Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Département de sciences commerciales, économiques, gestion des entreprises,
Comptabilité et Finance.
$1^{ière}$ Année LMD (2017 / 2018)

# Corrigée d'examen du deuxième semestre en mathématiques

**Exercice 1** ($5.25PT$)
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Donner $A^t$, $B^t$ les transposées des matrices $A$ et $B$.
$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$

2. Calculer $C = A \times B$, puis donner $C^t$, par deux méthodes différentes.
$C = A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 7 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$
a) $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & -1 \end{pmatrix}$
b) $C = A \times B$
$C^t = (A \times B)^t = B^t \times A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 7 & 7 & -1 \end{pmatrix},$

3. Calculer $B^{-1}$ l'inverse de $B$, si c'est possible.
$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -10, (comB) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -6 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix},$
$B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \times (comB)^t = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} 0 & -6 & 4 \\ -5 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

**Exercice 2** ($7.25PT$)

1. Soient

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -a & 2 \\ 2 & 2 & -a \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Quelles sont les valeurs de $a$ pour que $M_a$ soit inversible?

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -a & 2 \\ 2 & 2 & -a \end{pmatrix} = a^2 + 8a + 12 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = -6$

$\Rightarrow a \in \mathbb{R} - \{-2, -6\}$

b) On prend $a = 1$. Résoudre le **système Cramérien** $M_1 X = B$ par une méthode de votre choix.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix},$

$\begin{cases} x + 2y + 2z = 7 \\ 2x - y + 2z = 7 \\ 2x + 2y - z = 7 \end{cases}$, La solution est: $\begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{pmatrix}$

- **La méthode de la matrice inverse**.

L'inverse de $A$

$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 21, comA = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(comA)^t = \dfrac{1}{21} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{5}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{21} & -\frac{5}{21} \end{pmatrix}$

La solution $X = A^{-1} \times B$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{21} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 6 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(x, y, z) = (3, 1, 1)$.

- **La méthode de Cramer**.

$\Delta = \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 21,$

$\Delta_1 = \det \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 63, \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 21,$

$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 7 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 21$

$x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3, y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1, z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$

- **La méthode de Gauss**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \end{array}\right] \to \left\{\begin{array}{c} x+2y+2z=7 \\ -5y-2z=-7 \\ 21z=21 \end{array}\right., \text{La solution est: } [x=3, y=1, z=1]$$

a) Calculer $N = M_1 - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$N = M_1 - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Résoudre le **système non Cramérien** $NX = B'$, avec $B' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+y=0 \\ 2x-y=1 \\ x+y=0 \end{array}\right.$$

$\left\{\begin{array}{c} 2x+y=0 \\ 2x-y=1 \end{array}\right.$, La solution est $\left[x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}\right]$ on remplace dans la dernière equation

"$x+y=0$" $x+y=\frac{1}{4}+-\frac{1}{2}\neq 0$

Pas de solutions

**Exercice 3** ($7.5PT$)

1. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Les valeurs propres de A: $\det(A-\lambda I)=0$

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 5 \text{ valeur propre simple} \\ \lambda_2 = -1 \text{ valeur propre simple} \end{array}\right.$$

- Les vecteurs propres: $(A-\lambda I)\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour la valeur propre $\lambda_1 = 5$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow x = y$, donc on associe à $\lambda_1$ le vecteur propre $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Pour la valeur propre $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow x = -y$ on associe à $\lambda_2$ le vecteur propre $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- La matrice de passage $P$ et la matrice diagonale $D$ sont:

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

- $P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}(comP)^t = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- Diagonalisation de $A$:
  $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $traceA = \lambda_1 + \lambda_2 = -1 + 5 = 4$
- $\det A = \lambda_1 \times \lambda_2 = (-1) \times (5) = -4$