Université Abou Bekr Bilkaid Tlemcen
Faculté des Sciences économiques, commerciales et de Gestion
Département du Tronc commun
$1^{ière}$ Année LMD (2019/2020)

Corrigé de l'examen du deuxième semestre de mathématiques pour les sections 1 et 3

Exercice 1:

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le type de la matrice B puis donner A sa matrice transposée.
2. Calcluer A^2, A^3 puis $A^3 - A$.
3. Déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}
4. Donner explicitement la matrice inverse de A^{-1}

Exercice 2:

Soit le système d'équations linéaires suivant, avec $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(S)\begin{cases} z + x - y = 5 \\ x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases},$$

1) Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = B$.
2) Résoudre le système (S) par une méthode de votre choix.

Exercice 1:

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. la matrice B est une matrice carrée d'ordre 3 **(1point)**. Sa matrice transposée est: **(1point)**

$$A = B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \textbf{ (1point)}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \textbf{ (1point)}$$

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4Id \textbf{ (1point)}$$

3. A est inversible s'il existe une matrice B telle que $A \times B = Id$. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} A^3 - A &= 4Id \Rightarrow \frac{1}{4}(A^3 - A) = Id.\textbf{(0.5 point)} \\ &\Rightarrow \frac{1}{4}A(A^2 - Id) = Id.\textbf{(0.5 point)} \\ &\Rightarrow A(\frac{1}{4}(A^2 - Id)) = Id. \end{aligned}$$

par suite on peut dire qu'il existe une matrice $B = \frac{1}{4}(A^2 - Id)/\ A.B = Id$ donc A est inversible**(1 point)**, et A^{-1} est donnée par

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{4}(A^2 - Id) \\ &= \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \textbf{ (1 point)} \end{aligned}$$

4. La matrice inverse de A^{-1}est $(A^{-1})^{-1} = A = B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$**(2points)**

Exercice 2

1. On doit d'abords ordonner le système (S) comme suit:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 5 \\ x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + z = 2 \end{cases}, \textbf{ (1 point)}$$

Le système (S) peut s'écrire maintenant sous la forme matricielle $AX = B$

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{où } A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ et } \ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \textbf{ (1 point)}$$

$\triangle = \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$ donc le système admet une solution unique **(2 point)**

1. Résolution du système par:

Méthode de Cramer: La solution est

$$X = (x, y, z)^t = (\frac{\triangle_1}{\triangle}, \frac{\triangle_2}{\triangle}, \frac{\triangle_3}{\triangle})$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 \textbf{ (1 pt)}, \triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12 \textbf{ (1 pt)}, \triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \textbf{ (1 pt)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{-6}{-6} = 1, \textbf{(1 point)} \\ y &= \frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{12}{-6} = -2, \textbf{(1 point)} \\ z &= \frac{\triangle_3}{\triangle} = \frac{-12}{-6} = 2. \textbf{(1 point)} \end{aligned}$$

d'où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Méthode de la matrice Inverse

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \times B = \frac{1}{\det A}(comA)^t \times B\textbf{(1.5 point)} \qquad (1)$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -6 \text{ déja noté sur } \textbf{(2 point)}$$

$$comA = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \textbf{(1.5 point)} \Rightarrow com^t A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \textbf{(0.5 point)}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \textbf{(0.5 point)}$$

$$\text{d'après la formule (1)} \quad X = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{par la suite } X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \textbf{(2point)}$$