Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Départements des Sciences: Economiques, Commerciales, de Gestion et de Comptabilité et Finance
1^{ière} Année LMD (2018/2019)

Examen du deuxième semestre de mathématiques

Exercice 1: (06 pts)

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer les matrices A et B définies par

$$A = (M^t).M \quad , \quad B = A + Id$$

où M^t est la transposée de la matrice M et Id est la matrice identité d'ordre 3.

2. Trouver les valeurs des réels a et b qui verifients:

$$B^2 = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2: (06 pts)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que $A^2 - 3A + 2Id = 0$, puis en déduire A^{-1}.

2) Calculer D^{-1} puis $(AD)^{-1}$.

Exercice 3: (08 pts)

Soit le système des équations linéaires suivant:

$$(S) \begin{cases} 2y + x - 3z = 1 \\ y - x - 2 = 0 \\ 3x + z + y = 3 \end{cases}$$

1) Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $A.X = B$.

2) Le système (S) est-il de Cramer ? Si oui, résoudre (S) par deux méthodes différentes de votre choix.

Bon courage.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales, Siences de Gestion et Comptabilité et Finance.
1^{iere} année LMD (2018/2019).

Correction de l'examen du deuxième semestre en Mathématiques

Exercice 1 :
1) **Calcule de A et B :**

$$\begin{aligned} A &= (M^t).M \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{01\ pt}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{01\ pt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= A + Id \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathbf{0.5\ pt}) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (\mathbf{0.5\ pt}) \end{aligned}$$

2) La matrice **B** est une matrice **symétrique.** (**0.5 pt**)
3) **Calcule de a et b :**

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (\mathbf{0.5\ pt}) \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 5 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & a+b \\ a & 3a+b & a \\ a+b & a & a \end{pmatrix} (\mathbf{0.5\ pt})$$

on a

$$B^2 = a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ a + b = 1 \\ 3a + b = 11 \end{cases} \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

Alors

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases} \quad (\mathbf{0.5\ pt}) \times \mathbf{2}$$

Exercice 2:

1) **Vérification que** $A^2 - 3A + 2Id = 0$:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} (\mathbf{01\ pt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 - 3A &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 9 & -12 & 9 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} (\mathbf{01\ pt}) \\ &= -2Id \end{aligned}$$

Donc

$$A^2 - 3A + 2Id = 0 \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

* **Déduction de** A^{-1}:

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2Id &= 0 \Leftrightarrow A\left(A - 3Id\right) = -2Id \\ &\Leftrightarrow A \times \left(\frac{A - 3Id}{-2}\right) = Id \quad (\mathbf{01\ pt}) \end{aligned}$$

Avec

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = Id$$

On obtient par identification

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(3Id - A\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} (\mathbf{0.5\ pt})$$

2) **Calcul de** D^{-1} :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} (\mathbf{01\ pt})$$

Car D est une matrice diagonale.

$$\begin{aligned}(AD)^{-1} &= D^{-1}\times A^{-1} \quad (\textbf{01 pt})\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ -3 & 1 & -3\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1) **<u>La forme matricielle :</u>**

$$(S)\Leftrightarrow A\times X=B$$

avec

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}(\textbf{01 pt})$$

on a (S) est un système carrée et

$$\det(A)=15\neq 0\quad(\textbf{01 pt})$$

donc est (S) un système de Cramer.

2) **<u>Résolution du système :</u>**

<u>- Méthode de la matrice d'inverse:</u>

*Calcul de A^{-1} :

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}com^t(A)\quad(\textbf{0.25 pt})\\ &= \frac{1}{15}\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ 1 & 10 & 3\\ -4 & 5 & 3\end{pmatrix}(\,(\textbf{0.5})\times 3+\textbf{0.25 pts})\end{aligned}$$

*La solution $X=A^{-1}\times B$: (**0.25 pt**)

$$X=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1 & -5 & 3\\ 1 & 10 & 3\\ -4 & 5 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}(\textbf{0.25 pt})\times 3$$

$$S=\{(x,y,z)=(0,2,1)\}$$

<u>- Méthode de Cramer :</u>

*Calcul des déterminants

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 30 \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \quad (\mathbf{0.5\ pt})$$

*La solution, avec $\Delta = \det(A) = 15$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad (\mathbf{0.25\ pt}) \times 3$$

$$x = 0; \quad y = 2; \quad z = 1 \quad (\mathbf{0.25\ pt}) \times 3$$

- Méthode de Gauss:

*Bloc $[A\,|B]$

$$\begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

* Etape 1

-Nouvelle L_2 : $(\mathbf{0.75\ pt})$

$$\begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_2 \rightarrow \\ L_1 + L_2 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array} \right|$$

-Nouvelle L_3 : $(\mathbf{0.75\ pt})$

$$\begin{array}{r} L_1 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \\ 3L_1 - L_3 \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \end{array} \right|$$

* Etape 2

-Nouvelle L_3 : $(\mathbf{0.75\ pt})$

$$\begin{array}{r} L_2 \rightarrow \\ L_3 \rightarrow \\ 5L_2 - 3L_3 \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \end{array} \right|$$

Donc

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ \quad\ \ 3y - 3z = 3 \\ \qquad\ \ 15z = 15 \end{cases} \quad (\mathbf{0.75\ pt})$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} .$$