Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Départements de sciences commerciales, économiques, gestion des entreprises, comptabilité et finance.
$1^{ière}$ Année LMD (2017 / 2018)

Correction de l'examen de rattrapage du deuxième semestre en mathématiques

Exercice 1 (3pts)

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calculer $M \times N$ et $N \times M$. En déduire M^{-1}.

$M \times N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4Id.....(1pts)$

$N \times M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4Id.....(1pts)$

Donc $M \times N = N \times M = -4Id$, $M^{-1} = \frac{-1}{4}N.....(1pt)$

Exercice 2 (11.5pts)

1) Soit le système linéaire

$$(S_1) : \begin{cases} -2x + y + 2z & = & 1 \\ x - 2y + 2z & = & 1 \\ 2x + 2y + z & = & 5 \end{cases}$$

a)- Écrire le système (S_1) sous sa forme matricielle $A \times X = B.....(1pt)$

$$(S_1) : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

b)- Calculer A^2 et en déduire la matrice inverse A^{-1} $.....(1pt) + (1pt)$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9Id.$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{9}A$.

c)- Résoudre le système (S_1) par **la méthode de la matrice inverse** **et la méthode de Cramer**.

a) Par **la méthode de la matrice inverse**:....$(2.5pts)$

$$\begin{aligned}
A \times X &= B \Rightarrow X = A^{-1}B......(0.25pt) \\
&= \frac{1}{9}A.B...............(1.5pt) \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ....\ (0.75pt)
\end{aligned}$$

Ou alors: ..(par la loi $2.5pt$)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(coA)^t\ ..(0.25pt).$$

$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ =27..$(0.25pt)$. $(coA)^t = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ..$(0.75pt)$.

Donc $A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ...$(0.25pt)$

$X = A^{-1}B...(0.25pt)$

$X = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ....$(0.75pt)$

b) Par **la méthode de Cramer**:....$(2.5pts\ )$

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 27...(0.5pt)$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ \mathbf{1} & -2 & 2 \\ \mathbf{5} & 2 & 1 \end{vmatrix} = 27...(0.5pt) \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & \mathbf{1} & 2 \\ 1 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & \mathbf{5} & 1 \end{vmatrix} = 27...(0.5pt) \Rightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 1$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & \mathbf{1} \\ 1 & -2 & \mathbf{1} \\ 2 & 2 & \mathbf{5} \end{vmatrix} = 27...(0.5pt) \Rightarrow z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1.$ ...$(+0.5pt)$**pour le principe de Cramer** $\frac{\Delta X_i}{\Delta}$

Finalement : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Soit le système linéaire

$$(S_2) : \begin{cases} 2x + 3y + 2z & = & 0 & (1) \\ x + 3y + z & = & 2 & (2) \\ x + 3y + z & = & 2 & (3) \end{cases}$$

a)- Montrer que (S_2) **n'est pas** un système de Cramer

On commence par écrire (S_2) la forme matricielle:

$$(S_2) : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0$. Donc (S_2) **n'est pas** un système de Cramer......$(1pt)$

b)- Résoudre le système (S_2) .....$(2,5pt)$

On choisi le mineur $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$....$(0.5pt)$

On garde alors z comme paramètre et l'équation N°3 comme équation de vérification:

On trouve:

$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{-2z} & 3 \\ \mathbf{2 - z} & 3 \end{vmatrix} = -6z - 6 + 3z = -6 - 3z. \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -2 - z$...$(0.5pt)$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & \mathbf{-2z} \\ 1 & \mathbf{2 - z} \end{vmatrix} = 4 - 2z + 2z = 4. \Rightarrow y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{4}{3}$...$(0.5pt)$

(3)$\Leftrightarrow x + 3y + z = -2 - z + 3\left(\frac{4}{3}\right) + z = 2.$ ...$(0.5pt)$

l'équation (3) est vérifiée donc le système (S2) admet une infinité de solutions exprimées sous la forme:...$(0.5pt)$

$$\begin{cases} x = -2 - z \\ y = \frac{4}{3} \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 3 (5.5pts)

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. **Diagonaliser** la matrice B :

   a) Calcul des valeurs propres:....$(2pt)$

$det(B-\lambda Id) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^{2} - 1 = [(1-\lambda)-1]\,[(1-\lambda)+1] = -\lambda(2-\lambda)$...$(0.5pt)$

$det(B-\lambda Id) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$, ou bien $\lambda_2 = 2$....$(0.75pt + .0.75pt)$

b) Calcul des vecteurs propres:....$(1pt) + (1pt)$

Pour $\lambda_1 = 0$:

$(B - \lambda_1 Id)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ou alors $\begin{cases} x=-t \\ y=t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ce qui fait que le premier vecteur propre est : $\overrightarrow{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 2$:

$(B - \lambda_2 Id)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

Ou alors $\begin{cases} x=t \\ y=t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ ce qui fait que le deuxième vecteur propre est : $\overrightarrow{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Diagonalisation de B :

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$...$(0.25pt + 0.25pt)$

Calcul de P^{-1} :

$P^{-1} = \frac{1}{\det p} \left(coP\right)^{t}$. $\det P = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$ $\left(coP\right)^{t} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.....$(0.75pt)$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Finalement $B = PDP^{-1}$...$(0.25pt)$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$