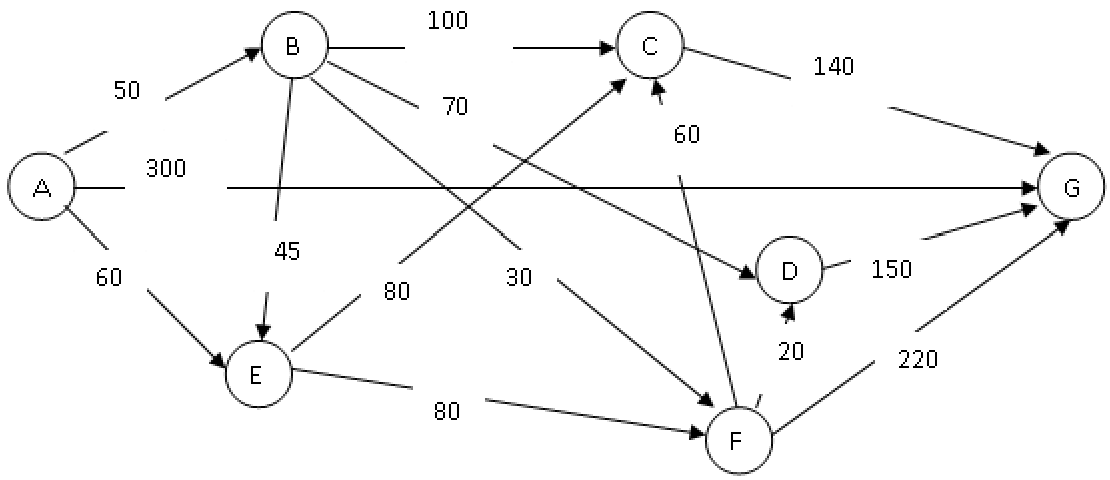
المؤسسة الأولى 100 و.ن وإذا قامت المؤسسة الثانية بالإشهار باستعمال التلفزيون ستربح المؤسسة الأولى 150 و.ن.

إذا علمت أن ما تربحه المؤسسة الأولى تخسره المؤسسة الثانية ما هي الإستراتيجية أو الاستراتيجيات التي يجب أن تتبناها كل مؤسسة حتى تعظم ربحها أو تدنية خسائرها؟

الموضوع 10:

تمرين 1:

يريد مسافر الانتقال من المدينة A إلى المدينة B. يوجد بين هاتين المدينتين عدة مدن وسبل يمكن أن يمر عبرها وهي مبينة في الشكل التالي حيث أن الأرقام الموجودة على الأسهم تمثل المسافة بين كل مدينة وأخرى:



استخرج الطريق الأقصر الذي يجب أن يسلكه المسافر باستعمال الطريقة المناسبة.

تمرين 2:

بعد تخرج ستة طلبة من الجامعة عرض عليهم ستة مناصب شغل في أماكن مختلفة، بحيث يمكن لكل متخرج الاشتغال في أي منصب من هذه المناصب الست. لكن كل متخرج يفضل الاشتغال في منصب معين مقارنة بالمناصب الأخرى. قام كل متخرج بتقييم المناصب الست حسب احتياجاته (القرب من مقر السكن، الأجر الشهري، الرتبة ... الخ) وأعطى لكل منها نقطة تتراوح بين 0 و 20 كما يوضحه الجدول التالي:

الطلبة / مناصب الشغل	A	B	C	D	E	F
1	4	16	0	4	12	20
2	8	20	12	0	16	16
3	16	8	4	16	0	12
4	20	0	16	12	8	0
5	12	4	20	20	20	4
6	0	12	8	8	4	8

في أي منصب يجب أن يعمل كل متخرج حتى يكون اشباعهم في حده الأقصى (الإشباع الكلي للمتخرجين الست)؟

المراجع

1- ابراهيم نائب وأنعام باقية بحوث العمليات خوازميات وبرامج حاسوبية دار وائل للنشر 1999

2- أحمد فهي جلال مقدمة في بحوث العمليات و العلوم الإدارية.

3- السعدي رحال بحوث العمليات

4- اليمين فالته بحوث العمليات الجزء الأول إيتراك للطباعة والنشر الجزائر 2006

5- بوقرة رابح بحوث العمليات الجزء الأول مع دراسة حالة جامعة المسيلة الجزائر 2009-2010

6- حسين عطأ غنيم بحوث العمليات (2).

7- حسين عطا غنيم (بحوث العمليات -2-) جامعة القاهرة 1993.

8- جلال إبراهيم العبد (إدارة الإنتاج والعمليات –مدخل كمي-) الدار الجامعية الاسكندرية 2002.

9- عبد القادر طاليس وياسين العايب بحوث العمليات عمليات ومسائل محلولة

10- كمال خليفة أبوزيد وناصر نور الدين (بحوث العمليات في المحاسبة) الدار الجامعية الابراهيمية 2001

11- محمّد راتول بحوث العمليات ديوان المطبوعات الجامعية الجزائر 2004

12- Abdelmalek Chelihi La gestion des stocks..

13- Boualem BENMAZOUZ Recherche opérationnelle de gestion.

14- Gérard Desbazeeille exercices et problème de recherche opérationnelle