

Examen de Mathématiques Semestre 1

Exercice 1

I) Soient P , Q et R trois propositions quelconques.

1. Montrer à l'aide de la table de vérité que la proposition

$A : (P \Rightarrow \bar{Q}) \vee (P \vee R)$, est une tautologie.

2. Donner B' la contraposée de la proposition $B : (\bar{P} \wedge Q) \Rightarrow (\bar{R} \vee \bar{Q})$.
3. Compléter par le connecteur logique convenable $B \dots B'$.

II)

1. Donner la négation des propositions suivantes:

$$\begin{aligned} S : & \forall x \in \mathbb{R}, [(x - 1 \geq 0) \vee (x + 2 \neq 0)] \\ T : & (\forall x \in \mathbb{R}, x + 3 = 0) \vee (\exists x \in \mathbb{R} / x + 1 \geq 0) \end{aligned}$$

2. Les propositions S et T sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

Exercice 2

I) On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par: $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{n+2} \end{cases}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire que (U_n) est convergente et trouver la valeur de sa limite.

II) À l'aide des théorèmes de comparaison, étudier la convergence des suites

$$V_n = \frac{(-1)^n}{n+2}, \quad W_n = \frac{n^2 + \cos n}{n+2}.$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes:

$$\mathbf{I}_1 = \int_0^1 8x^3 \sqrt{1-x^4} dx, \quad \mathbf{I}_2 = \int \frac{\cos x}{2 \sin x + 5} dx, \quad \mathbf{I}_3 = \int (x-2) e^{3x} dx, \quad \mathbf{I}_4 = \int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx.$$

Bon courage.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen.

Faculté des Sciences Economiques, Commerciales, Sciences de Gestion et
Comptabilité et Finance.
1^{iere} année LMD (2019/2020).

Correction de l'examen du premier semestre en Mathématiques

Exercice 1 : (07 points)

I)

1. Soient P , Q et R propositions quelconques. En dressant la table de vérité, montrer que la proposition A est une tautologie

$$A : (P \Rightarrow \bar{Q}) \vee (P \vee R).$$

P	Q	R	$\bar{Q}$	$(P \Rightarrow \bar{Q})$	$(P \vee R)$	A
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1

(0.25 × 7) point

La proposition A est toujours vraie donc c'est une tautologie (0.25) point

2. La contraposée de la proposition $B : (\bar{P} \wedge Q) \Rightarrow (\bar{R} \vee \bar{Q}) :$

$$\bar{B} : \left[\overline{(\bar{R} \vee \bar{Q})} \Rightarrow \overline{(\bar{P} \wedge Q)} \right] \Leftrightarrow [(R \wedge Q) \Rightarrow (P \vee \bar{Q})] \quad (0.5 \times 2) \text{ point.}$$

3. Le connecteur logique convenable $B \Leftrightarrow B'$ (0.5) point

II)

1. La négation des propositions S et T

$$\bar{S} : \exists x \in \mathbb{R}, [(x - 1 < 0) \wedge (x + 2 = 0)] \quad (0.25 \times 4) \text{ point.}$$

$$\bar{T} : (\exists x \in \mathbb{R}, x + 3 \neq 0) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} / x + 1 < 0) \quad (1 \text{ point}).$$

2. La proposition $\bar{S}$ est vraie(ex: $x = -2$ on a $(x - 1 < 0)$ vraie et $(x + 2 = 0)$ vraie donc $\bar{S}$ est vraie par conséquent S est fausse. (0.25 + 0.5)point.

La proposition $\bar{T}$ est fausse (ex: $x = 1$ on a $(x + 3 \neq 0)$ vraie et $(x + 1 < 0)$ n'est pas vraie pour $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\bar{T}$ est fausse et par conséquent T est vraie. (0.25 + 0.5)point.

Exercice 2 : (07 points)

I) Soit la suite numérique $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n}{n+2} \end{cases}$

1. Montrons par recurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n$.

a) **Vérification:** puisque $U_0 = 0$ alors $0 < U_0$. (0.25)point

b) **On suppose** que $0 < U_n$ et **on montre** que $0 < U_{n+1}$ (0.5)point

$$\begin{aligned} 0 &< U_n \\ 0 &< n+2 \\ 0 &< \frac{U_n}{n+2} \\ 0 &\leq U_{n+1} < 1 \end{aligned}$$

c) **Conclusion:** $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n$. (0.25)point

2. Étude de la monotonie de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{n+2} - U_n = \frac{U_n - nU_n - 2U_n}{n+2} = \frac{U_n(-n-1)}{n+2} = -\frac{U_n(n+1)}{n+2} < 0 \text{ (0.25 + 1) point}$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n < 0$ donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. (0.25)point

3. En déduire que (U_n) est convergente (01)point

On a $\begin{cases} (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \\ 0 < U_n, (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ minorée} \end{cases} \Rightarrow$ par le théorème de convergence monotone, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

- calcul de la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$ aussi.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n+2} \Rightarrow l = 0 \text{ (01)point}$$

II) Etude de la convergence des suites

$$1) V_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n+2} \leq \frac{(-1)^n}{n+2} \leq \frac{1}{n+2} \text{ (0.5)point}$$

en passant à la limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, par le théorème

d'encadrement on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} = 0$, (0.5)point

Par conséquent la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. (0.25)point

$$2) W_n = \frac{n^2 + \cos n}{n+2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow n^2 - 1 \leq n^2 + \cos n \leq n^2 + 1 \Rightarrow \frac{n^2 - 1}{n + 2} \leq \frac{n^2 + \cos n}{n + 2} \leq \frac{n^2 + 1}{n + 2} \quad \underline{(0.5)\text{point}}$$

en passant à la limite, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, comme $\frac{n^2 - 1}{n + 2} \leq \frac{n^2 + \cos n}{n + 2}$ forcément $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + \cos n}{n + 2} = +\infty$ (0.5)point

Par conséquent la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente. (0.25)point

Exercice 3 : (06)points

Calcul des intégrales

1/

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 8x^3 \sqrt{1 - x^4} dx \\ &= -2 \int_0^1 -4x^3 (1 - x^4)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= -2 \left[\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} (1 - x^4)^{\frac{1}{2} + 1} \right]_0^1 \\ &= \left[\frac{-4}{3} (1 - x^4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{-4}{3} (0 - 1) = \frac{4}{3} \quad \underline{(02)\text{points}} \end{aligned}$$

2/

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\cos x}{2 \sin x + 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos x}{2 \sin x + 5} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |2 \sin x + 5| + C \quad \underline{(01.5)\text{points}} \end{aligned}$$

3/

$$I_3 = \int (x - 2) e^{3x} dx$$

Par parties: $u = (x - 2) \rightarrow u' = 1$

$$v' = e^{3x} \rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

(0.25 × 4)point

Comme $\int uv' = uv - \int u'v$ on trouve:

$$\begin{aligned}
I_3 &= (x-2) \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right) - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \quad \underline{(0.5) \text{ point}} \\
&= \frac{1}{3} (x-2) e^{3x} - \frac{1}{3} \left(\int e^{3x} dx \right) \\
&= \frac{1}{3} (x-2) e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C \\
&= \frac{1}{3} \left(x - \frac{7}{3} \right) e^{3x} + C \quad \underline{(0.5) \text{ point}}
\end{aligned}$$

4/

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \frac{2x+1}{x(x+1)} dx \\
&= \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx \\
&= \ln |x^2+x| + C. \quad \underline{(0.5) \text{ point}}
\end{aligned}$$